ΑΣΚΗΣΗ

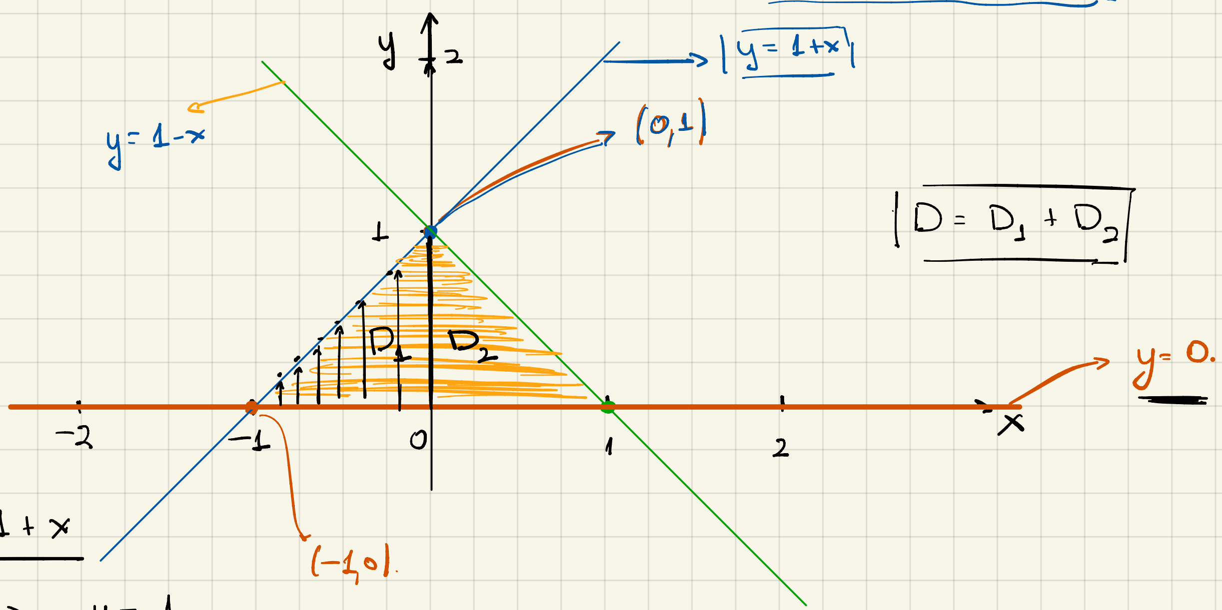
Να υπολογιστεί το διπλό ολοκλήρωμα $I = \iint_D x\,dx\,dy$,

όπου D το σύνολο που φράσσεται από τις $y = 1 - |x|$ και $\boxed{y = 0}$.

$y = 1 - |x|$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} y = 1 - x \\ y = 1 + x \end{cases}$

ΓΕΝ. ΕΞ. ΕΥΘΕΙΑΣ

$y = ax + b$



$\boxed{D = D_1 + D_2}$

$y = 1 + x$

$x = 0 \rightarrow y = 1$

$x = -1 \rightarrow y = 0.$

$y = 1 - x.$

$x = 0 \rightarrow y = 1$

$x = 1 \rightarrow y = 0$

$$I_1 = \iint_{D_1} x\,dx\,dy =$$

$$= \int_{-1}^{0}\int_{0}^{1+x} x\,dy\,dx = \int_{-1}^{0} x \boxed{\int_{0}^{1+x} dy}\,dx =$$

$$= \int_{-1}^{0} x \left(y\Big|_{0}^{1+x} \right) dx = \int_{-1}^{0} x(1+x)\,dx =$$

$$= \int_{-1}^{0} x + x^2\,dx = \int_{-1}^{0} x\,dx + \int_{-1}^{0} x^2\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{0} + \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{0} =$$

$$= \left(0 - \frac{(-1)^2}{2}\right) + \left(0 - \frac{(-1)^3}{3}\right) = \boxed{-\frac{1}{2} + \frac{1}{3}} = \boxed{-\frac{1}{6}}$$

$$I_2=\iint_{D_2} x\,dx\,dy = \int_0^1\int_0^{1-x} x\;dy\;dx =$$

$$= \int_0^1 x \int_0^{1-x} dy\;dx = \int_0^1 x\; y\Big|_0^{1-x} dx = \int_0^1 x\,(1-x)\,dx =$$

$$= \int_0^1 x - x^2\,dx = \left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2}-\frac{1}{3} = \boxed{\frac{1}{6}}$$

$$\boxed{I = I_1 + I_2 = -\frac{1}{6}+\frac{1}{6} = 0}$$

ΑΣΚΗΣΗ

Να υπολογίσετε το τριπλό ολοκλήρωμα

$$\iiint_Q x\,(y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz. \qquad \text{όπου} \quad Q=\underbrace{[0,1]}_{x}\times\underbrace{[0,2]}_{y}\times\underbrace{[1,3]}_{z}.$$

$$\int_1^3\int_0^2\int_0^1 x\,(y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz = \int_1^3\int_0^2 (y^2+z^2)\int_0^1 x\,dx\;\;dy\,dz =$$

$$= \int_1^3\int_0^2 (y^2+z^2)\,\underbrace{\frac{x^2}{2}\Big|_0^1}_{=1/2}\,dy\,dz = \frac{1}{2}\int_1^3\int_0^2 (y^2+z^2)\,dy\,dz =$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^3\left[\int_0^2 y^2\,dy + \int_0^2 z^2\,dy\right]dz. =$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^3\left(\frac{y^3}{3}\Big|_0^2 + z^2\,y\Big|_0^2\right)dz. = \frac{1}{2}\int_1^3 \frac{8}{3} + 2z^2\,dz. =$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^3 \frac{8}{3} + 2z^2\, dz = \frac{1}{2}\left[\int_1^3 \frac{8}{3}\, dz + 2\int_1^3 z^2\, dz\right] =$$

$$= \frac{8}{6}\, z\Big|_1^3 + \frac{z^3}{3}\Big|_1^3 = \frac{8}{6}\cancelto{2}{(3-1)} + \frac{1}{3}\left(3^3 - 1^3\right) =$$

$$= \frac{8}{3} + \frac{26}{3} = \boxed{\frac{34}{3}}$$

ΣΥΝΗΘΗΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ

$\boxed{5x + 8 = 0} \rightarrow$ Εξίσωση

$\rightarrow \boxed{x = -\frac{8}{5}} \rightarrow$ Λύση: Η τιμή ή οι τιμές που παίρνει η μεταβλητή που κρύβεται μέσα στην εξίσωση.

$\boxed{\theta(t) = 5t^2 + 3}$

$\rightarrow \boxed{5t^2 + 3 = 10} \Rightarrow \ldots\ldots$

$\rightarrow 5t^2 = 10 - 3 \Rightarrow 5t^2 = 7 \Rightarrow t^2 = \frac{7}{5} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{t_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{7}{5}}} \rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{7}{5}}$ ✓ $\rightarrow$ ΦΥΣΙΚΑ

ΔΙΑΦ. ΕΞΙΣΩΣΗ : $\longrightarrow$ Λύση : Μια συνάρτηση (οικογένεια συναρτήσεων)

ΓΕΝ. ΕΚΦΡΑΣΗ ΜΙΑΣ (Σ.Δ.Ε) :

$$F\left(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)\right) = 0$$

$\rightarrow y(x) = \ldots\ldots\ldots$

$(y(x))^2$

$y^{(2)}(x) = y''$

$\boxed{(\ )' = \frac{d}{dx}}$

π.χ

$\boxed{y' = 2x \cdot y^2}$ ✓ ή $\boxed{y'' + y' + 2y''y' = 0}$

$\boxed{y^{(4)}(x) + 1 = 0}$ ✓

• Τάξη μιας Σ.Δ.Ε : μεγαλύτερη τάξη παραγώγου που εμφανίζεται σε αυτή.

π.χ1 $y'' + 3y' + y = e^{3t}$

→ Ανεξάρτητη μεταβλητή = ?

→ Εξαρτημένη μεταβλητή (Συνάρτηση) = ?

→ Τάξη της Σ.Δ.Ε = ?

Ανεξ. μεταβλητή → t

Εξαρτ. μεταβλητή → $y(t)$

Τάξη ΣΔΕ → 2ης τάξης λόγω της y''

π.χ $\boxed{y''' - y' = 2\cdot \sin x}$

Ανεξ. μεταβλ. : x

Εξαρτ. μεταβλ. : $y(x)$

Τάξη ΣΔΕ : 3ης τάξης Σ.Δ.Ε λόγω της y'''

Επω $(y')^2 - xy' + y = 0$ και η γεν. λύση της

είναι $\boxed{y(x) = cx - c^2}$ οπότε υπάρχει και η λύση

$\boxed{y(x) = \frac{x^2}{4}}$