



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΠΑΤΡΩΝ
UNIVERSITY OF PATRAS

ΑΝΟΙΚΤΑ ακαδημαϊκά μαθήματα ΠΠ

ΤΙΤΛΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙ**

ΕΝΟΤΗΤΑ: **ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ –
ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ**

ΟΝΟΜΑ ΚΑΘΗΓΗΤΗ: **ΦΡ. ΚΟΥΤΕΛΙΕΡΗΣ**

ΤΜΗΜΑ: **Τμήμα Διαχείρισης Περιβάλλοντος και
Φυσικών Πόρων**

ΑΓΡΙΝΙΟ

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

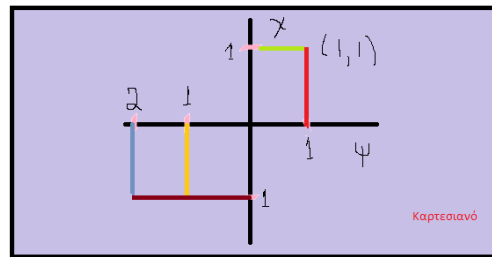
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ II

Φραγκίσκος Κουτελιέρης

Αναπληρωτής Καθηγητής Παν/μίου Πατρών



Επικοινωνία: fcoutelieris@upatras.gr



Περιεχόμενα του μαθήματος

1. Συναρτήσεις δύο μεταβλητών: όριο, συνέχεια, μερικές παράγωγοι, διπλά ολοκληρώματα, επικαμπύλια ολοκληρώματα
2. Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών: όριο, συνέχεια, μερικές παράγωγοι, τριπλά ολοκληρώματα
3. Σειρές
4. Συνήθεις διαφορικές εξισώσεις 1^{ης} τάξης



Επανάληψη

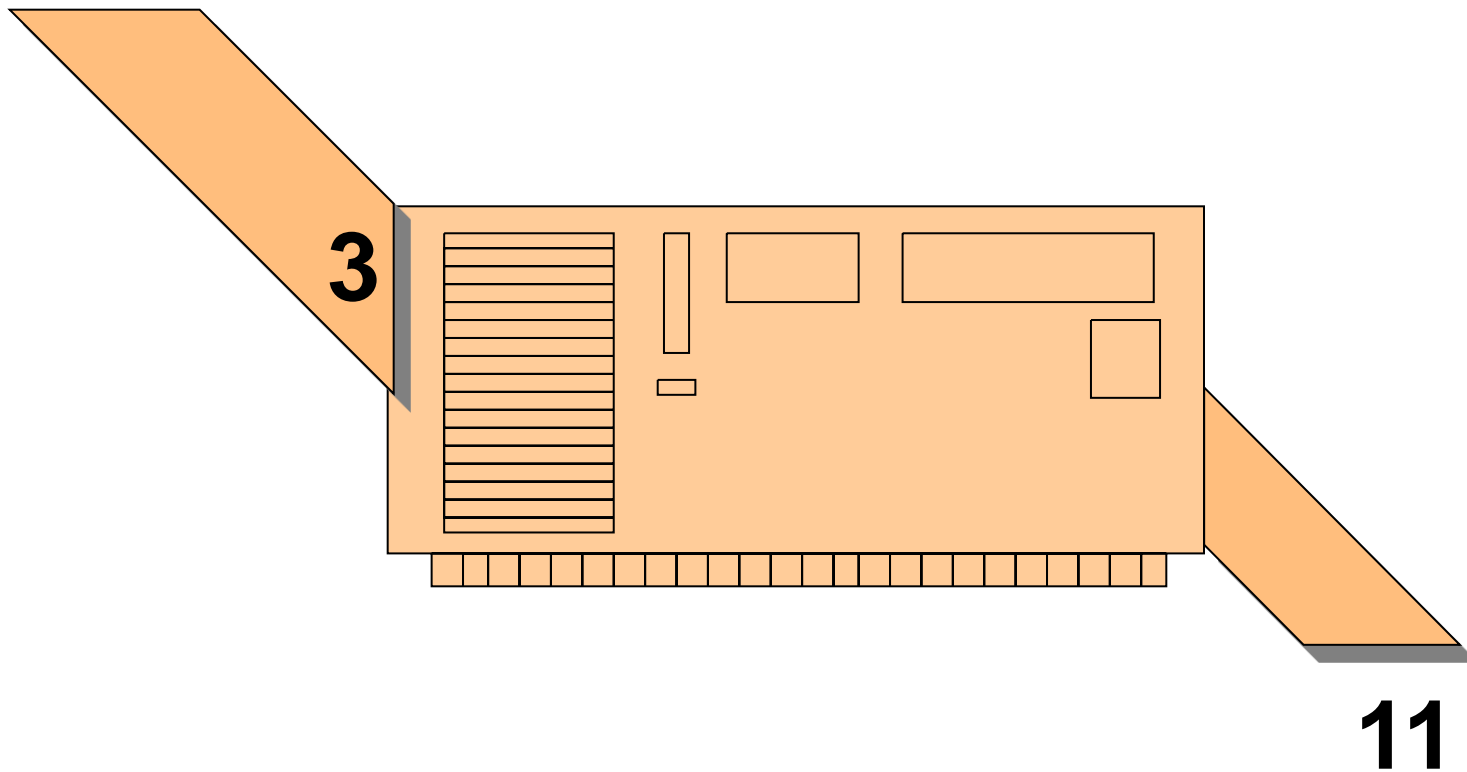
Συναρτήσεις μιας μεταβλητής

- όριο,
- συνέχεια,
- παράγωγοι,
- ολοκληρώματα



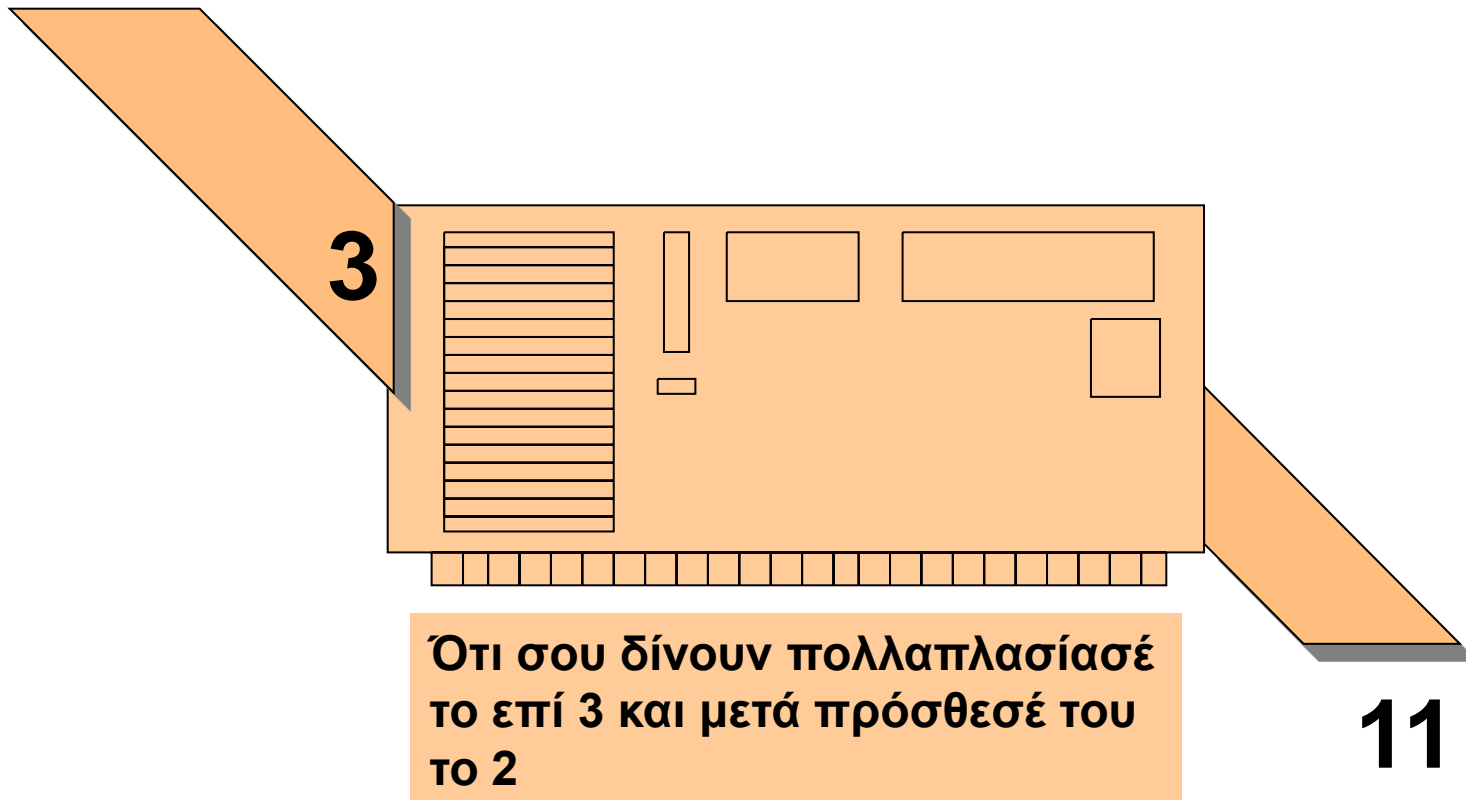
Συνάρτηση $f(x)$

Ας φανταστούμε μια «μηχανή» που της βάζουμε αριθμούς



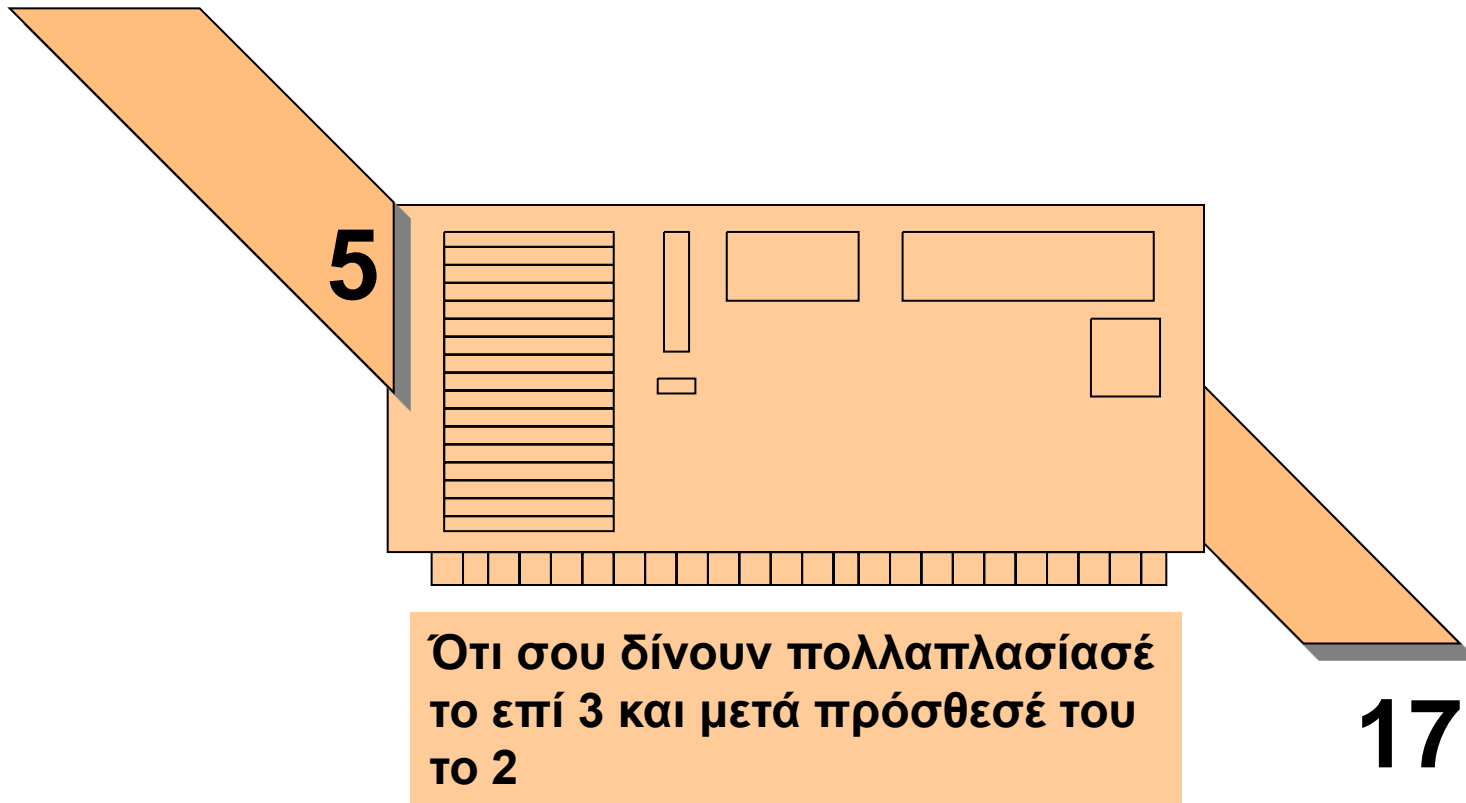
Συνάρτηση $f(x)$

Οι αριθμοί προκύπτουν από κάποιον κανόνα



Συνάρτηση $f(x)$

Ο κανόνας ισχύει για πολλούς αριθμούς



Συνάρτηση $f(x)$

Μετάφραση του κανόνα

Ότι σου δίνουν πολλαπλασιάσε το επί 3 και μετά πρόσθεσέ του το 2

x

\cdot

3

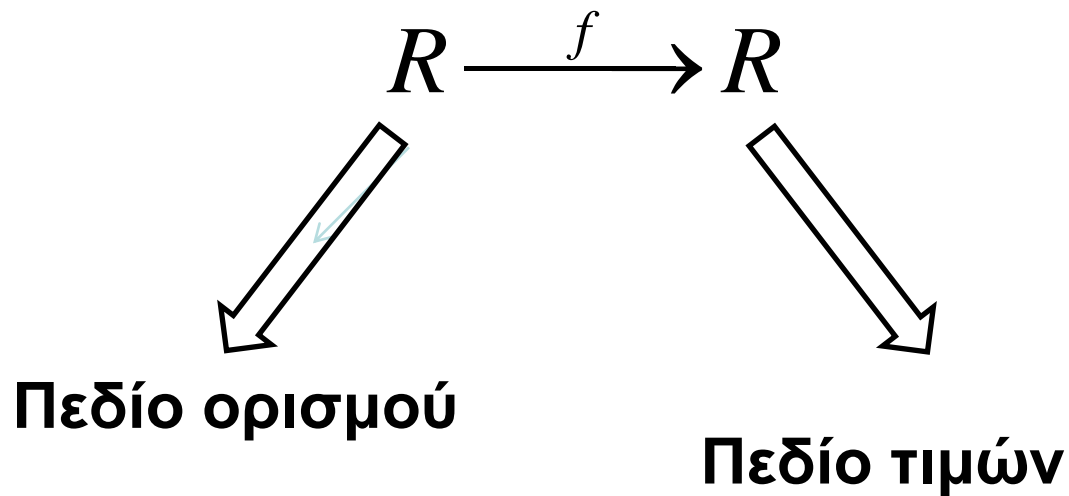
$+$

2

$$f(x) = 3 \cdot x + 2$$



Συνάρτηση $f(x)$



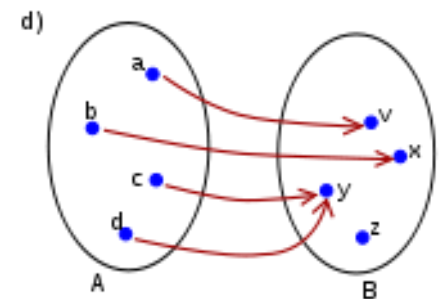
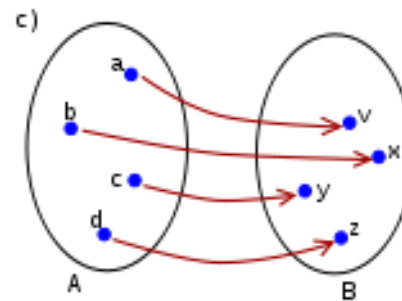
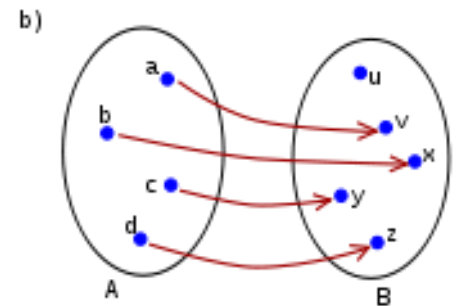
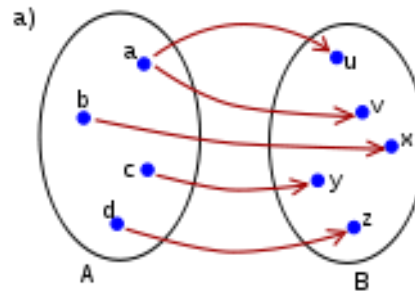
$$Y = f(x)$$

Τύπος



Συνάρτηση $f(x)$

μια αντιστοίχιση μεταξύ
δύο συνόλων κατά την
οποία κάθε ένα στοιχείο
του ενός αντιστοιχίζεται
σε ένα και μόνο στοιχείο
του άλλου



Συνάρτηση $f(x)$

Παράγωγος σε σημείο x_0

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$$



Συνάρτηση $f(x)$

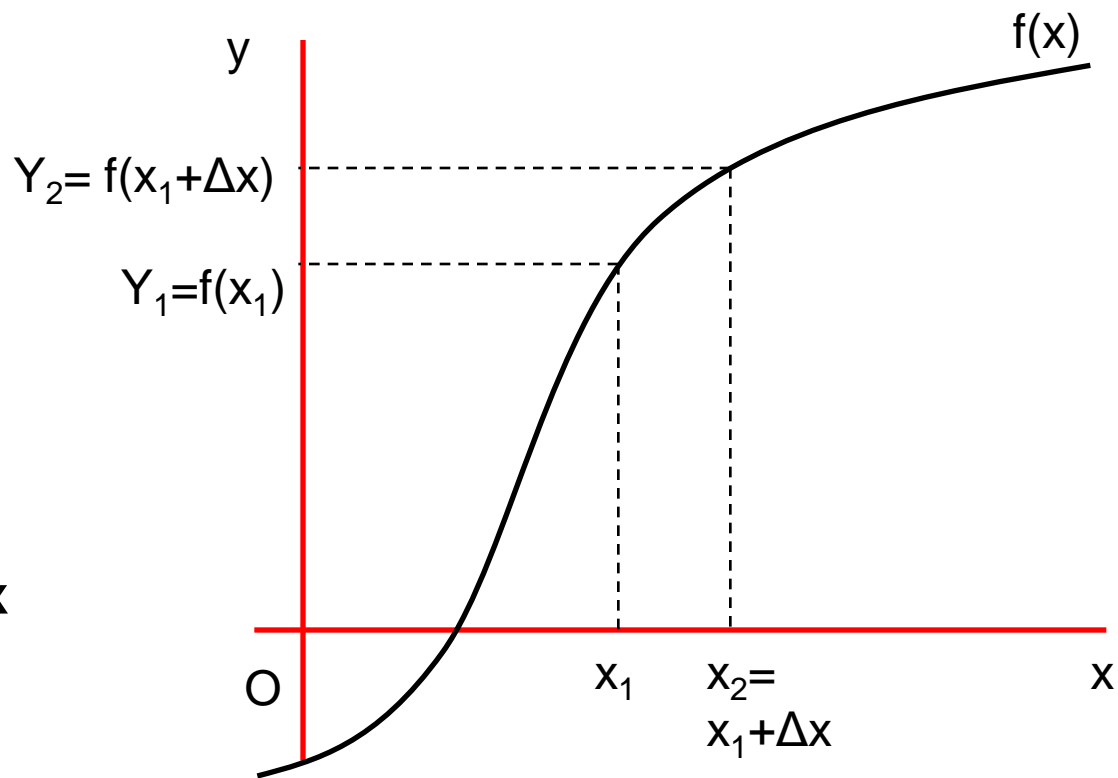
Αν $Y=f(X)$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση του X
οι συμβολισμοί

$$Y', \quad f'(X), \quad \frac{dY}{dX}, \quad \frac{df(X)}{dX}, \quad D_x f(X), \quad D_x Y$$

είναι αποδεκτοί συμβολισμοί της παραγώγου της Y .



Παράγωγος συνάρτησης



Σε κάθε μεταβολή Δx του x στην περιοχή του x_1 αντιστοιχεί μια μεταβολή Δy της συνάρτησης.

$$\left. \begin{array}{l} x = x_1 \rightarrow f(x_1) \\ x_2 = x_1 + \Delta x \rightarrow f(x_1 + \Delta x) \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta y = f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)$$



Συνάρτηση $f(x)$

$$\text{Μέσος ρυθμός μεταβολής} = \frac{\Delta Y}{\Delta X} = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}$$

Η ακρίβεια αυξάνει όσο μειώνεται το διάστημα $X_2 - X_1$.
Του διαστήματος αυτού τείνοντος στο μηδέν ο ρυθμός μεταβολής που υπολογίζουμε είναι ο

$$\text{Απόλυτος ρυθμός μεταβολής} = \frac{dY}{dX} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta Y}{\Delta X}$$



Κανόνες παραγώγισης

$$(af(x) + bg(x))' = af'(x) + bg'(x)$$

$$(f(x)g(x))' = f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

$$\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = \frac{f'(x)}{[f(x)]^2}$$

$$(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$$



Παράγωγος σύνθετης συνάρτησης

$$\frac{dY}{dX} = \frac{dY}{dZ} \cdot \frac{dZ}{dX}$$



Ασκήσεις στις Παραγώγους



Αόριστο ολοκλήρωμα

Η ολοκλήρωση είναι αντίστροφη διαδικασία της παραγωγίσισης

$$\frac{d}{dX} \left(\int f(X) dX \right) = f(X) + c$$



Ορισμένο ολοκλήρωμα

Θεμελιώδες Θεώρημα ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = G(\beta) - G(\alpha)$$

όπου $G'(x) = f(x) \quad \forall x \in [\alpha, \beta]$



Μέθοδος αλλαγής μεταβλητής

$$f'(g(x)) = f(g(x))g'(x)$$

$$\int f(g(x))g'(x)dx = f(g(x)) + c$$



Ολοκλήρωση κατά παράγοντες

$$(f(x)g(x))' = f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$$

$$\int (f(x)g'(x) + f'(x)g(x))dx = f(x)g(x) + c$$



Ολοκλήρωση με απλά κλάσματα

$$\int \frac{P_n(x)}{G_m(x)} dx = \int \frac{P_1(x)}{G_1(x)} dx + \int \frac{P_2(x)}{G_2(x)} dx + \dots + \int \frac{P_p(x)}{G_p(x)} dx$$

όπου $G_1(x)G_2(x)\dots G_p(x) = G_m(x)$



Ασκήσεις στα Ολοκληρώματα



Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την 1^η έκδοση.

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Πατρών, Φραγκίσκος Κουτελιέρης, 2015.

Φραγκίσκος Κουτελιέρης. «ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙ». Έκδοση: 1.0. Αγρίνιο 2015.

Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

<https://eclass.upatras.gr/courses/ENV122/index.php>

Σημείωμα Αδειοδότησης



Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά Δημιουργού, Απαγόρευση Εμπορικής Χρήσης και Όχι Παράγωγα Έργα. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».

Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:

Εικόνα 1: <http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/a/a0/Kugleramme.jpg>

«Το υλικό της παρουσίασης προέρχεται από τις πανεπιστημιακές παραδόσεις του καθηγητή Φρ. Κουτελιέρη».

