


ΓΑΝ. ΟΡΙΣΜΟΣ

Γ.Δ.Ε

$$\frac{dy}{dx} + \underbrace{A_L(x)} \cdot \underbrace{y(x)} = \underbrace{B_L(x)} \quad \leftarrow$$

ΦΥΣΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Έστω η θερμοκρασία θ ενός σώματος το οποίο βρίσκεται σε περιβάλλον αέρας θερμοκρασίας $T < \theta$, πυκνότητας ρ και απόδοσης της διαφοράς $\theta - T$.

α) Να βρεθεί η $\theta(t) = ?$

ΑΡΧ. ΣΥΝΘΗΚΗ

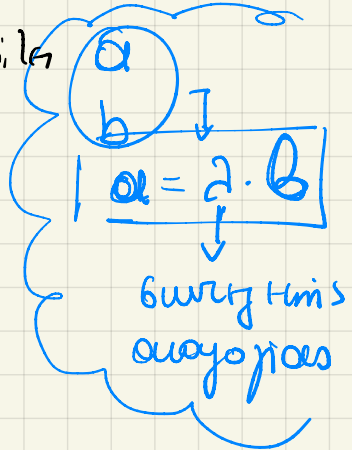
β) Αν $\theta(t=0) = 3T$ και $\theta(t=10) = 2T$ να υπολογιστεί η $\theta(t=20)$, καθώς και το $\lim_{t \rightarrow \infty} \theta(t) = ?$

$$\frac{d\theta}{dt} = -k(\theta - T)$$

ο πυκνότητας ρ και ο απόδοσης α

Δ.Ε που χαρακτηρίζεται από πρόβλημα

πυκνότητας ρ και απόδοσης α της θερμοκρασίας ως προς το χρόνο.



α) $\theta \rightarrow \theta(t)$, $k > 0$

$$\frac{d\theta}{dt} = -k\theta + kT \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} + k \cdot \theta = kT$$

Γ.Δ.Ε

$$\left. \begin{aligned} A_L(t) &= k \\ B_L(t) &= kT \end{aligned} \right\}$$

$$y(x) = e^{-\int A_L(x) dx} \left[c + \int B_L(x) \cdot e^{\int A_L(x) dx} dx \right]$$

$$\theta(t) = e^{-\int k dt} \left[c + \int kT \cdot e^{\int k dt} dt \right] \quad (1)$$

• $\int k dt = kt$

• $\int kT \cdot e^{kt} dt = \cancel{kT} \cdot \frac{e^{kt}}{\cancel{k}} = T \cdot e^{kt}$

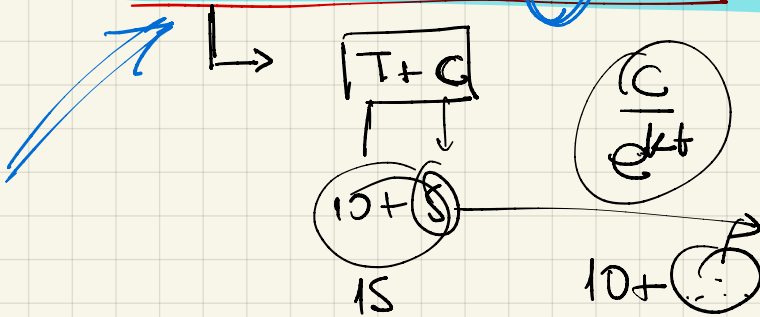
$(e^{kt})' = e^{kt} \cdot k$
 $\left(\frac{1}{k} e^{kt}\right)' = \frac{1}{k} e^{kt} \cdot k = e^{kt}$

(1) : $\theta(t) = e^{-kt} [c + T \cdot e^{kt}] \Rightarrow$

$\Rightarrow \theta(t) = c \cdot e^{-kt} + T \cdot e^{kt} \cdot e^{-kt}$

$(e^{kt})' = e^{kt} \cdot (kt)' = k e^{kt}$
 $(e^{f(x)})' = e^{f(x)} \cdot f'(x)$

$\Rightarrow \theta(t) = T + c \cdot e^{-kt} \quad (2)$



$e^{-x} = \frac{1}{e^x}$

(3) Αρχικά ορίζουμε την αρχική συνθήκη $\theta(t=0) = 3T$.

(2) : $\theta(t=0) = T + c = 3T \Rightarrow c = 3T - T = 2T$

τη γικά $\theta(t) = T + \underbrace{2T}_C \cdot e^{-kt}$ ← ΓΙΝΕΤΑΙ ΛΥΣΗ

(*) $\theta(t=10) = T + 2T \cdot e^{-10k} = 2T \Rightarrow$

$\Rightarrow 2T \cdot e^{-10k} = 2T - T = T$

$\Rightarrow 2 \cancel{T} \cdot e^{-10k} = \cancel{T} \Rightarrow 2 \cdot e^{-10k} = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow e^{-10k} = \frac{1}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow e^{-10k} = e^{\ln(1/2)} \Rightarrow$

$\Rightarrow -10k = \ln(1/2) \Rightarrow$

$\Rightarrow -10k = \ln 1 - \ln 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 10k = \ln 2 \Rightarrow k = \frac{\ln 2}{10}$

$x = e^{\ln x}$

$e^a = e^b \Rightarrow a = b$

$\ln A - \ln B = \ln(A/B)$

Αρα $\theta(t) = T + 2T e^{-\frac{\ln 2}{10} \cdot t}$

Επομένως $\theta(t=20) = T + 2T \cdot e^{-\frac{\ln 2}{10} \cdot 20} = T + 2T \cdot e^{-2 \ln 2}$

$\theta(t=20) = T + 2T \cdot \frac{1}{4} = \frac{3T}{2}$

$\lim_{t \rightarrow \infty} \theta(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(T + 2T \cdot e^{-\frac{\ln 2}{10} \cdot t} \right) =$

$= T$

Σίμα $\lim_{t \rightarrow \infty} 2T \cdot e^{-\frac{\ln 2}{10} \cdot t} \rightarrow 0$

~~$\theta(t) = T + 2T \cdot e^{-kt}$~~

$-2 \cdot \ln 2 = \ln 2^{-2} = \ln\left(\frac{1}{2^2}\right) = \ln(1/4)$
 $e^{\ln(1/4)} = \frac{1}{4}$
 $e^{\ln x} = x$