



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΠΑΤΡΩΝ
UNIVERSITY OF PATRAS

ΑΝΟΙΚΤΑ ακαδημαϊκά
μαθήματα **ΠΠ**

ΤΙΤΛΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ: ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ
ΕΝΟΤΗΤΑ: ΕΙΔΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΑΡΙΘΜ.
ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗΣ – ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ
ΟΝΟΜΑ ΚΑΘΗΓΗΤΗ: ΦΡ. ΚΟΥΤΕΛΙΕΡΗΣ
ΤΜΗΜΑ: Τμήμα Διαχείρισης Περιβάλλοντος
και Φυσικών Πόρων
ΑΓΡΙΝΙΟ

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



Ειδικά θέματα στην παραγωγή

- 1. Μη ισοκατανεμημένα δεδομένα**
- 2. Δεύτερη παράγωγος**
- 3. Μερικές παράγωγοι**

Διάφορες ... Διαφορές

Προς τα εμπρός (forward) $f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$

Προς τα πίσω (backward) $f'(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$

Κεντρικές (central) $f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}))}{x_{i+1} - x_{i-1}}$

Μη ισοκατανεμημένα δεδομένα

Παράδειγμα στο EXCEL

Δεύτερη παράγωγος

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \Delta x f'(x) + \frac{\Delta x^2}{2!} f''(x) + \frac{\Delta x^3}{3!} f'''(x) + \dots +$$

$$f(x - \Delta x) = f(x) - \Delta x f'(x) + \frac{\Delta x^2}{2!} f''(x) - \frac{\Delta x^3}{3!} f'''(x) + \dots + \quad (+)$$

$$f(x + \Delta x) + f(x - \Delta x) = 2f(x) + \Delta x^2 f''(x) \Rightarrow$$

$$f''(x) = \frac{f(x + \Delta x) - 2f(x) + f(x - \Delta x)}{\Delta x^2}$$

Δεύτερη παράγωγος

$$f''(x) = \frac{f(x + \Delta x) - 2f(x) + f(x - \Delta x)}{\Delta x^2}$$

ΓΡΑΦΕΤΑΙ ΜΕ ΜΟΝΑΔΙΚΟ ΤΡΟΠΟ!!!

Μερικές παράγωγοι

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + \Delta x_1, x_2, \dots, x_N) - f(x_1, x_2, \dots, x_N)}{\Delta x_1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = \lim_{\Delta x_2 \rightarrow 0} \frac{f(x_1, x_2 + \Delta x_2, \dots, x_N) - f(x_1, x_2, \dots, x_N)}{\Delta x_2}$$

⋮

Μερικές παράγωγοι

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} \approx \frac{f(x_1 + \Delta x_1, x_2, \dots, x_N) - f(x_1, x_2, \dots, x_N)}{\Delta x_1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} \approx \frac{f(x_1, x_2 + \Delta x_2, \dots, x_N) - f(x_1, x_2, \dots, x_N)}{\Delta x_2}$$

⋮

3. Αριθμητική ολοκλήρωση

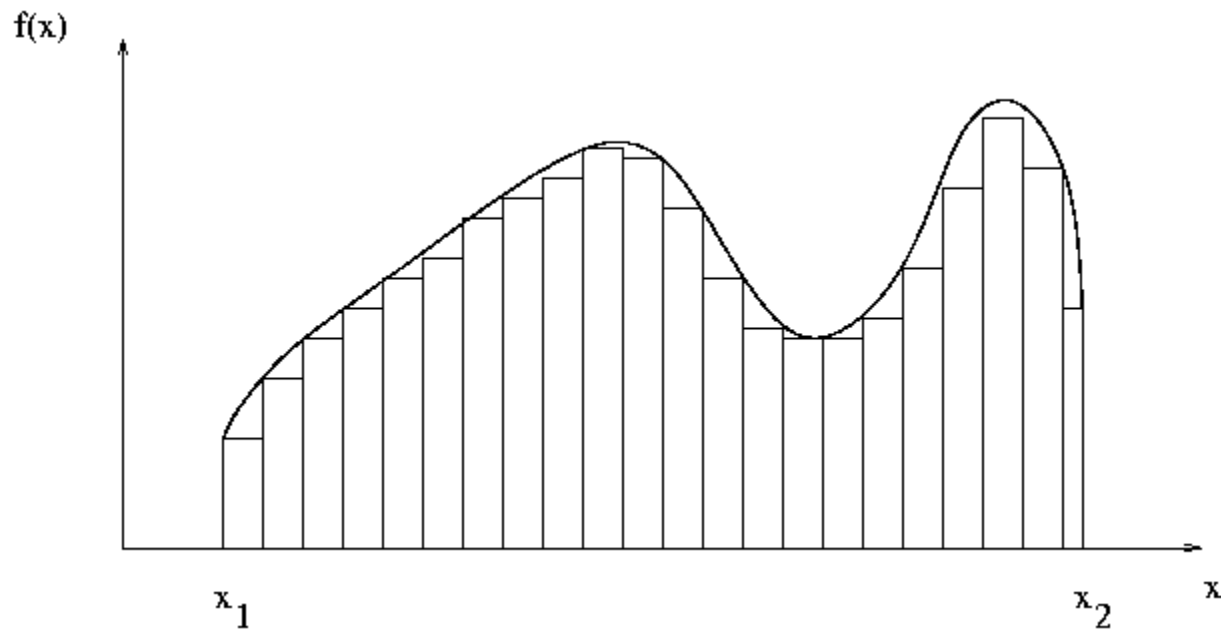
Αριθμητική Ανάλυση

Διακριτοποίηση

Διαμερίζουμε (χωρίζουμε) το πεδίο ορισμού **[a,b]** της συνάρτησης σε ***N***-το-πλήθος υποδιαστήματα, που το καθένα τους έχει μήκος

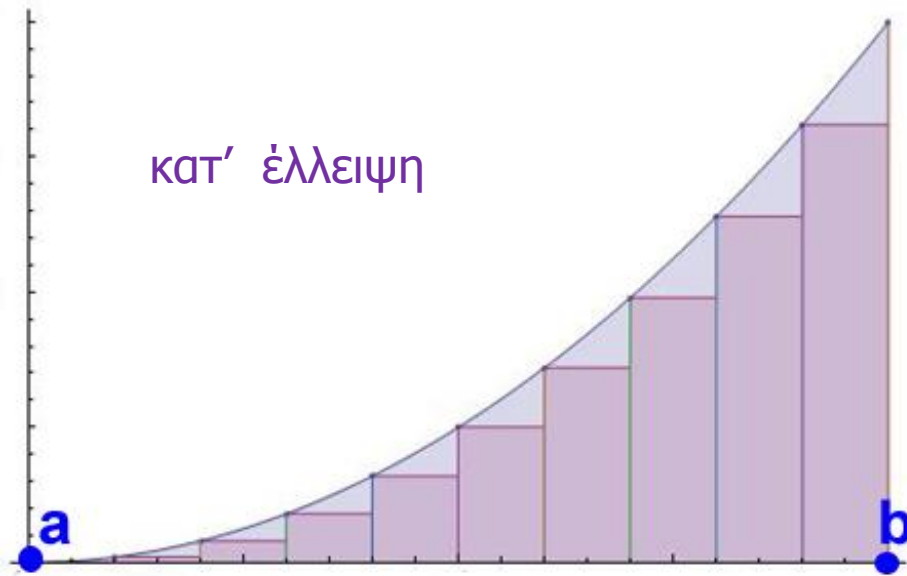
$$h = \frac{|b - a|}{N} = \Delta x$$

Παραλληλόγραμμα



Αριθμητική Ανάλυση

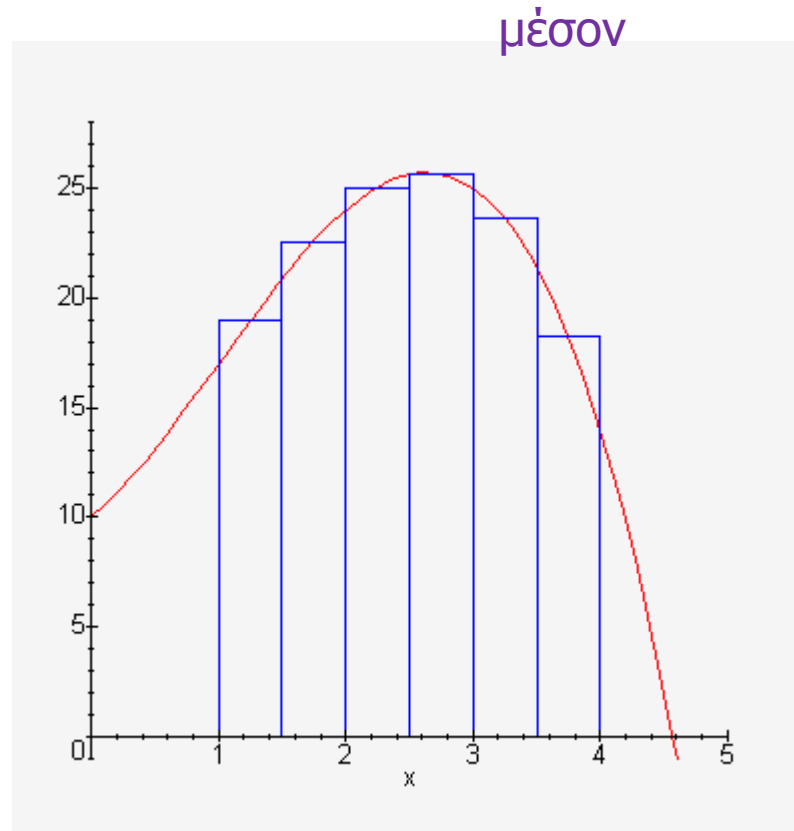
Παραλληλόγραμμα



$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{h \rightarrow 0} \sum hf(x)$$

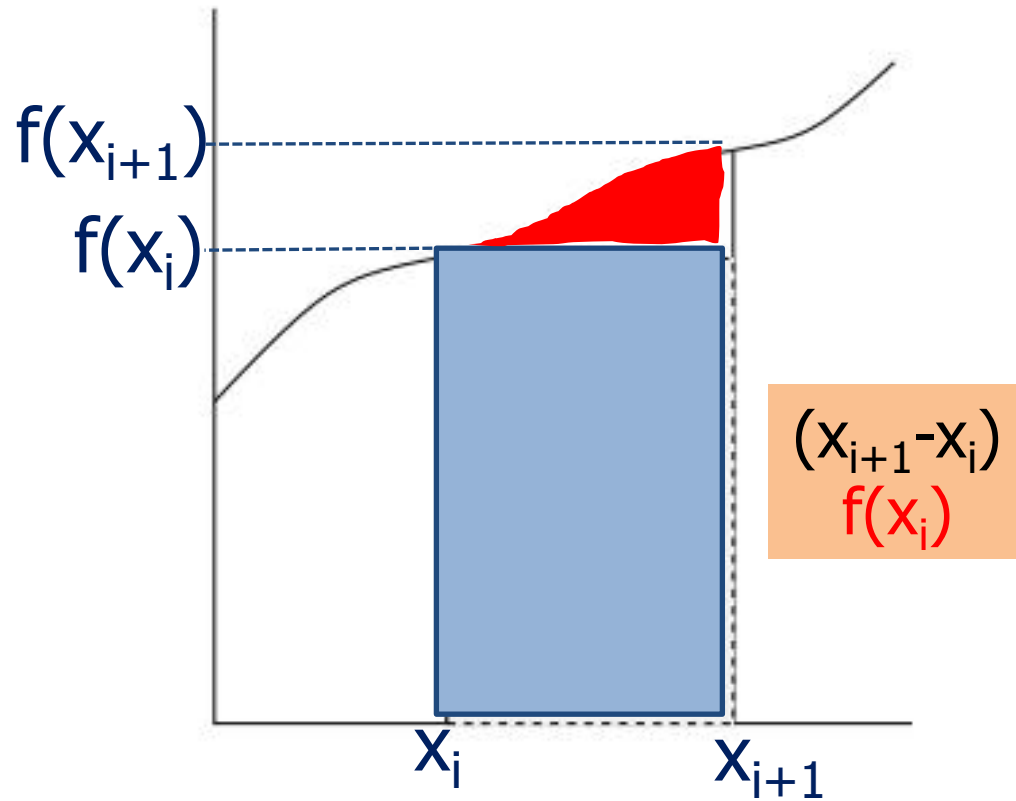
Αριθμητική Ανάλυση

Παραλληλόγραμμα



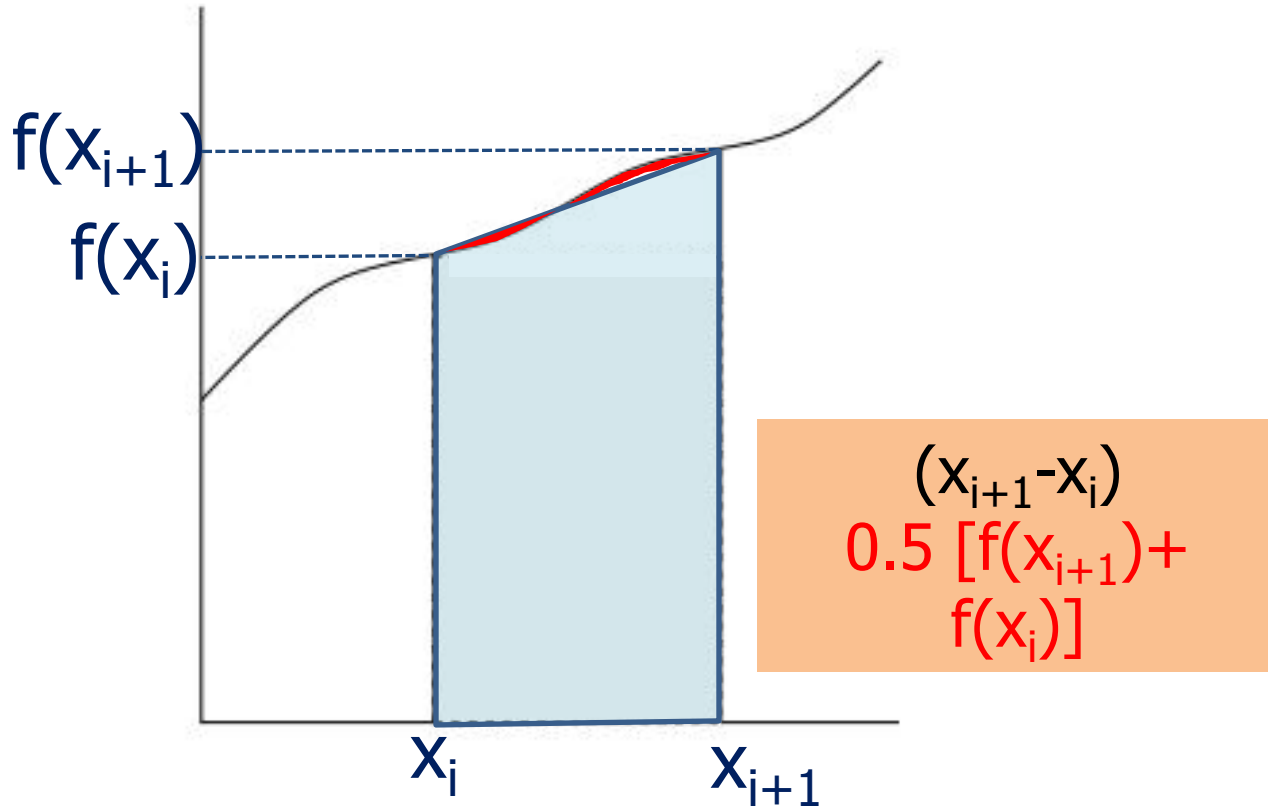
Αριθμητική Ανάλυση

Παραλληλόγραμμα



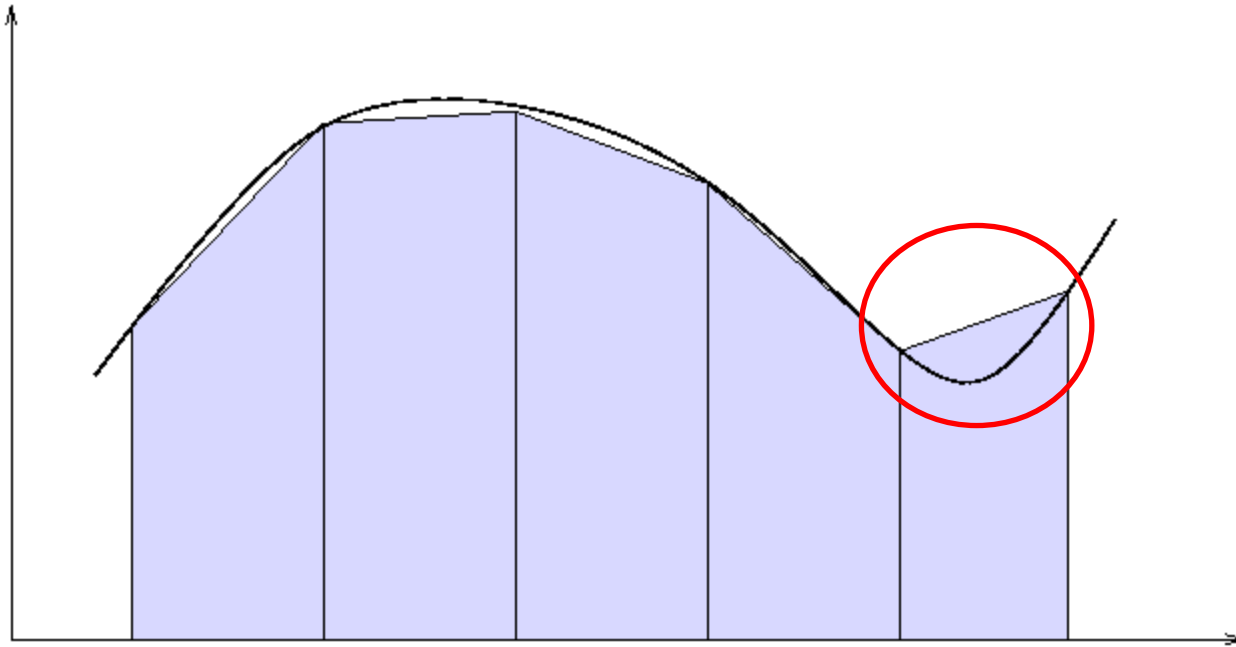
Αριθμητική Ανάλυση

Τραπέζια



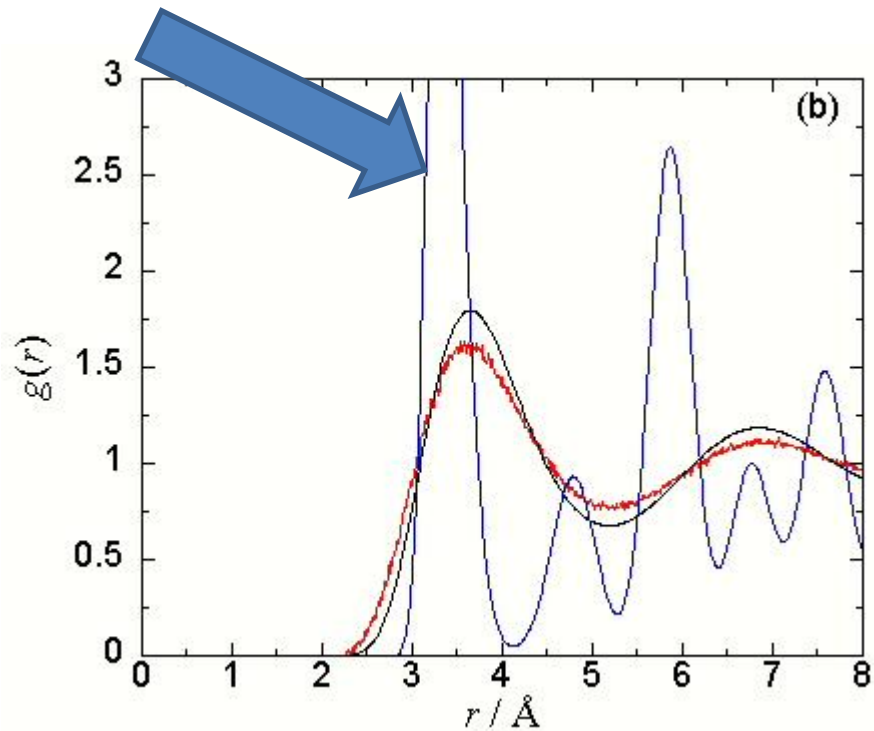
Αριθμητική Ανάλυση

Τραπέζια



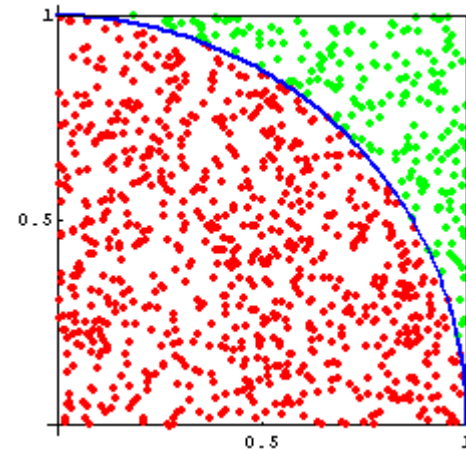
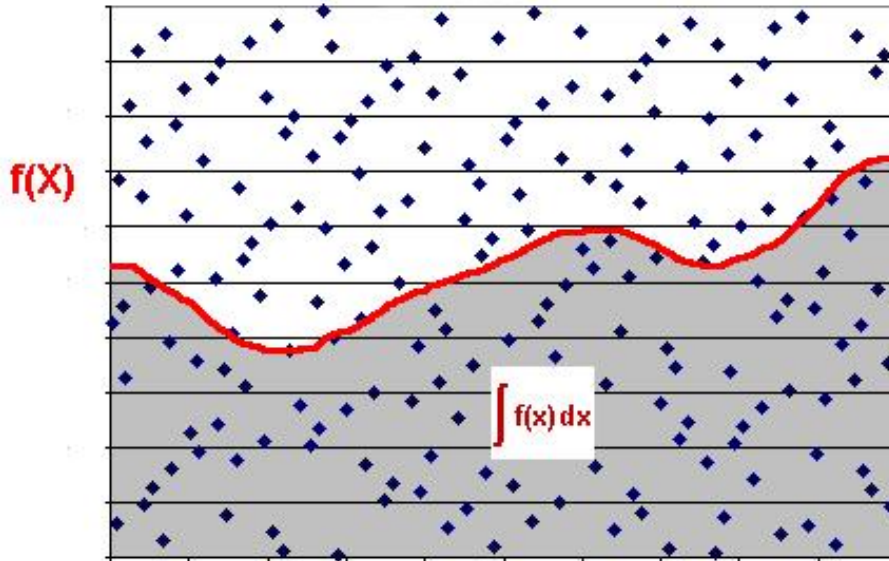
Αριθμητική Ανάλυση

Μη ομαλές συναρτήσεις



Αριθμητική Ανάλυση

Ολοκλήρωση Monte Carlo

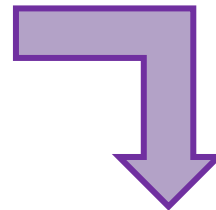
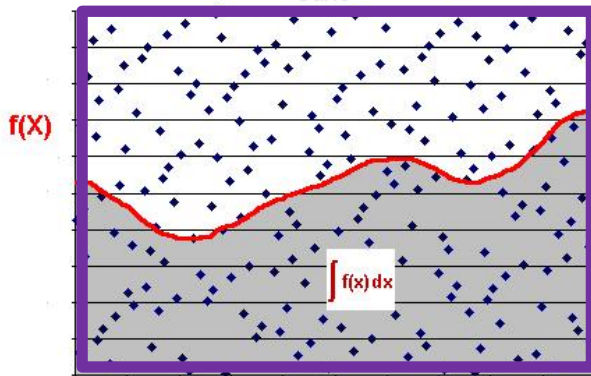


~~ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ = $\frac{\text{ΠΛΗΘΟΣ ΣΗΜΕΙΩΝ ΚΑΤΩ ΑΠΟ ΤΗΝ ΚΑΜΠΥΛΗ}}{\text{ΠΛΗΘΟΣ ΟΛΩΝ ΤΩΝ ΣΗΜΕΙΩΝ}}$~~

Αριθμητική Ανάλυση

Ολοκλήρωση Monte Carlo

$$\text{ΛΟΓΟΣ ΣΗΜΕΙΩΝ } \underline{\lambda} = \frac{\text{ΠΛΗΘΟΣ ΣΗΜΕΙΩΝ ΚΑΤΩ ΑΠΌ ΤΗΝ ΚΑΜΠΥΛΗ}}{\text{ΠΛΗΘΟΣ ΟΛΩΝ ΤΩΝ ΣΗΜΕΙΩΝ}}$$



ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ = $\underline{\lambda}$ ΕΜΒΑΔΟΝ ΠΕΡΙΟΧΗΣ ΓΙΑ ΌΛΑ ΤΑ ΣΗΜΕΙΑ

Αριθμητική Ανάλυση

Εφαρμογές

Παράδειγμα στο EXCEL

«Το υλικό της παρουσίασης προέρχεται από τις πανεπιστημιακές παραδόσεις του καθηγητή Φρ. Κουτελιέρη».



Αριθμητική Ανάλυση