



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΠΑΤΡΩΝ
UNIVERSITY OF PATRAS

ΑΝΟΙΚΤΑ ακαδημαϊκά
μαθήματα **ΠΠ**

ΤΙΤΛΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙ**

ΕΝΟΤΗΤΑ: **1.Εισαγωγή**

ΟΝΟΜΑ ΚΑΘΗΓΗΤΗ: **ΦΡ. ΚΟΥΤΕΛΙΕΡΗΣ**

ΤΜΗΜΑ: **Τμήμα Διαχείρισης Περιβάλλοντος και
Φυσικών Πόρων**

ΑΓΡΙΝΙΟ

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΣΥΝΗΘΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Φραγκίσκος Κουτελιέρης
Αναπληρωτής Καθηγητής Παν/μίου Πατρών



Επικοινωνία: fcoutelieris@upatras.gr



Διαφορικές εξισώσεις

Έστω μια συνάρτηση $F : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, όπου I ένα διάστημα του \mathbb{R} και $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$.

Έστω ακόμη η συνάρτηση $y(x) : I \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $y^{(k)}(x) = \frac{d^{(k)}y(x)}{dx^k}$, όπου $k = 1, 2, \dots, n$.

Ονομάζεται **συνήθης** διαφορική εξίσωση (ΣΔΕ) κάθε έκφραση της μορφής

$$F\left(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)\right) = 0$$



Παραδείγματα ...

... φαινομένων τα οποία περιγράφονται από διαφορικές εξισώσεις:

- η κίνηση ενός σώματος σε καμπύλη τροχιά (φυσική)
- οι χημικές αντιδράσεις που λαμβάνουν χώρα σε μια ρευστή φάση (χημεία)
- η εξέλιξη πληθυσμών σε κλειστά συστήματα (βιολογία)
- η διασπορά ρύπων στην ατμόσφαιρα (περιβάλλον)
- η διακύμανση ενός κεφαλαίου σε δεδομένες συνθήκες (οικονομία)
- το ηλεκτρικό κύκλωμα πυκνωτή-πηνίου (ηλεκτρομαγνητισμός)
- ... και πάρα πολλά άλλα.



Βασική παρατήρηση

Σε μια **συνήθη** διαφορική εξίσωση η άγνωστη συνάρτηση εξαρτάται μόνο από **μία** ανεξάρτητη μεταβλητή.

Αν η άγνωστη συνάρτηση είναι πολλών μεταβλητών, δηλ. αν εξαρτάται από **δύο ή περισσότερες** ανεξάρτητες μεταβλητές, τότε η διαφορική εξίσωση ονομάζεται διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους ή αλλιώς **μερική** διαφορική εξίσωση (ΜΔΕ).



Τάξη μιας ΣΔΕ ...

... ονομάζεται η μεγαλύτερη τάξη παραγώγου που εμφανίζεται σε αυτήν.



Λύση μιας ΣΔΕ ...

... είναι κάθε συνάρτηση που την επαληθεύει.

Στην πραγματικότητα, η λύση μιας ΣΔΕ είναι μια **οικογένεια συναρτήσεων** της μορφής $y=y(x, c_1, c_2, \dots, c_n)$. Τα μέλη της οικογένειας αυτής συνδέονται μεταξύ τους μέσω n -το-πλήθος πραγματικών σταθερών c_1, c_2, \dots, c_n , οι οποίες προκύπτουν επειδή για την εύρεση της λύσης χρειάζονται n -το-πλήθος ολοκληρώσεις.



Βασικό ...

Η συνάρτηση $y=y(x,c_1,c_2,\dots,c_n)$ ονομάζεται **γενική λύση** της ΣΔΕ αν την ικανοποιεί για οποιοδήποτε σύνολο τιμών των σταθερών c_1,c_2,\dots,c_n .

Είναι δυνατόν να υπάρχουν συναρτήσεις οι οποίες είναι λύσεις της ΣΔΕ, αλλά **δεν προκύπτουν** από την $y=y(x,c_1,c_2,\dots,c_n)$. Αυτές είναι οι **ιδιάζουσες** λύσεις.

Ονομάζεται **πλήρης λύση** της ΣΔΕ το **άθροισμα** της **γενικής** λύσης της και όλων των **ιδιάζουσών** λύσεών της.



ΠΑΤ

Το πρόβλημα στο οποίο αναζητείται εκείνη η λύση της ΣΔΕ

$$F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$$

η οποία ικανοποιεί τις συνθήκες

$$y(x_0) = y_0$$

$$y'(x_0) = y_1$$

...

$$y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

όπου $y_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, n-1$ και $x_0 \in I$

ονομάζεται **πρόβλημα αρχικών τιμών (ΠΑΤ)**.



ΠΣΤ

Το πρόβλημα στο οποίο αναζητείται εκείνη η λύση της ΣΔΕ

$$F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$$

η οποία ικανοποιεί μαζί με τις μέχρι n τάξης παραγώγους κάποιες συνθήκες στα άκρα ενός διαστήματος $[\alpha, \beta] \subseteq I$

ονομάζεται **πρόβλημα συνοριακών τιμών (ΠΣΤ)**.



Ασκήσεις.



Σ. Δ. Ε

2015

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την 1^η έκδοση.

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Πατρών, Φραγκίσκος Κουτελιέρης, 2015.

Φραγκίσκος Κουτελιέρης. «ΣΥΝΗΘΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ». Έκδοση: 1.0. Αγρίνιο 2015.

Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

<https://eclass.upatras.gr/courses/ENV123/>



Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά Δημιουργού, Απαγόρευση Εμπορικής Χρήσης και Όχι Παράγωγα Έργα. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».

Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:

Εικόνα 1: <http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/a/a0/Kugleramme.jpg>

«Το υλικό της παρουσίασης προέρχεται από τις πανεπιστημιακές παραδόσεις του καθηγητή Φρ. Κουτελιέρη».

