ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙ

Φραγκίσκος Κουτελιέρης

Αναπληρωτής Καθηγητής Παν/μίου Πατρών

Επικοινωνία: fcoutelieris@upatras.gr

ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΣΔΕ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΤΑΞΗΣ

Γραμμική διαφορική εξίσωση *n* τάξης, ονομάζεται κάθε διαφορική εξίσωση της μορφής

$$f_n(x)\,y^{(n)}(x)+f_{n-1}(x)\,y^{(n-1)}(x)+\dots$$
$$\dots+f_1(x)\,y'(x)+f_0(x)\,y(x)=\sigma(x)$$

όπου οι συναρτήσεις $f_o(x)$, $f_1(x)$, …, $f_n(x)$, $\sigma(x)$ είναι <u>συνεχείς</u>.

ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΣΔΕ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΤΑΞΗΣ

Η εξίσωση γράφεται στη μορφή

$$y^{(n)}(x)+g_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x)+\ldots+g_1(x)y'(x)+$$
$$+g_0(x)y(x)=h(x)$$

=0

ΟΜΟΓΕΝΗΣ

≠0

ΜΗ ΟΜΟΓΕΝΗΣ

ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΣΔΕ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΤΑΞΗΣ ΜΕ ΣΤΑΘΕΡΕΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ

Αν οι συντελεστές είναι **σταθεροί αριθμοί**, η εξίσωση γράφεται στη μορφή

$$y^{(n)}(x)+\alpha_{n-1}y^{(n-1)}(x)+\ldots+\alpha_1 y'(x)+\alpha_0 y(x)=h(x)$$

ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ ΤΗΣ

$$y^{(n)}(x)+\alpha_{n-1}y^{(n-1)}(x)+\ldots+\alpha_1 y'(x)+\alpha_0 y(x)=h(x)$$

Παίρνω την αντίστοιχη ομογενή

$$y^{(n)}(x)+\alpha_{n-1}y^{(n-1)}(x)+\ldots+\alpha_1 y'(x)+\alpha_0 y(x)=0$$

και κατασκευάζω τη **χαρακτηριστική εξίσωση**

$$\rho^n+\alpha_{n-1}\rho^{n-1}+\ldots+\alpha_2\rho^2+\alpha_1\rho+\alpha_0=0$$

την οποίαν λύνω.

ΛΥΣΕΙΣ

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 1

Αν οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης είναι οι

$\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_\nu \in R$

και είναι διαφορετικές μεταξύ τους, τότε η γενική λύση της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης είναι η

$$\boxed{y_{o\mu}\left(x\right) = c_1 e^{\rho_1 x} + c_2 e^{\rho_2 x} + \ldots + c_n e^{\rho_n x}}$$

με $c_i \in R, i = 1, 2, \ldots, n$

ΛΥΣΕΙΣ

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 2

Αν οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης είναι οι

$$\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_\lambda \in R$$

με πολλαπλότητα κ_1, κ_2, …, κ_λ αντίστοιχα, τότε η γενική λύση της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης είναι η

.

$$\boxed{y_{o\mu}(x) = e^{\rho_1 x} P_1(x) + e^{\rho_2 x} P_2(x) + \ldots + e^{\rho_\lambda x} P_\lambda(x)}$$

όπου τα πολυώνυμα $P_i(x)$ με i =1,2,…,λ είναι βαθμών κ_1-1, κ_2-1 , …, κ_λ-1, αντίστοιχα.

ΛΥΣΕΙΣ

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 3

Αν η χαρακτηριστική εξίσωση έχει και μιγαδική ρίζα της μορφής *α+βi* με πολλαπλότητα *κ*, τότε θα έχει και τον συζυγή του, οπότε ο αντίστοιχος όρος της λύσης θα είναι

$$\boxed{e^{\alpha x}\left[\Pi(x)\cos(\beta x)+P(x)\sin(\beta x)\right]}$$

.

όπου Π(x) και P(x) είναι πολυώνυμα βαθμού *κ-1*

ΛΥΣΕΙΣ της h(x)

Μορφή συνάρτησης $h(x)$	**Ρίζες χαρακτηριστικής εξίσωσης**	**Μορφή ιδιάζουσας λύσης**
$P_\mu(x)$, πολυώνυμο βαθμού μ	Ο αριθμός 0 δεν είναι ρίζα της εξίσωσης	$\Pi_\mu(x)$, πολυώνυμο βαθμού μ
	Ο αριθμός 0 είναι μια ρίζα της εξίσωσης με πολλαπλότητα s	$x^s\Pi_\mu(x)$
$P_\mu(x)e^{\rho x}$	Ο αριθμός ρ δεν είναι ρίζα της εξίσωσης	$\Pi_\mu(x)\cdot e^{\rho x}$
	Ο αριθμός ρ είναι ρίζα της εξίσωσης με πολλαπλότητα s	$x^s\Pi_\mu(x)e^{\rho x}$
$P_\nu(x)\cos(\beta x)+$, $+Q_\mu(x)\sin(\beta x)$ όπου $P_\nu(x), Q_\mu(x)$, πολυώνυμα βαθμών ν και μ αντίστοιχα	Οι αριθμοί $\pm\beta i$ δεν είναι ρίζες της εξίσωσης	$\Pi_\kappa(x)\cos(\beta x)+$, $+\mathrm{A}_\kappa(x)\sin(\beta x)$ όπου $\kappa=\max\{\nu,\mu\}$
	Οι αριθμοί $\pm\beta i$ είναι ρίζες της εξίσωσης με πολλαπλότητα s	$x^s\left[\Pi_\kappa(x)\cos(\beta x)+\right.$ $\left.+\mathrm{A}_\kappa(x)\sin(\beta x)\right]$, όπου $\kappa=\max\{\nu,\mu\}$.
$e^{\alpha x}\left[P_\nu(x)\cos(\beta x)+\right.$ $\left.+Q_\mu(x)\sin(\beta x)\right]$ όπου $P_\nu(x), Q_\mu(x)$, πολυώνυμα βαθμών ν και μ αντίστοιχα	Οι αριθμοί $\alpha\pm\beta i$ δεν είναι ρίζες της εξίσωσης.	$e^{\alpha x}\left[\Pi_\kappa(x)\cos(\beta x)+\right.$ $\left.+\mathrm{A}_\kappa(x)\sin(\beta x)\right]$ όπου $\kappa=\max\{\nu,\mu\}$
	Οι αριθμοί $\alpha\pm\beta i$ είναι ρίζες της εξίσωσης με πολλαπλότητα s.	$x^s\left[\Pi_\kappa(x)\cos(\beta x)+\right.$ $\left.+\mathrm{A}_\kappa(x)\sin(\beta x)\right]e^{\alpha x}$ όπου $\kappa=\max\{\nu,\mu\}$

Ασκήσεις