ΓΕΝΙΚΕΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ – ΠΡΑΞΕΙΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

Έστω $\bar{A} = \underbrace{a_1}\hat{x} + \underbrace{a_2}\hat{y} + \underbrace{a_3}\hat{z}$

Συνιστώσες ενός διανυσματικού μεγέθους ($\bar{A}$).

και $\bar{B} = b_1\hat{x} + b_2\hat{y} + b_3\hat{z}$

→ Μοναδιαία διανύσματα

$(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) \equiv (\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}) \equiv (e_x, e_y, e_z)$

$$\left(\cancel{\bar{A} = a_1\hat{x} + a_2\hat{j}} + a_3 e_z \right)$$

$$= a_1\hat{x} + a_2\hat{y} + a_3\hat{z}$$
$$= a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$$
$$= a_1 e_x + a_2 e_y + a_3 e_z$$

Ισοδύναμα για την παρουσίαση ενός $\bar{A}$ διανυσματικού μεγέθους.

ΜΕΤΡΟ:
$$\begin{cases} |\bar{A}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \\ |\bar{B}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2} \end{cases}$$

• $\boxed{\text{Γινόμενο}}$ ενός διανύσματος με σταθερό όρο: (όπου λ → σταθερή ποσότητα).

$$\lambda\bar{A} = \lambda\cdot(a_1\hat{x} + a_2\hat{y} + a_3\hat{z}) = \underbrace{\lambda a_1\hat{x} + \lambda a_2\hat{y} + \lambda a_3\hat{z}}_{\text{ένα νέο διανυσματικό μέγεθος}}$$

$$\lambda\bar{B} = \lambda(b_1\hat{x} + b_2\hat{y} + b_3\hat{z}) = \underbrace{\lambda b_1\hat{x} + \lambda b_2\hat{y} + \lambda b_3\hat{z}}$$

• ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ – ΔΥΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

→ ΒΑΘΜΩΤΟ ΜΕΓΕΘΟΣ (ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑ)

$$\underbrace{\bar{A}\cdot\bar{B}}_{\text{εσωτερικό γινόμενο.}} = (\boxed{a_1\hat{x}} + a_2\hat{y} + a_3\hat{z})\cdot(b_1\hat{x} + b_2\hat{y} + b_3\hat{z}) =$$

$$= a_1\cdot b_1(\hat{x}\cdot\hat{x}) + a_1 b_2 \cancel{(\hat{x}\cdot\hat{y})}^{0} + a_1 b_3 \cancel{(\hat{x}\cdot\hat{z})}^{0}$$

$$+ \ldots\ldots =$$

$$= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \quad (\text{ΒΑΘΜΩΤΟ ΜΕΓΕΘΟΣ})$$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΠΡΑΞΕΩΝ ΜΟΝΑΔΙΑΙΩΝ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

$\hat{x}\cdot\hat{x} = 1$

$\hat{x}\cdot\hat{y} = 0$

• ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ — ΔΥΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ $(..\times..)$

→ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟ ΜΕΓΕΘΟΣ (ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑ).

$$\overline{A}\times\overline{B} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} =$$

$$= +\hat{x}\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - \hat{y}\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \hat{z}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \hat{x}\left(a_2 b_3 - a_3 b_2\right) - \hat{y}\left(a_1 b_3 - a_3 b_1\right) + \hat{z}\left(a_1 b_2 - a_2 b_1\right)$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥ ΤΕΛΕΣΤΗ ΑΝΑΔΕΛΤΑ

• $\overline{\nabla} f$ → κλίση (δράση του τελεστή σε βαθμωτή συνάρτηση).

Έστω $f(x,y) = k(x^2-y^2)$ όπου k → σταθερά.

$$\overline{\nabla} f = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{z}\right)\left(k(x^2-y^2)\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x^2-y^2)\right)\hat{x} + \frac{\partial}{\partial y}\left(k(x^2-y^2)\right)\hat{y} + \frac{\partial}{\partial z}\left(k(x^2-y^2)\right)\hat{z} =$$

$$= k(2x-0)\hat{x} + k(0-2y)\hat{y} + 0\hat{z} =$$

$$= 2kx\hat{x} - 2ky\hat{y} = \boxed{2k(x\hat{x} - y\hat{y})}$$

Διανυσματική συνάρτηση

$$\overline{g}(x,y) = \begin{cases} 2kx \\ -2ky \end{cases}$$ → συνιστώσες της νέας διανυσματικής συνάρτησης.

Έστω $\bar{g}(x,y) = 2k(x\hat{x} - y\hat{y}) = \underbrace{2kx}\,\hat{x} - \underbrace{2ky}\,\hat{y}$.

Συνιστώσες της νέας διανυσματ. συνάρτησης

Έστω $V(x,y,z) = -A\cdot\left(x^3 + 3xy + \frac{5x}{z}\right)$.

Να βρεθεί η κλίση της $V(x,y,z)$? $\left(\bar{\nabla} V = ?\right)$.

$$\bar{\nabla} V(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-A\left(x^3+3xy+\frac{5x}{z}\right)\right)\hat{x} + \frac{\partial}{\partial y}\left(-A\left(x^3+3xy+\frac{5x}{z}\right)\right)\hat{y}$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z}\left(-A\left(x^3+3xy+\boxed{\frac{5x}{z}}\right)\right)\hat{z} =$$

$5x\cdot z^{-1}$

$$= -A\left(3x^2+3y+\frac{5}{z}\right)\hat{x} - A\left(0+3x+0\right)\hat{y} - A\left(0+0-\frac{5x}{z^2}\right)\hat{z}$$

$$= -A\left[\left(3x^2+3y+\frac{5}{z}\right)\hat{x} + 3x\,\hat{y} - \frac{5x}{z^2}\,\hat{z}\right] \Leftarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{5x}{z}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(5x\cdot z^{-1}\right) = 5x\left(-z^{-2}\right) = \boxed{-\frac{5x}{z^2}}$$

Έστω η διανυσματική συνάρτηση

$$\bar{E}(x,y) = E_0(x-y)\,\hat{x} - E_0(x+y)\,\hat{y} \Leftarrow$$

Να βρεθεί η Απόκλιση και ο Στροβιλισμός της παραπάνω διανυσματικής συνάρτησης?

Απόκλιση: $\bar{\nabla}\cdot\bar{E} = ??$ (Βαθμωτή συνάρτηση.)

Στροβιλισμός: $\bar{\nabla}\times\bar{E} = ??$ (Διανυσματική συνάρτηση)

$$\overline{\nabla}\cdot\overline{E} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{z}\right)\cdot\left(E_0(x-y)\hat{x} - E_0(x+y)\hat{y}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(E_0(x-y)\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(-E_0(x+y)\right) =$$

$$= E_0(1-0) - E_0(0+1) = E_0 - E_0 = 0$$

$$\overline{\nabla}\times\overline{E} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ E_0(x-y) & -E_0(x+y) & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \hat{x}\left(\cancel{\frac{\partial}{\partial y}(0)} - \frac{\partial}{\partial z}\left(\cancel{-E_0(x+y)}\right)\right) - \hat{y}\left(\cancel{\frac{\partial}{\partial x}(0)} - \cancel{\frac{\partial}{\partial z}\left(E_0(x-y)\right)}\right) +$$

$$+ \hat{z}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(-E_0(x+y)\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(E_0(x-y)\right)\right) =$$

$$= \hat{x}(0-0) - \hat{y}(0-0) + \hat{z}\left(-E_0 - E_0(-1)\right) =$$

$$= +\hat{z}\left(-E_0 + E_0\right) = 0$$

(Το διανυσματικό μέγεθος είναι αστρόβιλο)

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

·Έστω $\bar{E} = 3Ax^2\,\hat{x} + 3Ay\,\hat{y} + 5Axyz\,\hat{z}$.

Να βρεθεί η Απόκλιση και ο Στροβιλισμός του Διανυσματικού πεδίου?

Απόκλιση $\to \bar{\nabla}\cdot\bar{E}$, Στροβιλισμός $\to \bar{\nabla}\times\bar{E}$

$$\bar{\nabla}\cdot\bar{E} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{z}\right)\cdot\left(3Ax^2\,\hat{x} + 3Ay\,\hat{y} + 5Axyz\,\hat{z}\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(3Ax^2)\,\cancel{(\hat{x}\cdot\hat{x})}^{1} + \frac{\partial}{\partial y}(3Ay) + \frac{\partial}{\partial z}(5Axyz) =$$

$$= 3A\cdot 2x + 3A\cdot 1 + 5Axy =$$

$$= 6Ax + 3A + 5Axy = \boxed{A(6x+3+5xy)}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

$\hat{x}\cdot\hat{x} = |\hat{x}|\,|\hat{x}|\cdot\cos\theta$ (θ: μεταξύ τους γωνία)

$\boxed{\hat{x}\,//\,\hat{x}} \to \theta = 0$

ενώ

$\boxed{\hat{x}\perp\hat{y}\perp\hat{z}} \to \theta = \pi/2$

$\to$ όπως και $\hat{y}\,//\,\hat{y}$, $\hat{z}\,//\,\hat{z}$

$\hat{x}\cdot\hat{x} = 1\cdot 1\,\cancel{\cos(0)}^{1} = 1$

ενώ

$\hat{x}\cdot\hat{y} = 1\cdot 1\,\cancel{\cos(\pi/2)}^{0} = 0$

$$\bar{\nabla}\times\bar{E} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 3Ax^2 & 3Ay & 5Axyz \end{vmatrix} =$$

$$= \hat{x}\begin{vmatrix} \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 3Ay & 5Axyz \end{vmatrix} - \hat{y}\begin{vmatrix} \partial/\partial x & \partial/\partial z \\ 3Ax^2 & 5Axyz \end{vmatrix} + \hat{z}\begin{vmatrix} \partial/\partial x & \partial/\partial y \\ 3Ax^2 & 3Ay \end{vmatrix} =$$

$$= \hat{x}\,(5Axz - 0) - \hat{y}\,(5Ayz - 0) + \hat{z}\,(0 - 0) =$$

$$= \boxed{5Axz\,\hat{x} - 5Ayz\,\hat{y}} \neq 0$$

Άρα όχι συντηρητικό / διατηρητικό ή αστρόβιλο.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Αν $f(x,y,z) = 3x^2y - y^3z^2$, να υπολογιστεί η κλίση στο σημείο $P(1,-2,1)$.

$$\overline{\nabla} f = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{z}\right) f = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2y - y^3z^2)\,\hat{x} +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y}(3x^2y - y^3z^2)\,\hat{y} + \frac{\partial}{\partial z}(3x^2y - y^3z^2)\,\hat{z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \overline{\nabla} f = 6xy\,\hat{x} + (3x^2 - 3y^2z^2)\,\hat{y} + (-2y^3z)\,\hat{z}$$

$$\overline{\nabla} f_{P(1,-2,1)} = 6\cdot 1\cdot(-2)\,\hat{x} + \left(3\cdot 1 - 3\,(-2)^2\cdot 1\right)\hat{y} - 2\,(-2)^3\cdot 1\,\hat{z}$$

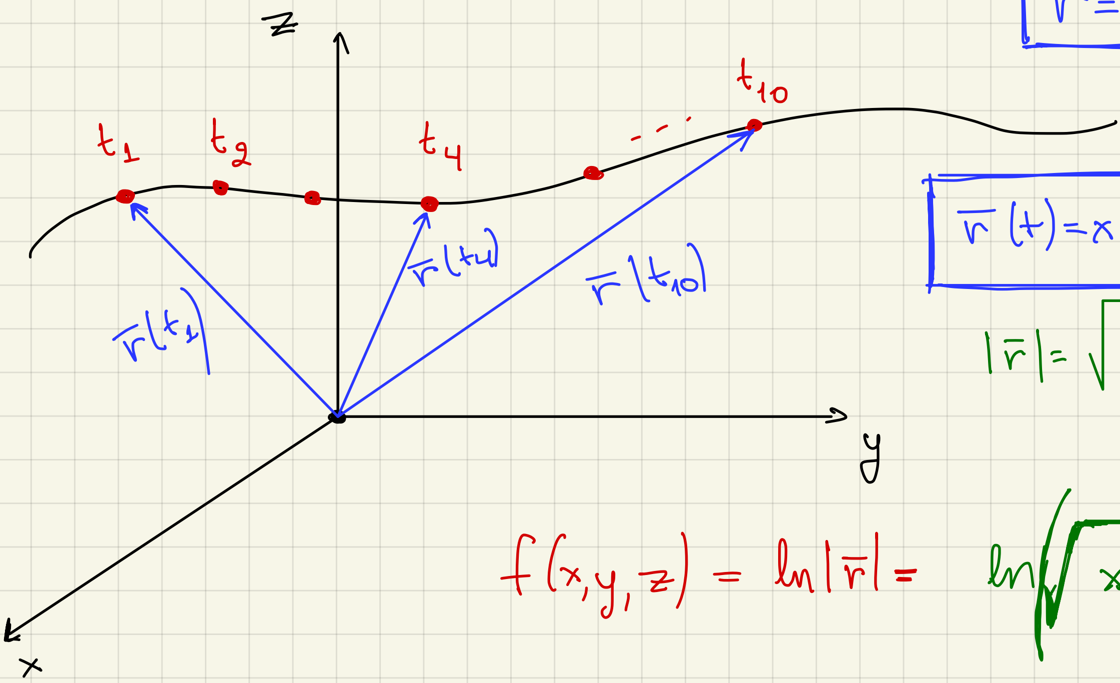
$$= -12\hat{x} + (3-12)\,\hat{y} + 16\,\hat{z} =$$

$$= \boxed{-12\hat{x} - 9\hat{y} + 16\,\hat{z}}$$

Έστω $f(x,y,z) = \ln|\overline{r}|$ όπου $\overline{r}$ διάνυσμα θέσης.

Να υπολογιστεί η κλίση της f.

$$\boxed{\overline{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}}$$



$$\boxed{\overline{r}(t) = x(t)\,\hat{x} + y(t)\,\hat{y} + z(t)\,\hat{z}}$$

$$|\overline{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$f(x,y,z) = \ln|\overline{r}| = \ln\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)$$

$$f(x,y,z) = \ln|\bar{r}| = \ln\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right) = \ln\left(x^2+y^2+z^2\right)^{1/2} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2+z^2\right)$$

$$\bar{\nabla} f = \boxed{\frac{\partial f}{\partial x}}\hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{z} =$$

$$= \frac{x}{x^2+y^2+z^2}\hat{x} + \boxed{\text{- - - - -}}\hat{y} + \boxed{\text{- - - - - -}}\hat{z}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2+z^2\right)\right] = \cancel{\frac{1}{2}\ln(2x)}$$

$$= \cancel{\frac{1}{2}}\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)}\cdot\cancel{2}x \Rightarrow$$

$$\boxed{\left[\ln f(x)\right]' = \frac{1}{f(x)}\cdot f'(x)}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{x^2+y^2+z^2}$$

$\frac{\partial f}{\partial y}$ και $\frac{\partial f}{\partial z}$.