1) Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int xe^x dx$.

Λύση:

Εδώ μπορούμε να δούμε το e^x σαν παράγωγο του εαυτού του οπότε θα έχουμε $\int xe^x dx = \int x(e^x)' dx = xe^x - \int x' e^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + c$.

2) Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int (x^2+3x-2)e^x dx$.

Λύση:

$$\int (x^2+3x-2)e^x dx = \int (x^2+3x-2)(e^x)' dx = (x^2+3x-2)e^x - \int (x^2+3x-2)' e^x dx =$$
$$= (x^2+3x-2)e^x - \int (2x+3)e^x dx = (x^2+3x-2)e^x - \int (2x+3)(e^x)' dx =$$
$$= (x^2+3x-2)e^x - \left[(2x+3)e^x - \int (2x+3)' e^x dx\right] = (x^2+3x-2)e^x - (2x+3)e^x + \int 2e^x dx =$$
$$(x^2+3x-2)e^x - (2x+3)e^x + 2e^x + c = (x^2+x-3)e^x + c.$$

Παρατήρηση: Γενικά μπορούμε να λάβουμε σαν κανόνα ότι όπου συναντάμε πολυωνυμική επί εκθετική μας συμφέρει να θεωρούμε την εκθετική σαν παράγωγο.

3) Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int (3x^2+4x-1)\ln x dx$.

Λύση:

Σε αντίθεση με το προηγούμενο θα θεωρήσουμε σαν παράγωγο την πολυωνυμική αφού, βέβαια βρούμε πρώτα συνάρτηση που την έχει παράγωγο. Στην συγκεκριμένη περίπτωση η συνάρτηση x^3+2x^2-x έχει παράγωγο την $3x^2+4x-1$.

$$\int (3x^2+4x-1)\ln x dx = \int (x^3+2x^2-x)' \ln x dx = (x^3+2x^2-x)\ln x - \int (x^3+2x^2-x)(\ln x)' dx =$$

$$= (x^3+2x^2-x)\ln x - \int (x^3+2x^2-x)\frac{1}{x} dx = (x^3+2x^2-x)\ln x - \int (x^2+2x-1) dx =$$

$$= (x^3 + 2x^2 - x)\ln x - \left(\frac{x^3}{3} + x^2 - x\right) + c\ .$$

<u>Παρατήρηση:</u> Γενικά μπορούμε να λάβουμε σαν κανόνα ότι όπου συναντάμε πολυωνυμική επί λογαριθμική μας συμφέρει να θεωρούμε την πολυωνυμική σαν παράγωγο.

4) Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int \ln x dx$.

<u>Λύση:</u>

$$\int \ln x dx = \int 1 \cdot \ln x dx = \int (x)' \ln x dx = x\ln x - \int x(\ln x)' dx = x\ln x - \int 1 dx = x\ln x - x + c\ .$$

<u>Παρατήρηση:</u> Πολλές φορές ενώ δεν υπάρχει γινόμενο θεωρούμε σαν παράγοντα τη μονάδα και αυτή σαν την παράγωγο του x, κλασικό παράδειγμα είναι αυτό της ολοκλήρωσης του λογαρίθμου.

5) Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int \ln^3 x dx$.

<u>Λύση:</u>

$$\int \ln^3 x dx = \int (x\ln x - x)' \ln^2 x dx = (x\ln x - x)\ln^2 x - \int (x\ln x - x)\left(\ln^2 x\right)' dx =$$

$$= (x\ln x - x)\ln^2 x - 2\int (x\ln x - x)\ln x \cdot \frac{1}{x} dx = (x\ln x - x)\ln^2 x - 2\int (\ln x - 1)\ln x dx =$$

$$= x\ln^3 x - x\ln^2 x - 2\int \ln^2 x dx + 2\int \ln x dx\ .$$

Αλλά $\int \ln^2 x dx = \int (x)' \ln^2 x dx = x\ln^2 x - \int x\left(\ln^2 x\right)' dx = x\ln^2 x - 2\int x\ln x \cdot \frac{1}{x} dx =$

$$= x\ln^2 x - 2\int \ln x dx$$

Άρα $\int \ln^3 x dx = x\ln^3 x - x\ln^2 x - 2\int \ln^2 x dx + 2\int \ln x dx =$

$$= x\ln^3 x - x\ln^2 x - 2\left(x\ln^2 x - 2\int \ln x dx\right) + 2\int \ln x dx =$$

$$= x\ln^3 x - x\ln^2 x - 2x\ln^2 x + 4\int \ln x dx + 2\int \ln x dx =$$

$$= x\ln^3 x - x\ln^2 x - 2x\ln^2 x + 6\int \ln x dx$$

Αλλά $\int \ln x dx = \int (x)' \ln x dx = x\ln x - \int x(\ln x)' dx = x\ln x - \int 1 dx = x\ln x - x + c$.

Άρα $\int \ln^3 x dx == x\ln^3 x - x\ln^2 x - 2x\ln^2 x + 6\left(x\ln x - x\right) + c$.

6) Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα Ι=$\int e^{ax} \cdot \sin(bx) dx$.

<u>Λύση:</u>

$$\mathrm{I}=\int \left(\frac{e^{ax}}{a}\right)' \cdot \sin(bx) dx = \frac{e^{ax}}{a} \cdot \sin(bx) - \int \frac{e^{ax}}{a} \cdot \left(\sin(bx)\right)' dx = \frac{e^{ax}}{a} \cdot \sin(bx) - \int \frac{e^{ax}}{a} \cdot b\cos(bx) dx =$$

$$= \frac{e^{ax}}{a} \cdot \sin(bx) - \frac{b}{a}\int e^{ax} \cdot \cos(bx) dx = \frac{e^{ax}}{a} \cdot \sin(bx) - \frac{b}{a}\int \left(\frac{e^{ax}}{a}\right)' \cdot \cos(bx) dx =$$

$$= \frac{e^{ax}}{a} \cdot \sin(bx) - \frac{b}{a}\left[\frac{e^{ax}}{a} \cdot \cos(bx) - \int \frac{e^{ax}}{a} \cdot \left(\cos(bx)\right)' dx\right] =$$

$$= \frac{e^{ax}}{a} \cdot \sin(bx) - \frac{b}{a^2} e^{ax} \cdot \cos(bx) - \frac{b^2}{a^2}\int e^{ax} \cdot \sin(bx) dx = \frac{e^{ax}}{a} \cdot \sin(bx) - \frac{b}{a^2} e^{ax} \cdot \cos(bx) - \frac{b^2}{a^2} \cdot \mathrm{I}\ .$$

Άρα $\mathrm{I} = \frac{e^{ax}}{a} \cdot \sin(bx) - \frac{b}{a^2} e^{ax} \cdot \cos(bx) - \frac{b^2}{a^2} \cdot \mathrm{I} \Leftrightarrow \left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right)\mathrm{I} = \frac{e^{ax}}{a} \cdot \sin(bx) - \frac{b}{a^2} e^{ax} \cdot \cos(bx) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \mathrm{I} = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}\left(a \cdot \sin(bx) - b \cdot \cos(bx)\right).$$

<u>Παρατήρηση:</u> Γενικά μπορούμε να λάβουμε σαν κανόνα ότι όπου συναντάμε εκθετική επί τριγωνομετρική μας συμφέρει να θεωρούμε την εκθετική (ή την

τριγωνομετρική) σαν παράγωγο και εφαρμόζοντας δυο φορές παραγοντική ολοκλήρωση (στην ίδια) να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα χρησιμοποιώντας την εξίσωση που θα προκύψει.

7) Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα K=$\int \sec^3 x dx$.

<u>Λύση:</u>

K=$\int \sec^3 x dx = \int \sec x \cdot \sec^2 x dx = \int \sec x \cdot (\tan x)' dx =$

$$= \sec x \cdot \tan x - \int (\sec x)' \cdot \tan x dx = \sec x \cdot \tan x - \int \sec x \cdot \tan^2 x dx =$$

$$= \sec x \cdot \tan x - \int \sec x \cdot (\sec^2 x - 1) dx = \sec x \cdot \tan x - \int \sec^3 x dx + \int \sec x dx =$$

$$= \sec x \cdot \tan x - \mathrm{K} + \log(\sec x + \tan x).$$

Άρα $\mathrm{K} = \sec x \cdot \tan x - \mathrm{K} + \log(\sec x + \tan x) \Leftrightarrow \mathrm{K} = \frac{1}{2}\left(\sec x \cdot \tan x + \log(\sec x + \tan x)\right) + c$.

<u>Παρατήρηση:</u> sec(x)=cos(x)/sin(x)

8) Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα L=$\int \cos(\ln x) dx$.

<u>Λύση:</u>

$\int \cos(\ln x) dx = \int (x)' \cos(\ln x) dx = x\cos(\ln x) - \int x\left(\cos(\ln x)\right)' dx =$

$$= x\cos(\ln x) + \int x \sin(\ln x)(\ln x)' dx = x\cos(\ln x) + \int \sin(\ln x) dx =$$

$$= x\cos(\ln x) + \int (x)' \sin(\ln x) dx = x\cos(\ln x) + x\sin(\ln x) - \int x\left(\sin(\ln x)\right)' dx =$$

$$= x\cos(\ln x) + x\sin(\ln x) - \int \cos(\ln x) dx.$$

Άρα $\mathrm{L} = x\cos(\ln x) + x\sin(\ln x) - \mathrm{L} \Leftrightarrow \mathrm{L} = \frac{x}{2}\left(\cos(\ln x) + \sin(\ln x)\right) + c$.

9) Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int e^{3x+2}dx$.

Λύση:

Θέτουμε u = 3x + 2, έχουμε $\frac{du}{dx}$ = 3 ή du = 3dx.

Άρα $\int e^{3x+2}dx = \frac{1}{3}\int e^{u}du = \frac{1}{3}e^{u} + c = \frac{1}{3}e^{3x+2} + c$.

Παρατήρηση 1: Το ολοκλήρωμα δεν αλλάζει αν στη μεταβλητή προστεθεί σταθερός αριθμός, δηλαδή $\int f(x)dx = \int f(x+b)dx$.

Μπορούμε να το δείξουμε εύκολα αν θέσουμε u = x+b.

Παρατήρηση 2: Αν πολλαπλασιάσουμε τη μεταβλητή κατά μία σταθερά το ολοκλήρωμα διαιρείται με αυτή τη σταθερά, δηλαδή $\int f(ax)dx = \frac{1}{a}\int f(u)du$.

Μπορούμε να το δείξουμε εύκολα αν θέσουμε u = αx, τότε $\frac{du}{dx}$ = α.

Άρα $\int f(ax)dx = \int f(u)\frac{du}{a} = \frac{1}{a}\int f(u)du$.

Συνδυάζοντας τα δύο προηγούμενα έχουμε:

$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}\int f(u)du$, όπου u = αx+b.

Σύμφωνα με αυτό μπορούμε άμεσα να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα του παραδείγματος 1.

10) Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int 6x^{2}(x^{3}+2)^{10}dx$.

Λύση:

Εδώ έχουμε βέβαια πολυωνυμική αλλά είναι χρονοβόρο να αναπτύξουμε το διώνυμο. Θα δοκιμάσουμε με αντικατάσταση.

Θέτουμε u = $x^3 + 2$, έχουμε $\frac{du}{dx}$ = $3x^2$ ή du = $3x^2$dx.

Άρα $\int 6x^2(x^3+2)^{10}dx = \int 2u^{10}du = \frac{2}{11}u^{11} + c = \frac{2}{11}(x^3+2)^{11} + c$.

11) Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int \frac{1}{5x-7}dx$.

Λύση:

Θέτουμε u = 5x - 7, έχουμε $\frac{du}{dx}$ = 5 ή du = 5dx.

Άρα $\int \frac{1}{5x-7}dx = \int \frac{1}{u}\frac{du}{5} = \frac{1}{5}\int \frac{1}{u}du = \frac{1}{5}\ln|u| + c = \frac{1}{5}\ln|5x-7| + c$.

12) Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int \frac{x}{x^2+7}dx$.

Λύση:

Θέτουμε u = $x^2 + 7$, έχουμε $\frac{du}{dx}$ =2x ή du = 2xdx.

$\int \frac{x}{x^2+7}dx = \int \frac{1}{u}\frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}du = \frac{1}{2}\ln|u| + c = \frac{1}{2}\ln(x^2+7) + c$.

Παρατήρηση: Μπορούμε να θεωρήσουμε ως κανόνα ότι το ολοκλήρωμα ενός πηλίκου του οποίου ο αριθμητής είναι η παράγωγος του παρονομαστή είναι ίσο με το λογάριθμο του παρονομαστή. Δηλαδή $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + c$

Το αποτέλεσμα αυτό είναι άμεσο αν θέσουμε u=f(x), τότε $\frac{du}{dx}$ = f '(x) ή du = f '(x)dx.

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \int \frac{f'(x)dx}{f(x)} = \int \frac{1}{u}du = \ln|u| + c = \ln|f(x)| + c\,.$$

13) Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int \frac{1}{x\ln x}dx$.

<u>Λύση:</u>

$$\int \frac{1}{x\ln x}dx = \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}dx = \int \frac{(\ln x)'}{\ln x}dx = \ln|\ln x| + c\,.$$

14) Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}dx$.

<u>Λύση:</u>

Θέτω $u = \sqrt[6]{x} = x^{\frac{1}{6}}$ οπότε $du = \left(x^{\frac{1}{6}}\right)' dx = \frac{1}{6}x^{-\frac{5}{6}}dx \Leftrightarrow dx = 6u^5 du$.

Άρα $\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}dx = \int \frac{6u^5}{u^3+u^2}du = 6\int \frac{u^3}{u+1}du = 6\int\left(u^2 - u + 1 - \frac{1}{u+1}\right)du =$

$$= 2u^3 - 3u^2 + 6u - \ln|u+1| + c = 2x^{\frac{1}{2}} - 3x^{\frac{1}{3}} + 6x^{\frac{1}{6}} - \ln(x^{\frac{1}{6}} + 1) + c\,.$$

Στο επόμενο παράδειγμα χρησιμοποιούμε συνδυασμό των μεθόδων ολοκλήρωσης με αντικατάσταση και παραγοντικής ολοκλήρωσης.

15) Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int x^3 e^{x^2} dx$.

Λύση:

Θέτουμε u = x^2, έχουμε $\frac{du}{dx}$ = 2x ή du = 2xdx ή dx = $\frac{du}{2x}$.

$$\int x^3 e^{x^2} dx = \frac{1}{2}\int x^2 e^u du = \frac{1}{2}\int ue^u du = \frac{1}{2}\int u(e^u)' du = \frac{1}{2}\left(ue^u - \int u' e^u du\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(ue^u - \int e^u du\right) = \frac{1}{2}\left(ue^u - e^u\right) + c = \frac{1}{2}\left(x^2 e^{x^2} - e^{x^2}\right) + c.$$

16) Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int e^x \cdot \sin(e^x) dx$.

Λύση:

Θέτω $u = e^x$ οπότε $du = e^x dx$.

Άρα $\int e^x \cdot \sin(e^x) dx = \int \sin u du = -\cos u + c = -\cos(e^x) + c$.

17) Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int e^{e^x} \cdot e^x dx$.

Λύση:

Θέτω $u = e^x$ οπότε $du = e^x dx$.

Άρα $\int e^{e^x} \cdot e^x dx = \int e^u du = e^u + c = e^{e^x} + c$.

18) Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$.

Λύση:

Θέτω $u=\sqrt{x}$ οπότε $du=\frac{1}{2\sqrt{x}}dx \Leftrightarrow 2du=\frac{1}{\sqrt{x}}dx$.

Άρα $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx=\int e^{u}\cdot 2du=2e^{u}+c=2e^{\sqrt{x}}+c$.

19) Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int \frac{\ln(\ln x)}{x\ln x}dx$.

Λύση:

Θέτω $u=\ln(\ln x)$ οπότε $du=\frac{1}{\ln x}\cdot(\ln x)'dx=\frac{1}{x\ln x}dx$.

Άρα $\int \frac{\ln(\ln x)}{x\ln x}dx=\int udu=\frac{u^{2}}{2}+c=\frac{\left(\ln(\ln x)\right)^{2}}{2}+c$.

20) Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int \ln(\cos x)\cdot \tan x dx$.

Λύση:

Θέτω $u=\ln(\cos x)$ οπότε $du=\frac{1}{\cos x}(\cos x)'dx=-\tan x dx$.

Άρα $\int \ln(\cos x)\cdot \tan x dx=-\int udu=-\frac{u^{2}}{2}+c=-\frac{\ln^{2}(\cos x)}{2}+c$.

21)

i) Να γραφεί το κλάσμα $\frac{1}{x^{2}-\alpha^{2}}$ ως άθροισμα δύο άλλων κλασμάτων.

ii) Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int \frac{1}{x^{2}-a^{2}}dx$, $\alpha\neq 0$.

Λύση:

i) Έστω $\frac{1}{x^2-a^2}=\frac{1}{(x-a)(x+a)}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x+a}$.

Τότε $\frac{1}{x^2-a^2}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x+a}=\frac{A(x+a)+B(x-a)}{(x-a)(x+a)}=\frac{(A+B)x+aA-aB}{(x-a)(x+a)}$.

Επειδή οι παρονομαστές είναι ίσοι θα έχουμε:

$$(A+B)x+\alpha A-\alpha B = 1$$

για κάθε $x \in R$-$\{-\alpha,\alpha\}$.

Άρα θα ισχύει A+B=0 και αA-αB=1, δηλαδή οι ομοβάθμιοι συντελεστές θα είναι ίσοι.

Από τη λύση του συστήματος των δύο εξισώσεων βρίσκουμε ότι A=$\frac{1}{2a}$ και B= $-\frac{1}{2a}$.

Άρα $\frac{1}{x^2-a^2}=\frac{\frac{1}{2a}}{x-a}+\frac{-\frac{1}{2a}}{x+a}=\frac{1}{2a}\cdot\frac{1}{x-a}-\frac{1}{2a}\cdot\frac{1}{x+a}$

ii) $\int\frac{1}{x^2-a^2}dx=\frac{1}{2a}\int\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right)dx=\frac{1}{2a}\left[\ln|x-a|-\ln|x+a|\right]+c$.

22) Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int\frac{x+1}{x^2+5x+6}dx$.

Λύση:

Ο παρονομαστής γράφεται $x^2 - 5x + 6 = (x+ 3)(x + 2)$.

Αναλύουμε σε απλά κλάσματα

$$\frac{x+1}{x^2+5x+6}=\frac{a}{x+2}+\frac{b}{x+3}=\frac{a(x+3)+b(x+2)}{(x+2)(x+3)}=\frac{(a+b)x+3a+2b}{x^2+5x+6}.$$

Εξισώνουμε τους αριθμητές αφού οι παρονομαστές είναι ίσοι. Επομένως (α+b)x+(3α+2b) = x+1, από όπου προκύπτουν δύο εξισώσεις για τον υπολογισμό των α και b.

Συνεπώς α+b=1, 3α+2b=1, οπότε οι τιμές των παραμέτρων είναι: α=-1, b=2.

Άρα $\frac{x+1}{x^2+5x+6}=\frac{-1}{x+2}+\frac{2}{x+3}$, οπότε για το ολοκλήρωμα έχουμε

$$\int\frac{x+1}{x^2+5x+6}dx=\int\left(\frac{-1}{x+2}+\frac{2}{x+3}\right)dx=-\int\frac{1}{x+2}dx+2\int\frac{2}{x+3}dx=-\ln|x+2|+2\ln|x+3|+c\,.$$

23) Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int\frac{2x^2-10x}{(x+3)(x-1)^2}dx$.

Λύση:

Αναλύουμε σε απλά κλάσματα

$$\frac{2x^2-10x}{(x+3)(x-1)^2}=\frac{a}{x+3}+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{(x-1)^2}=\frac{a(x-1)^2+b(x+3)(x-1)+c(x+3)}{(x+3)(x-1)^2}.$$

Εξισώνουμε τους αριθμητές αφού οι παρονομαστές είναι ίσοι, δηλαδή

α(x -1)^2 + b(x + 3)(x - 1) + c(x + 3) = 2x^2 – 10x⇔

α(x^2 – 2x + 1) + B(x^2 + 2x - 3) + c(x + 3) = 2x^2 – 10x⇔

(α + 5)x^2 + (-2α + 2b + c)x + (α – 3b + 3c) = 2x^2 – 10x

από όπου προκύπτουν τρεις εξισώσεις για τον υπολογισμό των α, b, c

α + b = 2

-2 α + 2b + c = -10

α – 3b + 3c = 0

Οι τιμές των παραμέτρων είναι: α = 3,b = -1, c = -2.

Άρα $\frac{2x^2-10x}{(x+3)(x-1)^2}=\frac{3}{x+3}+\frac{-1}{x-1}+\frac{-2}{(x-1)^2}$.

Για το ολοκλήρωμα έχουμε

$$\int\frac{2x^2-10x}{(x+3)(x-1)^2}dx=3\int\frac{1}{x+3}dx-\int\frac{1}{x-1}dx-2\int\frac{2}{(x-1)^2}dx=3\ln|x+3|-\ln|x-1|+\frac{2}{x-1}+c$$
.

24) Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int\frac{3x+1}{x^3+2x^2+x+2}dx$.

<u>Λύση:</u>

Ο παρονομαστής γράφεται x^3 + 2x^2 + x + 2 = x^2(x + 2) + (x + 2) = (x^2 + 1)(x + 2).

Αναλύουμε σε απλά κλάσματα

$$\frac{3x+1}{x^3+2x^2+x+2}=\frac{\mathrm{A}}{x+2}+\frac{\mathrm{B}x+C}{x^2+1}=\frac{\mathrm{A}(x^2+1)+(\mathrm{B}x+C)(x+2)}{(x+2)(x^2+1)}$$

Εξισώνουμε τους αριθμητές αφού οι παρονομαστές είναι ίσοι

$A(x^2+1)+(Bx+C)(x + 2) =3x + 1 \Leftrightarrow$

$Ax^2 + A + Bx^2 + Cx + 2Bx + 2C = 3x + 1 \Leftrightarrow$

$(A + B)x^2 + (2B + C)x + (A + 2C) = 3x + 1$,

από όπου προκύπτουν τρεις εξισώσεις για τον υπολογισμό των A, B, C

$A + B = 0$

$2B + C = 3$

$A + 2C = 1$

Οι τιμές των παραμέτρων είναι: $A = -1$, $B = 1$, $C = 1$

Άρα $\frac{3x+1}{x^3+2x^2+x+2}=\frac{-1}{x+2}+\frac{x+1}{x^2+1}$, οπότε για το ολοκλήρωμα έχουμε

$$\int\frac{3x+1}{x^3+2x^2+x+2}dx=-\int\frac{1}{x+2}dx+\int\frac{x+1}{x^2+1}dx=-\ln|x+2|+\int\frac{x}{x^2+1}dx+\int\frac{1}{x^2+1}dx=$$

$$=-\ln|x+2|+\frac{1}{2}\int\frac{(x^2+1)'}{x^2+1}dx+\int\frac{1}{x^2+1}dx=-\ln|x+2|+\frac{1}{2}\ln|x^2+1|+\arctan(x)+c\,.$$

25) Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int\frac{x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-2x}dx$.

<u>Λύση:</u>

Παραγοντοποιούμε τον παρονομαστή: $2x^3+3x^2-2x = x(2x-1)(x+2)$.

Βρίσκουμε A, B, C τέτοια ώστε: $\frac{x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-2x}=\frac{\mathrm{A}}{x}+\frac{\mathrm{B}}{2x-1}+\frac{C}{x+2}$.

Εύκολα βρίσκουμε ότι A$=\frac{1}{2}$, B$=\frac{1}{5}$, C$=-\frac{1}{10}$. Άρα

$$\int \frac{x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-2x}dx = \int\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2x-1}-\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{x+2}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x| + \frac{1}{10}\ln|2x-1| - \frac{1}{10}\ln|x+2| + c\,.$$

26) Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int \frac{1}{x(x^2+1)}dx$.

<u>Λύση:</u>

$\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+1} \Leftrightarrow a=1,\ \ b=-1,\ \ c=0$.

Άρα $\int \frac{1}{x(x^2+1)}dx = \int \frac{1}{x}dx - \int \frac{x}{x^2+1}dx = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln|x^2+1| + c$.

27) Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}dx$.

<u>Λύση:</u>

Θέτω $u=\sqrt{1+e^x}$ οπότε $du = \left(\sqrt{1+e^x}\right)' dx = \frac{e^x}{2\sqrt{1+e^x}}dx \Leftrightarrow dx = \frac{2u}{u^2-1}du$.

Άρα $\int \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}dx = \int \frac{1}{u}\cdot\frac{2u}{u^2-1}du = \int \frac{2}{(u-1)(u+1)}du = \int \frac{1}{u-1}du - \int \frac{1}{u+1}du =$

$$= \ln|u-1| - \ln|u+1| + c = \ln(\sqrt{1+e^x}-1) - \ln(\sqrt{1+e^x}+1) + c\,.$$

28) Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int \frac{1}{1+e^x}dx$.

<u>Λύση:</u>

Θέτω $u=e^x$ οπότε $du = e^x dx \Leftrightarrow dx = \frac{1}{u}du$.

Άρα $\int \frac{1}{1+e^x}dx = \int \frac{1}{u(u+1)}du = \int \frac{1}{u}du - \int \frac{1}{(u+1)}du = \ln|u| - \ln|u+1| + c =$

$$\ln e^x - \ln(e^x+1) + c = x - \ln(e^x+1) + c.$$

29) Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}dx$.

Λύση:

Θέτουμε u = e^x, οπότε: $\int \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{1+u}} \cdot \frac{1}{u}du$

Θέτουμε $t = \sqrt{1+u}$, οπότε:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}dx = \int \frac{2t}{t(t^2-1)}dt = \int \frac{2}{(t-1)(t+1)}dt = \int \frac{1}{t-1}dt - \int \frac{1}{t+1}dt =$$

$$= \ln|t-1| - \ln|t+1| + c = \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + c = \ln\left|\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}\right| + c.$$

30) Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int \frac{1}{x^2+a^2}dx$.

Λύση:

Θέτω $u = \frac{x}{a}$ οπότε $du = \frac{1}{a}dx \Leftrightarrow dx = adu$.

Άρα

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}dx = \int \frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}dx = \frac{1}{a^2}\int \frac{1}{1+u^2}adu = \frac{1}{a}\tau o\xi\varepsilon\varphi(u) + c = \frac{1}{a}\tau o\xi\varepsilon\varphi(\frac{x}{a}) + c.$$

31) Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int \frac{x^3+x}{x-1}dx$.

Λύση:

$$\int \frac{x^3+x}{x-1}dx = \int\left(x^2+x+2+\frac{2}{x-1}\right)dx = \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x+2\ln|x-1|+c\,.$$

32) Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int \frac{1}{1+\sqrt{1+x}}dx$.

Λύση:

Θέτω $u=\sqrt{1+x}$ οπότε $du=(\sqrt{1+x})'dx=\frac{1}{2\sqrt{1+x}}dx=\frac{1}{2u}dx \Leftrightarrow dx=2udu$.

Άρα $\int \frac{1}{1+\sqrt{1+x}}dx=\int\frac{2u}{u+1}du=\int\frac{2u+2}{u+1}du-\int\frac{2}{u+1}du=2\int du-2\int\frac{1}{u+1}du=$

$$=2u-2\ln|u+1|+c=2\sqrt{x+1}-2\ln\left(1+\sqrt{x+1}\right)+c\,.$$

33) Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int \frac{\sqrt{x+4}}{x}dx$.

Λύση:

Θέτουμε $u=\sqrt{x+4} \Leftrightarrow u^2=x+4 \Leftrightarrow x=u^2-4$. Τότε dx = 2udu.

Άρα $\int\frac{\sqrt{x+4}}{x}dx=\int\frac{u}{u^4-4}2udu=2\int\frac{u^2}{u^4-4}du=2\int\left(1+\frac{4}{u^4-4}\right)du=$

$$=2\int du+8\int\frac{1}{u^2-4}du=2u+8\int\frac{1}{(u-2)(u+2)}du=2u+2\ln\left|\frac{u-2}{u+2}\right|+c=$$

$$=2\sqrt{x+4}+2\ln\left|\frac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x+4}+2}\right|+c\,.$$

34) Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int \frac{x^4}{x^2-9}dx$.

<u>Λύση:</u>

Εδώ ο βαθμός του αριθμητή είναι μεγαλύτερος από το βαθμό του παρονομαστή οπότε εκτελούμε την διαίρεση $x^4 = (x^2 - 9)(x^2 + 9) + 81$.

Άρα το ολοκλήρωμα γίνεται

$$\int \frac{x^4}{x^2-9}dx = \int (x^2+9)dx + 81\int \frac{1}{x^2+9}dx = \frac{x^3}{3} + 9x + 27\arctan\left(\frac{x}{3}\right) + c.$$

35) Υπολογίστε το $\int \sin^5 x \cdot \cos^2 xdx$.

<u>Λύση:</u>

$$\int \sin^5 x \cdot \cos^2 xdx = \int \sin^4 x \cdot \cos^2 x \cdot \sin xdx = \int \left(1-\cos^2 x\right)^2 \cdot \cos^2 x \cdot \sin xdx =$$

$$= -\int \left(1-u^2\right)^2 \cdot u^2 du = -\int (u^2 - 2u^4 + u^6)du = -\left(\frac{u^3}{3} - 2\frac{u^5}{5} + \frac{u^7}{7}\right) + c =$$

$$= -\frac{1}{3}\cos^3 x + \frac{2}{5}\cos^5 x - \frac{1}{7}\cos^7 x + c.$$

36) Υπολογίστε το $\int \cos^3 xdx$.

<u>Λύση:</u>

$$\int \cos^3 xdx = \int \cos^2 x \cdot \cos xdx = \int (1-\sin^2 x)\cdot \cos xdx =$$

$$= \int (1-u^2)du = u - \frac{u^3}{3} + c = \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + c.$$

37) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}dx$.

<u>Λύση:</u>

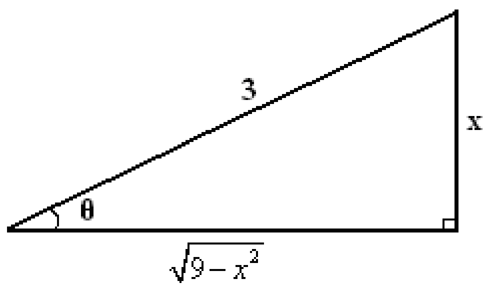
Θέτουμε x=3sinθ, θ$\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

Τότε dx = 3cosθdθ και $\sqrt{9-x^2}=\sqrt{9-9\sin^2\theta}=3|\cos\theta|=3\cos\theta$.

Άρα

$$\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}dx=\int \frac{3\cos\theta}{9\sin^2\theta}\cdot 3\cos\theta d\theta=\int \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}d\theta=\int\left(\frac{1}{\sin^2\theta}-1\right)d\theta=-\frac{1}{\tan\theta}-\theta+c.$$

Για να επιστρέψουμε στη μεταβλητή x, κατασκευάζουμε το διπλανό τρίγωνο βασιζόμενοι στη σχέση x = 3sinθ. Από το τρίγωνο και το πυθαγόρειο θεώρημα προκύπτει ότι: tanθ = $\frac{x}{\sqrt{9-x^2}}$.



Άρα

$$\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}dx=-\frac{\sqrt{9-x^2}}{x}-\sin^{-1}\frac{x}{3}+c.$$

38) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int x\sqrt{1-x^2}dx$.

<u>Λύση:</u>

Θέτω $x=\sin u$ οπότε $dx=\cos u du$.

Άρα $\int x\sqrt{1-x^2}dx=\int \sin u\sqrt{-\sin^2 u}\cos u du=\int \cos^2 u\cdot \sin u du$.

Θέτω $t=\cos u$ οπότε $dt=-\sin u du$.

Άρα

$$\int x\sqrt{1-x^2}\,dx = \int \cos^2 u \cdot \sin u\,du = -\int t^2 dt = -\frac{t^3}{3} + c = -\frac{\cos^3 u}{3} + c = -\frac{[\cos(\arcsin x)]^3}{3} + c$$

.

39) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

<u>Λύση:</u>

Θέτω $x = \sin u$ οπότε $dx = \cos u\,du$.

Άρα $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 u}} \cos u\,du = \int du = u + c = \arcsin(x) + c$.

40) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int x^3\sqrt{1-x^2}\,dx$.

<u>Λύση:</u>

Θέτω $x = \sin u$ οπότε $dx = (\sin u)' du = \cos u\,du$.

Άρα $\int x^3\sqrt{1-x^2}\,dx = \int \sin^3 u\sqrt{1-\sin^2 u}\,\cos u\,du = \int \sin^3 u \cos^2 u\,du =$

$$= \int \sin u(1-\cos^2 u)\cos u\,du = \int \sin u \cos^2 u\,du - \int \sin u \cos^4 u\,du =$$

$$= -\frac{\cos^3 u}{3} + \frac{\cos^5 u}{5} + c = -\frac{\left[\cos\left(\arcsin x\right)\right]^3}{3} + \frac{\left[\cos\left(\arcsin x\right)\right]^5}{5} + c =$$

$$-\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{5}(1-x^2)^{\frac{5}{2}} + c.$$

41) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

<u>Λύση:</u>

Θέτω $x=\sin u$ οπότε $dx=(\sin u)'du=\cos u du$.

Άρα $\int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}dx=\int \frac{\cos u}{\sin u\cdot\sqrt{1-\sin^2 u}}du=\int \frac{\cos u}{\sin u\cdot\cos u}du=\int \frac{1}{\sin u}du=\int \csc u du=$

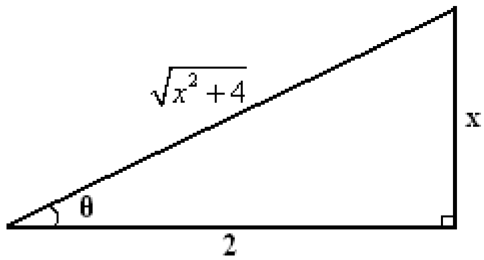
$$=-\ln\left(\csc u+\cot u\right)+c=-\ln\left[\csc\left(\arcsin x\right)+\cot\left(\arcsin x\right)\right]+c=$$

$$=-\ln\left[\frac{1}{x}+\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right]+c\ .$$

42) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+4}}dx$.

<u>Λύση:</u>

Θέτουμε x = 2tanθ, $\theta\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ και έχουμε:



$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+4}}dx=\int \frac{1}{4\cos\theta\cdot\tan^2\theta}d\theta=\frac{1}{4}\int \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}d\theta\ .$$

Θέτουμε u = sinθ και έχουμε:

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+4}}dx=\frac{1}{4}\int \frac{1}{u^2}du=-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{u}=$$

$$=-\frac{1}{4\sin\theta}+c=-\frac{\sqrt{x^2+4}}{4x}+c\ .$$

43) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx$.

<u>Λύση:</u>

Θέτω $x=\tan u$ οπότε $dx=(\tan u)'du=\sec^2 u du$.

Άρα $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx=\int \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 u}}\sec^2 u du=\int \sec u du=\ln\left(\sec u+\tan u\right)+c=$

$$= \ln\left(\sec(\arctan x) + \tan(\arctan x)\right) + c = \ln\left(\sec(\arctan x) + x\right) + c =$$

$$= \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) + c\,.$$

44) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}dx$.

<u>Λύση:</u>

Θέτω $x = \tan u$ οπότε $dx = (\tan u)' du = \sec^2 u du$.

Άρα $\int \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}dx = \int \frac{\sec^2 u}{\tan u\sqrt{1+\tan^2 u}}du = \int \frac{\sec^2 u}{\tan u \sec u}du = \int \csc u du =$

$$= -\ln|\csc u + \cot u| + c = -\ln|\csc\left(\arctan x\right) + \cot\left(\arctan x\right)| + c =$$

$$= -\ln\left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + \frac{1}{x}\right) + c\,.$$

45) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int \sqrt{1+x^2}dx$.

<u>Λύση:</u>

Θέτω $x = \tan u$ οπότε $dx = (\tan u)' du = \sec^2 u du$.

Άρα

$$\int \sqrt{1+x^2}dx = \int \sqrt{1+\tan^2 u}\cdot \sec^2 u du = \int \sec^3 u du = \frac{1}{2}\left[\sec u \cdot \tan u + \ln\left(\sec u + \tan u\right)\right] + c =$$

$$= \frac{1}{2}\left[x + \sqrt{1+x^2} + \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)\right] + c\,.$$

46) Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a}}dx$, α>0.

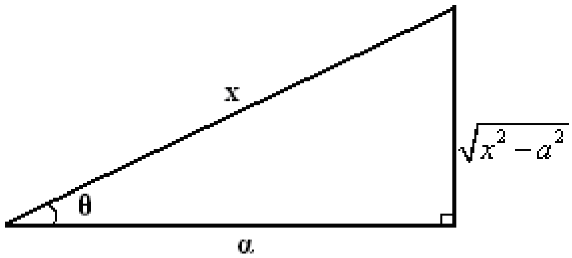
Λύση:

Θέτουμε x = $\dfrac{a}{\cos\theta}$, θ$\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ ή θ$\in\left[\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right)$. Τότε $dx=\dfrac{a}{\cos\theta}\cdot\tan\theta d\theta$

και $\sqrt{x^2-a^2}=\sqrt{a^2\left(\dfrac{1}{\cos^2\theta}-1\right)}=a\,|\tan\theta|=a\tan\theta$.

Άρα $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{x^2-a}}dx=\int\frac{a\dfrac{1}{\cos\theta}\tan\theta}{a\tan\theta}d\theta=\int\frac{1}{\cos\theta}d\theta=\ln\left|\frac{1}{\cos\theta}+\tan\theta\right|+c$.

Για να επιστρέψουμε στη μεταβλητή x, κατασκευάζουμε το παρακάτω τρίγωνο.



Τότε $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{x^2-a}}dx=\ln\left|\frac{x}{a}+\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right|+c=\ln|\,x+\sqrt{x^2-a^2}\,|+c'$.

47) Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx$.

Λύση:

Θέτω $x=\sec u$ οπότε $dx=(\sec u)'du=\sec u\cdot\tan u du$.

Άρα $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx=\int\frac{\sec u\cdot\tan u}{\sqrt{\sec^2 u-1}}du=\int\frac{\sec u\cdot\tan u}{\tan u}du=\int\sec u du=$

$$=\ln\left(\sec(arc\sec x)+\tan(arc\sec x)\right)+c=$$

$$=\ln\left(x+\tan(arc\sec x)\right)+c=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)+c.$$

48) Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx$.

Λύση:

Θέτω $x=\sec u$ οπότε $dx=(\sec u)'du=\sec u\tan u du$.

Άρα

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx=\int \frac{\sec u\cdot\tan u}{\sec u\sqrt{\sec^2 u-1}}du=\int \frac{\sec u\cdot\tan u}{\sec u\cdot\tan u}du=\int du=u+c=arc(\sec(x)+c.$$

49) Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x+\sin x}dx$.

Λύση:

Θέτουμε u = sinx, οπότε:

$$\int \frac{\cos x}{\sin^2 x+\sin x}dx=\int \frac{1}{u^2+u}du=\int \frac{1}{u(u+1)}du=\int\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{u+1}\right)du=\ln\left|\frac{u}{u+1}\right|+c=\ln\left|\frac{\sin x}{1+\sin x}\right|+c$$

.

50) Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int \sec x dx$.

Λύση:

$$\int \sec x dx=\int \frac{1}{\cos x}dx=\int \frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}dx=\int \frac{1}{\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)}dx=$$

$$=\int \frac{\frac{1}{2}\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)}{\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)}dx+\int \frac{\frac{1}{2}\left(-\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)}{\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)}dx=-\ln\left|\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right|+\ln\left|\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right|+c=$$

$$=\dots.=\ln\left|\sec x+\tan x\right|+c.$$

Όμοια $\int \csc x dx = -\ln\left|\csc x + \cot x\right| + c$.

51) Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int \frac{dx}{2+\tan x}$.

<u>Λύση:</u>

Θέτω $x = \tan u$ οπότε $dx = (\tan u)' du = \sec^2 u du$ ή

$x = \arctan u$ οπότε $dx = (\arctan u)' du = \frac{1}{u^2+1} du$.

Άρα $\int \frac{dx}{2+\tan x} = \int \frac{1}{2+u} \cdot \frac{1}{u^2+1} du = \frac{1}{5}\int \frac{1}{2+u} du - \frac{1}{5}\int \frac{u-2}{u^2+1} du =$

$$= \frac{1}{5}\ln|u+2| - \frac{1}{10}\ln|u^2+1| + \frac{2}{5}\arctan u + c =$$

$$= \frac{1}{5}\ln|\tan x+2| - \frac{1}{10}\ln|\tan^2 x+1| + \frac{2}{5} + c.$$

52) Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

<u>Λύση:</u>

Θέτω $u = \frac{x}{a}$ οπότε $du = \frac{1}{a}dx \Leftrightarrow dx = adu$.

Άρα $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} \cdot \frac{1}{a} dx = \frac{1}{a}\int \frac{a}{\sqrt{1-u^2}} du = \arcsin(u) + c = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + c$.

53) Να υπολογισθεί το ορισμένο ολοκλήρωμα $\int_1^3 (3x^2+2)dx$.

Λύση:

Αρκεί να υπολογίσουμε το αόριστο ολοκλήρωμα και στη συνέχεια να αντικαταστήσουμε τα άκρα της ολοκλήρωσης.

$$\int (3x^2+2)dx = x^3+2x+c$$

άρα F(x) = x^3 + 2x συνεπώς

$\int_1^3 (3x^2+2)dx$ = F(3) – F(1) = (3^3 + 2·3) - (1^3 + 2·1) = 33 - 3 = 30.

54) Να υπολογισθεί το ορισμένο ολοκλήρωμα $\int_{-2}^{2}(|x|+|x-1|)dx$.

Λύση:

Ισχύει f(x)=|x|+|x-1|= $\begin{cases} -2x+1 & , \quad x<0 \\ 1 & , \quad 0\le x\le 1 \\ 2x-1 & , \quad x>1 \end{cases}$.

Άρα

$$\int_{-2}^{2} f(x)dx = \int_{-2}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{2} f(x)dx = \int_{-2}^{0}(-2x+1)dx + \int_{0}^{1}1dx + \int_{1}^{2}(2x-1)dx =$$

$$= \left[-x^2+x\right]_{-2}^{0} + 1 + \left[x^2-x\right]_{1}^{2} = 4+2+1+4-2-1+1 = 9\,.$$

55) Να υπολογισθεί το ορισμένο ολοκλήρωμα $\int_1^2 \frac{(2x-1)^2}{\sqrt[3]{x}}dx$.

Λύση:

$$\int_1^2 \frac{(2x-1)^2}{\sqrt[3]{x}}dx = \int_1^2 \frac{4x^2-4x+1}{x^{\frac{1}{3}}}dx = \int_1^2 \left(4x^{\frac{5}{3}} - 4x^{\frac{2}{3}} + x^{-\frac{1}{3}}\right)dx = \left[4\frac{x^{\frac{8}{3}}}{\frac{8}{3}} - 4\frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + \frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}\right]_1^2 =$$

$$= \frac{3}{2}\left(2^{\frac{8}{3}} - 1^{\frac{8}{3}}\right) - \frac{12}{5}\left(2^{\frac{5}{3}} - 1^{\frac{5}{3}}\right) + \frac{3}{2}\left(2^{\frac{2}{3}} - 1^{\frac{2}{3}}\right) = \frac{1}{10}\left(\sqrt[3]{4} - 54\right)$$

56) Να υπολογισθεί το ορισμένο ολοκλήρωμα $\int_1^2 4(3x^2+1)(x^3+x+1)^3dx$.

Λύση:

$$\int_1^2 4(3x^2+1)(x^3+x+1)^3dx = \int_1^2 4(x^3+x+1)'(x^3+x+1)^3dx = \left[\left(x^3+x+1\right)^4\right]_1^2 = 11^4-3^4$$

57) Να υπολογισθεί το ορισμένο ολοκλήρωμα $\int_0^2 \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+8}}dx$.

Λύση:

$$\int_0^2 \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+8}}dx = \int_0^2 \frac{\left(x^2+4x+8\right)'}{2\sqrt{x^2+4x+8}}dx = \left[\sqrt{x^2+4x+8}\right]_0^2 = \sqrt{20}-\sqrt{8} = 2\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)$$

58) Να υπολογισθεί το ορισμένο ολοκλήρωμα $\int_0^1 xe^x dx$.

Λύση:

Έχουμε

$$\int_0^1 xe^x dx = \int_0^1 x(e^x)'dx = \left[xe^x\right]_0^1 - \int_0^1 (x)'e^x dx = (1\cdot e^1 - 0\cdot e^0) - \int_0^1 e^x dx = e - \left[e^x\right]_0^1 =$$

$$= e-(e^1-e^0) = e-e+1 = 1.$$

59) Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_1^{e^2} |f(x)|dx$, αν f(x)=1-lnx.

Λύση:

Ισχύει |f(x)|=$\begin{cases} 1-\ln x & , \quad 0<x\le e \\ \ln x - 1 & , \quad x>e \end{cases}$.

Τότε $\int_1^{e^2} |f(x)|dx = \int_1^e |f(x)|dx + \int_e^{e^2} |f(x)|dx = \int_1^e (1-\ln x)dx - \int_e^{e^2} (1-\ln x)dx$

Αλλά

$$\int_1^e (1-\ln x)dx = \int_1^e 1dx - \int_1^e \ln x dx = [x]_1^e - \int_1^e (x)'\ln x dx = [x]_1^e - \left([x\ln x]_1^e - \int_1^e x(\ln x)'dx\right) =$$

$$= [x]_1^e - \left([x\ln x]_1^e - \int_1^e 1dx\right) = [x]_1^e - [x\ln x]_1^e + [x]_1^e = 2[x]_1^e - [x\ln x]_1^e =$$

$$= 2(e-1) - (e\ln e - \ln 1) = e-2 .$$

Όμοια

$$\int_e^{e^2} (1-\ln x)dx = 2[x]_e^{e^2} - [x\ln x]_e^{e^2} = 2(e^2-e) - (e^2\ln e^2 - e\ln e) = 2e^2 - 2e - 2e^2 + e = -e$$

Άρα $\int_1^{e^2} |f(x)|dx = e-2-(-e) = 2(e-1)$.

60) Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cdot \sin x dx$.

<u>Λύση:</u>

I=

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cdot \sin x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(e^x\right)' \cdot \sin x dx = \left[e^x \cdot \sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cdot (\sin x)'dx = e^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cdot \cos x dx =$$

$$= e^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(e^x\right)' \cdot \cos x dx = e^{\frac{\pi}{2}} - \left(\left[e^x \cdot \cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cdot (\cos x)'dx\right) =$$

$$= e^{\frac{\pi}{2}} + 1 - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cdot \sin x dx = e^{\frac{\pi}{2}} + 1 + \mathrm{I} .$$

Άρα I=$e^{\frac{\pi}{2}}$+1+I ⇔ I=$\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}+1\right)$.

61) Υπολογίστε το $\int_0^{\pi} \sin^2 x dx$.

<u>Λύση:</u>

$$\int_0^{\pi}\sin^2 xdx=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(1-\cos 2x)\,dx=\frac{1}{2}\left[x-\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\pi}=\frac{1}{2}\left(\pi-\frac{1}{2}\sin 2\pi\right)-\frac{1}{2}\left(0-\frac{1}{2}\sin 0\right)=\frac{\pi}{2}$$

.

62) Υπολογίστε το $\int_0^{\pi}\sin^4 xdx$.

<u>Λύση:</u>

$$\int\sin^4 xdx=\int\left(\sin^2 x\right)^2 dx=\int\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx=\frac{1}{4}\int\left(1-2\cos 2x+\cos^2 2x\right)dx=$$

$$=\frac{1}{4}\int\left(1-2\cos 2x+\frac{1}{2}(1+\cos 4x)\right)dx=\frac{1}{4}\int\left(\frac{3}{2}-2\cos 2x+\frac{1}{2}\cos 4x\right)dx=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}x-\sin 2x+\frac{1}{8}\sin 4x\right)+c\,.$$

Άρα $\int_0^{\pi}\sin^4 xdx=\frac{1}{4}\left[\frac{3}{2}x-\sin 2x+\frac{1}{8}\sin 4x\right]_0^{\pi}=\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{2}\pi=\frac{3}{8}\pi$.

63) Υπολογίστε το $\int_0^{\frac{3\sqrt{3}}{2}}\frac{x^3}{\left(4x^2+9\right)^{\frac{3}{2}}}dx$.

<u>Λύση:</u>

Θέτουμε x=$\frac{3}{2}$ tanθ, θ$\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$. Τότε $dx=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$

και $\sqrt{4x^2+9}=\sqrt{9\tan^2\theta+9}=\frac{3}{\cos\theta}$.

Επομένως

$$\int_0^{\frac{3\sqrt{3}}{2}}\frac{x^3}{\left(4x^2+9\right)^{\frac{3}{2}}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\frac{27}{8}\tan^3\theta}{\frac{27}{\cos^3\theta}}d\theta=\frac{3}{16}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin^3\theta}{\cos^2\theta}d\theta=\frac{3}{16}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1-\cos^2\theta}{\cos^2\theta}\sin\theta d\theta\,.$$

Θέτουμε u = cosθ και έχουμε:

$$\int_0^{\frac{3\sqrt{3}}{2}} \frac{x^3}{\left(4x^2+9\right)^{\frac{3}{2}}}dx = -\frac{3}{16}\int_1^{\frac{1}{2}} \frac{1-u^2}{u^2}du = \frac{3}{16}\int_1^{\frac{1}{2}}(1-u^{-2})du = \frac{3}{16}\left[u+\frac{1}{u}\right]_1^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{32}.$$

64) Υπολογίστε το $\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx$.

<u>Λύση:</u>

Θέτουμε x = sint, t$\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. Τότε $dx=(\sin t)'dt=\cos x dt$ και

$\sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-\sin^2 t}=\sqrt{\cos^2 t}=|\cos t|=\cos t$, αφού t$\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ οπότε cost$\geq$0.

Αν x=-1$\Leftrightarrow$ sint = -1$\Leftrightarrow$ t = $-\frac{\pi}{2}$.

Αν x=1$\Leftrightarrow$ sint = 1$\Leftrightarrow$ t = $\frac{\pi}{2}$.

Άρα $\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)dt = \frac{1}{2}\left[t+\frac{1}{2}\sin 2t\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$