ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΔΙΑΦ. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ (ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΤΑΞΗΣ).
(ΜΕ ΣΤΑΘΕΡΟΥΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ).

ΓΕΝ. ΟΡΙΣΜΟΣ
(ΜΗ ΟΜΟΓΕΝΗΣ) → $y^{(n)}(x) + a_{n-1}\cdot y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1\cdot y'(x) + a_0\cdot y(x) = h(x)$

(ΓΙΑ ΟΜΟΓΕΝΗ) (1) → $y^{(n)}(x) + a_{n-1}\cdot y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1\cdot y'(x) + a_0\cdot y(x) = 0$

ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΠΙΛΥΣΗΣ (ΓΙΑ ΟΜΟΓΕΝΗ Δ.Ε).

1ο ΒΗΜΑ : Αναζητώ λύση της μορφής $y(x) = e^{px}$

(Θα βρω το Χαρακτηριστικό πολυώνυμο της Σ.Δ.Ε)

$y'(x) = p\cdot e^{px}$
$y''(x) = p^2\cdot e^{px}$
$\vdots$
$y^{(n)}(x) = p^n\cdot e^{px}$

2ο ΒΗΜΑ (Αντικατάσταση όλων στην (1))

$$e^{px}\cdot\left(p^n + a_{n-1}\,p^{n-1} + \dots + a_2\cdot p^2 + a_1 p + a_0\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{p^n + a_{n-1}\cdot p^{n-1} + \dots + a_2\cdot p^2 + a_1 p + a_0 = 0.}$$

Επομένως ψάχνω τις ρίζες του Χ.Π.

(*) Ανάλογα με τις ρίζες παίρνω και έτοιμες τις μορφές των λύσεων.

1η περίπτωση ριζών

Έστω διαφορετικές ρίζες μεταξύ τους, $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_\nu \in \mathbb{R}$

τότε η γενική λύση της Δ.Ε. θα είναι:

$$y(x) = \underbrace{c_1 \cdot e^{\rho_1 x} + c_2 e^{\rho_2 x} + \dots + c_\nu e^{\rho_\nu x}}_{c_i \ \to \ \text{σταθερές ποσότητες}}$$

2η περίπτωση ριζών

Αν οι ρίζες του Χ.Π. $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_\nu \in \mathbb{R}$ αλλά έχουν πολλαπλότητα $k_1, k_2, \dots, k_\nu$ τότε η γενική μορφή λύσης της Δ.Ε. είναι:

$$y(x) = P_1(x) \cdot e^{\rho_1 x} + P_2(x) \cdot e^{\rho_2 x} + \dots + P_\nu \cdot e^{\rho_\nu x}$$

Είναι πολυώνυμα ενός βαθμού μικρότερου από την πολλαπλότητα της εκάστοτε ρίζας που αναφέρεται στον εκθέτη.

π.χ. Αν η ρ_1 έχει πολλαπλότητα $k=2$

τότε το $P_1(x) = c_0 + c_1 x$.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- Αν $\Delta = 0$, $x_{1,2} = -\frac{b}{2a}$ → πολλαπλότητα 2.
- Αν $\Delta > 0$, 2 διαφορετικές πραγματικές ρίζες.

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\dots}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\dots}}{2a}$$

- Αν $\Delta < 0$ (~~ΑΔΥΝΑΤΟ~~) → Δυο συζυγείς μιγαδικές ρίζες.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{-(4ac - b^2)}}{2a} = \frac{-b \pm i\sqrt{(4ac - b^2)}}{2a}$$

$$x_1 = -\frac{b}{2a} + i\,\frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$$

$$x_2 = -\frac{b}{2a} - i\,\frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$$

3η περίπτωση ριζών (Μιγαδικές ρίζες)

τότε

$$y(x) = e^{a\cdot x}\cdot\left[A(x)\cdot\cos(bx) + B(x)\cdot\sin(bx)\right]$$

(*) Αν $\boxed{\rho_{1,2} = \underbrace{a}_{\text{(πραγματικό μέρος)}} \pm i\, b}$ → στη ΜΟΡΦΗ ΜΙΑΣ ΜΙΓΑΔΙΚΗΣ ΡΙΖΑΣ.

b → φανταστικό μέρος του μιγαδικού.

(*) { Όπου $A(x)$ και $B(x)$ πολυώνυμα ενός βαθμού μικρότερου από την πολλαπλότητα της μιγαδικής ρίζας. }

Έστω $(x-1)^3 = 0 \Rightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 1}$ με $\boxed{k=3}$

Αν : $\boxed{(\rho-1)^3 = 0}$, $\boxed{\rho = 1}$ → $k=3$

$$y(x) = \underbrace{\left(c_0 + c_1 x + c_2 x^2\right)}\, e^{1\cdot x} = \left(c_0 + c_1 x + c_2 x^2\right)\cdot e^{x}$$

Έστω : $\underbrace{(x+2)\cdot(x^2-1) = 0}$ ⟹ $x_1 = -2$, $x_{2,3} = \pm 1$

$$\underbrace{y(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{1\cdot x} + c_3 e^{-x}}.$$

Έστω $\boxed{x^2 + 2 = 0} \Rightarrow x^2 = -2 \Rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{-2}$

$x_1 = i\sqrt{2}$ $x_2 = -i\sqrt{2}$ $\Rightarrow \boxed{x_{1,2} = 0 \pm i\sqrt{2}}$ → $a \pm i b$

$$y(x) = e^{\overset{\to 0}{ax}}\left[A(x)\cos \overset{\to\sqrt{2}}{bx} + B(x)\cdot \sin \overset{\to\sqrt{2}}{bx}\right] \to \text{ΓΕΝ. ΟΡΙΣΜΟΣ}$$

Αυθαίρετες σταθερές $=1$

$$y(x) = 1\cdot\left[C_1\cdot\cos(\sqrt{2}\,x) + C_2\cdot\sin(\sqrt{2}\,x)\right]$$

Έστω $\boxed{y''(x) - y'(x) - 2y(x) = 0}$ — Δ.Ε. σταθερών συντελεστών 2ης τάξης, ομογενής

Θέτω $y = e^{\rho x}$

$y' = \rho\cdot e^{\rho x}$, $y'' = \rho^2\cdot e^{\rho x}$.

Άρα Χ. Πολυώνυμο Δ.Ε: $\rho^2 e^{\rho x} - \rho e^{\rho x} - 2e^{\rho x} = 0$.

$$\Rightarrow \underbrace{e^{\rho x}}_{\neq 0}(\rho^2 - \rho - 2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\rho^2 - \rho - 2 = 0} \to \left.\begin{aligned}\rho_1 &= -1\\ \rho_2 &= 2\end{aligned}\right\}\ \text{2 πραγματικές διαφορετικές.}$$

$$\boxed{y(x) = C_1\cdot e^{-1\cdot x} + C_2 e^{2x} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}.}$$

Έστω $\boxed{y''(x) - 2y'(x) + 2y(x) = 0}$. $y = e^{\rho x}$

1ο ΒΗΜΑ

ΧΑΡΑΚΤ. ΠΟΛΥΩΝΥΜΟ: $\boxed{\rho^2 - 2\rho + 2 = 0}$

2ο ΒΗΜΑ

ΕΥΡΕΣΗ ΡΙΖΩΝ ΤΟΥ Χ. ΠΟΛΥΩΝ.: $\Delta = 4 - 8 = \boxed{-4}$

$$\rho_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{2 \pm i\sqrt{4}}{2} = \frac{\cancel{2}^{1} \pm i\cancel{2}^{1}}{\cancel{2}} = \boxed{1 \pm i}$$

$a = 1$

$b = 1$

$$y(x) = e^{ax}\left[A(x)\cdot\cos bx + B(x)\sin(bx)\right]$$ σταθερές

$$\boxed{y(x) = e^x\cdot\left[C_1\cdot\cos x + C_2\cdot\sin x\right]} \Rightarrow \text{ΛΥΣΗ ΤΗΣ ΔΕ}$$

Εξισ. $y^{(4)}(x) - 2y^{(3)}(x) + 2y''(x) - 2y'(x) + y(x) = 0.$

Χ.Π : $\lambda^4 - 2\lambda^3 + \underbrace{2\lambda^2}_{} - 2\lambda + 1 = 0. \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda^4 - 2\lambda^3 + \lambda^2 + \boxed{\underbrace{\lambda^2 - 2\lambda + 1}_{(\lambda-1)^2}} = 0. \Rightarrow$

$\Rightarrow \underbrace{\lambda^4 - 2\lambda^3 + \lambda^2}_{\lambda^2(\lambda^2-2\lambda+1)} + (\lambda-1)^2 = 0 \Rightarrow \lambda^2 \cdot \overbrace{(\lambda^2 - 2\lambda + 1)}^{(\lambda-1)^2} + (\lambda-1)^2 = 0.$

$\Rightarrow \lambda^2 (\lambda-1)^2 + (\lambda-1)^2 = 0 \Rightarrow \boxed{(\lambda-1)^2 \cdot (\lambda^2+1) = 0.}$

$(\lambda-1)^2 = 0$ ή $\lambda^2 + 1 = 0. \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\lambda_1 = 1}$

$k = 2$

$\Rightarrow \lambda^2 = -1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda_{2,3} = \pm\sqrt{-1}$

$\Rightarrow \lambda_{2,3} = 0 \pm i\sqrt{1} = \boxed{0 \pm i\,1}$

a

$\lambda_2 = i$ $\quad \lambda_3 = -i$

$$y(x) = (c_0 + c_1 x)e^{1\cdot x} + e^{\cancel{a}x \to 0}\left[A(x)\cdot\cos\cancel{b}^{1}x + B(x)\cdot\sin\cancel{b}^{1}x\right]$$

$$\boxed{y(x) = (c_0 + c_1 x)\,e^{x} + c_2 \cdot \cos x + c_3 \cdot \sin x}$$

$$y''(x) - 5y'(x) + 7y(x) = 0.$$