ΘΕΜΑ 1

ι) Αν $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$ και I είναι ο αντίστοιχος ταυτοτικός πίνακας, να υπολογιστεί με δύο τρόπους το $(2P-I)^2 = .$

ιι)

Δίνονται $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ και $\Gamma = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$. Να υπολογιστεί η παράσταση $B^T\Gamma + A = .$ (βαθμ. 3)

ΘΕΜΑ 2

Δικαιολογείστε με δύο τρόπους αν ο $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ αντιστρέφεται(δηλαδή αν είναι μη ιδιόμορφος), χωρίς να βρεθεί ο αντίστροφος. Ποιο είναι τότε το συμπέρασμα για τις λύσεις του αντίστοιχου ομογενούς συστήματος $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ (A είναι ο πίνακας των συντελεστών των αγνώστων, $\mathbf{x}$ είναι το διάνυσμα-στήλη των αγνώστων). (βαθμ. 2)

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται το γραμμικό σύστημα $\left\{ \begin{array}{c} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 1 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 3 \\ 4x_1 - 10x_2 + 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 7 \end{array} \right\}$.

ι) Να γραφεί με τη μορφή $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, όπου A είναι ο πίνακας των συντελεστών των αγνώστων και $\mathbf{b}$ είναι το διάνυσμα-στήλη του δεύτερου μέλους.
ιι) Να λυθεί με τη μέθοδο Gauss.
iii) Να λυθεί το αντίστοιχο ομογενές σύστημα και να περιγραφούν οι ιδιότητες του διανυσματικού χώρου των λύσεων. (βαθμ. 2.5)

ΘΕΜΑ 4

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση $y^2(y + xy') = \frac{3}{x}$ με $x \neq 0$, αφού χρησιμοποιήσετε το μετασχηματισμό $y(x) = \frac{w(x)}{x}$. (βαθμ. 2.5)