ΓΕΝ. ΟΡΙΣΜΟΣ Γ.Δ.Ε :

$$\boxed{\frac{dy}{dx} + A_L(x)\cdot y(x) = B_L(x)}$$

ΦΥΣΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Έστω η θερμοκρασία θ ενός σώματος το οποίο βρίσκεται σε περιβάλλον σταθερής θερμοκρασίας $T < \theta$, μειώνεται με ρυθμό ανάλογο της διαφοράς $\theta - T$.

συντελεστής αναλογίας

α) Να βρεθεί η $\theta(t) = ?$

ΑΡΧ. ΣΥΝΘΗΚΗ

β) Αν $\theta(t=0) = 3T$ και $\theta(t=10) = 2T$ να υπολογιστεί η $\theta(t=20)$, καθώς και το $\lim_{t\to+\infty} \theta(t) = ?$

αρνητικός ο ρυθμός μεταβολής λόγω της μείωσης

$$\boxed{\frac{d\theta}{dt} = -k(\theta - T)}$$

→ Δ.Ε που χαρακτηρίζει το πρόβλημα

συντελεστής αναλογίας

ρυθμός μεταβολής της θερμοκρασίας ως προς το χρόνο

a, b

$\boxed{a = \lambda \cdot b}$

συντελεστής αναλογίας

α) $\theta \to \boxed{\theta(t)}$, $\boxed{k > 0}$

$$\frac{d\theta}{dt} = -k\theta + kT \Rightarrow \boxed{\frac{d\theta}{dt} + k\cdot\theta = kT}$$

Γ.Δ.Ε

$$\left.\begin{aligned} A_L(t) &= k \\ B_L(t) &= kT \end{aligned}\right\}$$

ΓΕΝ. ΛΥΣΗ Γ.Δ.Ε

$$y(x) = e^{-\int A_1(x)\,dx}\left[c + \int B_1(x)\cdot e^{\int A_1(x)\,dx}\,dx\right]$$

$$\Theta(t) = e^{-\int k\,dt}\left[c + \underline{\int kT\cdot e^{\int k\,dt}\,dt}\right] \quad (1)$$

- $\int k\,dt = kt$
- $\int kT\cdot \underline{e^{kt}}\,dt = \cancel{k}T\cdot\frac{e^{kt}}{\cancel{k}} = T\cdot e^{kt}$

$\left(e^{kt}\right)' = \boxed{e^{kt}}\,k$

$\left(\frac{1}{k}\cdot e^{kt}\right)' = \frac{1}{\cancel{k}}e^{kt}\cdot\cancel{k} = e^{kt}$

$\left(e^{kt}\right)' = e^{kt}\cdot(kt)' = k e^{kt}$

$$\boxed{\left(e^{f(x)}\right)' = e^{f(x)}\cdot f'(x)}$$

(1): $\Theta(t) = e^{-k\cdot t}\left[c + T\cdot e^{kt}\right] \Rightarrow$

$\Rightarrow \Theta(t) = c\cdot e^{-kt} + T\cdot \underline{e^{kt}\cdot e^{-kt}}$

$$\Rightarrow \boxed{\Theta(t) = T + c\,e^{-kt}} \quad (2)$$

$\boxed{T+c}$

$10+5$

15

$\frac{c}{e^{kt}}$

$10+\dots$

$e^{-x} = \boxed{\frac{1}{e^{x}}}$

(β) Άρα από ΑΡΧ. ΣΥΝΘΗΚΗ $\Theta(t=0) = 3T$.

(2): $\Theta(t=0) = T + c = 3T \Rightarrow c = 3T - T = 2T$

Τελικά $\theta(t) = T + \underset{\overset{\parallel}{C}}{\boxed{2T}} \cdot e^{-kt}$ ⟸ ΕΙΔΙΚΗ ΛΥΣΗ

(★) $\theta(t=10) = T + 2T \cdot e^{-10k} = 2T. \Rightarrow$

$\Rightarrow 2T \cdot e^{-10k} = 2T - T \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\cancel{T} \cdot e^{-10k} = \cancel{T}. \Rightarrow 2 \cdot e^{-10k} = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow e^{-10k} = 1/2 \Rightarrow$

$\Rightarrow e^{-10k} = e^{\ln(1/2)} \Rightarrow$

$\Rightarrow -10k = \ln(1/2) \Rightarrow$

$\Rightarrow -10k = \cancel{\ln 1}^{\,0} - \ln 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 10k = \ln 2 \Rightarrow \boxed{k = \frac{\ln 2}{10}}$

$x = e^{\ln x}$

$e^{a} = e^{b} \Rightarrow a = b$

$\ln A - \ln B = \ln(A/B)$

Αν $\theta(t) = T^2 + 2T \cdot e^{t(\dots)}$

$C + C$

Άρα $\boxed{\theta(t) = T + 2T e^{-\frac{\ln 2}{10} \cdot t}}$

Επομένως $\theta(t=20) = T + 2T \cdot e^{-\frac{\ln 2}{\cancel{10}} \cdot \cancel{20}^{\,2}} = T + 2T \cdot e^{-2\ln 2}$

$-2 \cdot \ln 2 = \ln 2^{(-2)} = \ln\left(\frac{1}{2^2}\right) = \ln(1/4)$

$e^{\ln(1/4)} = \frac{1}{4}$

$e^{\ln x} = x$

$\boxed{\theta(t=20)} = T + \cancel{2}T \cdot \frac{1}{\cancel{4}\,2} = \boxed{\frac{3T}{2}}$

$\lim_{t \to +\infty} \theta(t) = \lim_{t \to +\infty} \left(T + 2T \cdot e^{-\frac{\ln 2}{10} \cdot t}\right) =$

$= T$

διότι $\boxed{\lim_{t \to +\infty} 2T \cdot e^{-\frac{\ln 2}{10} \cdot t} \longrightarrow 0}$