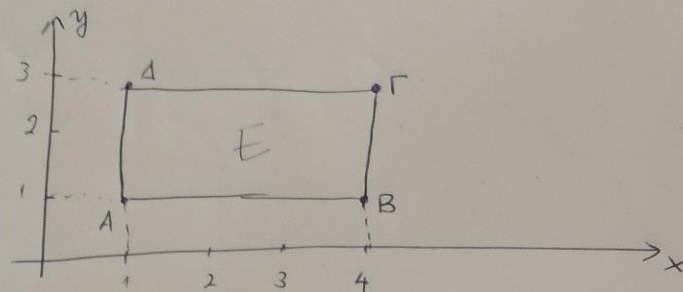


ΑΣΚΗΣΗ 1

Με χρήση διπλού ολοκληρώματος, να βρεθεί το εμβαδόν του παραλληλογράμμου που ορίζεται από τα σημεία $A(1,1)$, $B(4,1)$, $\Gamma(4,3)$ και $\Delta(1,3)$



Το εμβαδόν είναι

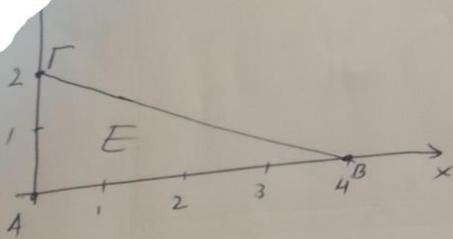
$$E = \int_1^4 \int_1^3 dy dx = \int_1^4 [y]_1^3 dx = \int_1^4 2 dx = 2 [x]_1^4 = 2 \cdot 3 = 6$$

Αν το υπολογίσω με άλλη σειρά ολοκλήρωσης

$$E = \int_1^3 \int_1^4 dx dy = \int_1^3 [x]_1^4 dy = \int_1^3 3 dy = 3 [y]_1^3 = 3 \cdot 2 = 6$$

ΑΣΚΗΣΗ 2

Με χρήση διπλού ολοκληρώματος, να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου που ορίζεται από τα σημεία $A(0,0)$, $B(3,0)$ και $\Gamma(0,2)$



Βρίσκω την εξίσωση της ευθείας $B\Gamma$.
 Είναι της μορφής $y = ax + b$, οπότε πρέπει να βρω τα a και b
 αντικαθιστώντας τα σημεία B και Γ , οπότε

$$\begin{cases} \text{από } B: 0 = 3a + b \\ \text{από } \Gamma: 2 = 0a + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{2}{3} \\ b = 2 \end{cases}$$

Άρα $y = -\frac{2}{3}x + 2$ ή $x = -\frac{3}{2}y + 3$

οπότε

$$E = \int_0^3 \int_{\text{αξονας } x}^{\text{ευθεια } B\Gamma} dy dx = \int_0^3 \int_0^{-\frac{2}{3}x+2} dy dx = \int_0^3 [y]_0^{-\frac{2}{3}x+2} dx =$$

$$\int_0^3 \left(-\frac{2}{3}x + 2\right) dx = -\frac{2}{3} \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^3 + 2[x]_0^3 = -\frac{2}{3} \cdot \frac{9}{2} + 2 \cdot 3 = -3 + 6 = 3$$

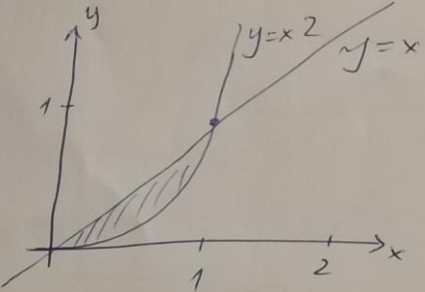
ΑΣΚΗΣΗ 3

Με χρήση διπλού ολοκληρώματος, να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τις καμπύλες $y=x^2$ και $y=x$

1: ΒΡΙΣΚΕ ΤΑ ΣΗΜΕΙΑ ΤΟΜΗΣ

Είναι $x^2 = x \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x-1) = 0 \Leftrightarrow$
 $x=0$ οπότε $y=0$
 $x=1$ οπότε $y=1$ } Τα σημεία τούτων είναι
το $(0,0)$ και το $(1,1)$

ΒΗΜΑ 2: ΣΧΕΔΙΑΖΩ



ΒΗΜΑ 3: ΦΤΙΛΧΝΩ ΤΟ ΔΙΠΛΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

Είναι

$$\int_0^1 \int_{x^2}^x dy dx = \int_0^1 \int_{x^2}^x dy dx = \int_0^1 [y]_{x^2}^x dx = \int_0^1 (x - x^2) dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

ΑΣΚΗΣΗ 4

Με χρήσης διπλού ολοκληρώματος, να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τις καμπύλες $y=x^2$ και $y=5x-6$

Αυτή πρέπει να τη λύσετε μόνοι σας...