ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙ

Φραγκίσκος Κουτελιέρης

Αναπληρωτής Καθηγητής Παν/μίου Πατρών

Επικοινωνία: fcoutelieris@upatras.gr

ΣΔΕ 1ης ΤΑΞΗΣ

Μια διαφορική εξίσωση **πρώτης τάξης** έχει τη μορφή

$$F\left(x, y(x), y'(x)\right) = 0$$

ή τη μορφή

$$y'(x) = f\left(x, y(x)\right)$$

εάν είναι λυμένη ως προς $y'(x)$.

Τεχνικές / Είδη

- χωριζομένων μεταβλητών
- γραμμικές
- Bernulli
- … άλλες.

ΧΩΡΙΖΟΜΕΝΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

Διαφορική εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών λέγεται κάθε εξίσωση της μορφής

$$g(y)\,y' = f(x)$$

$$\begin{aligned}
&g(y)\,y' = f(x) \Leftrightarrow \\
&g(y)\,dy = f(x)\,dx \Leftrightarrow \\
&\int g(y)\,dy = \int f(x)\,dx \Leftrightarrow \\
&y = F(x) + C
\end{aligned}$$

ΓΡΑΜΜΙΚΗ

Γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης ονομάζεται κάθε εξίσωση της μορφής

$$\frac{dy}{dx} + A_L(x)\,y(x) = B_L(x)$$

$$y(x) = e^{-\int A_L(x)dx}\left[c + \int B_L(x)\,e^{\int A_L(x)dx}\,dx\right] =$$

$$= \underbrace{c e^{-\int A_L(x)dx}}_{y_\gamma} + \underbrace{e^{-\int A_L(x)dx}\int B_L(x)\,e^{\int A_L(x)dx}\,dx}_{y_{\iota\delta}}$$

BERNULLI

Διαφορική εξίσωση Bernoulli ονομάζεται κάθε εξίσωση της μορφής

$$\frac{dy}{dx} + A_B(x)\,y = B_B(x)\,y^{\mu}$$

$\mu = 0$

γραμμική

$\mu = 1$

χωριζομένων μεταβλητών

BERNULLI

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της εξίσωσης με $y^{-\mu}$ προκύπτει ότι

$$y^{-\mu}\frac{dy}{dx}+A_B(x)yy^{-\mu}=B_B(x)y^{\mu}y^{-\mu}\Leftrightarrow$$
$$y^{-\mu}\frac{dy}{dx}+A_B(x)y^{1-\mu}=B_B(x)$$

Θέτοντας $\omega(x)=y^{1-\mu}(x)$ είναι $\omega'(x)=(1-\mu)y'(x)y^{-\mu}$, συνεπώς η τελευταία εξίσωση γίνεται

$$\frac{\omega'(x)}{1-\mu}+A_B(x)\omega(x)=B_B(x)$$

η οποία είναι πλέον μια γραμμική διαφορική εξίσωση με $A_L(x)=(1-\mu)A_B(x)$ και $B_L(x)=(1-\mu)B_B(x)$, η οποία αντιμετωπίζεται σύμφωνα με όσα έχουν αναφερθεί προηγούμενα .
Πιο συγκεκριμένα, η λύση της τελευταίας διαφορικής εξίσωσης δίνεται από την έκφραση

$$\omega(x)=e^{-\int A_L(x)dx}\left[c+\int B_L(x)e^{\int A_L(x)dx}dx\right]\Leftrightarrow$$
$$\omega(x)=e^{(\mu-1)\int A_B(x)dx}\left[c+(1-\mu)\int B_B(x)e^{(1-\mu)\int A_B(x)dx}dx\right]$$

οπότε

$$y(x)=\left\{\omega(x)\right\}^{\frac{1}{1-\mu}}=\left\{e^{(\mu-1)\int A_B(x)dx}\left[c+(1-\mu)\int B_B(x)e^{(1-\mu)\int A_B(x)dx}dx\right]\right\}^{\frac{1}{1-\mu}}.$$

Ασκήσεις