ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
UNIVERSITY OF PATRAS

ΑΝΟΙΚΤΑ ακαδημαϊκά μαθήματα ΠΠ

ΤΙΤΛΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ: **ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ**

ΕΝΟΤΗΤΑ: **ΕΙΔΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΣΤΗΝ ΕΠΙΛΥΣΗ ΑΛΓ. ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ – ΕΠΙΛΥΣΗ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΑΛΓ. ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ**

ΟΝΟΜΑ ΚΑΘΗΓΗΤΗ: **ΦΡ. ΚΟΥΤΕΛΙΕΡΗΣ**

ΤΜΗΜΑ: **Τμήμα Διαχείρισης Περιβάλλοντος και Φυσικών Πόρων**

ΑΓΡΙΝΙΟ

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Ειδικά θέματα στην επίλυση

1. **Πολλαπλές ρίζες**
2. **Αρχικές τιμές**

Πολλαπλές ρίζες: Διχοτόμηση

Βρίσκει μόνο μια ρίζα σε κάθε διάστημα

⇓

Επιλέγουμε κατάλληλα το διάστημα και επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία

Πολλαπλές ρίζες: N-R

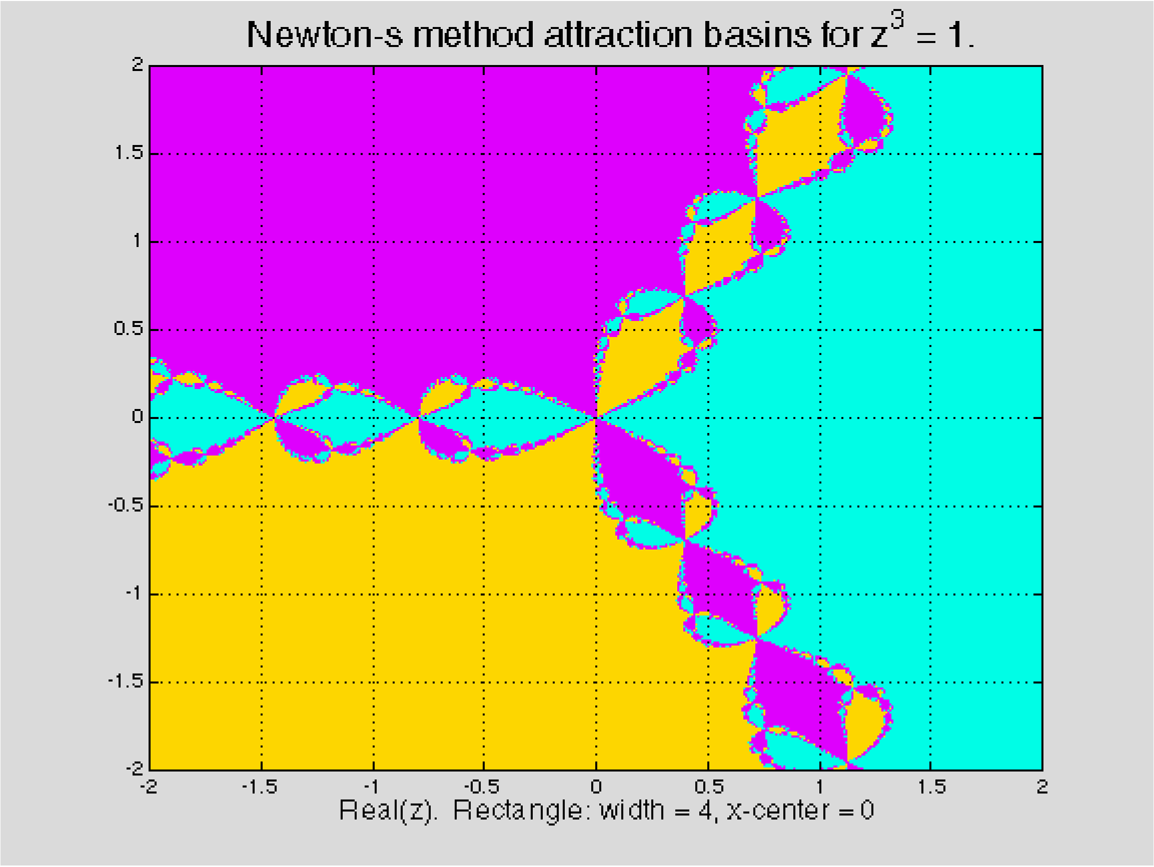
Βρίσκει μόνο μια ρίζα, την πλησιέστερη στην αρχική τιμή

Επιλέγουμε κατάλληλα την αρχική τιμή και επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία

Πολλαπλές ρίζες
και
Αρχικές τιμές

Η ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΒΟΗΘΑΕΙ!

Πολλαπλές ρίζες + Αρχικές τιμές



Πολλαπλές ρίζες + Αρχικές τιμές

Αριθμητική Ανάλυση

5. Αριθμητική επίλυση συστημάτων αλγεβρικών εξισώσεων

Αλγεβρικό σύστημα

- **απευθείας επίλυση (direct methods)**

  Μέθοδος Gauss

- **επαναληπτική επίλυση (iterative methods)**

  Μέθοδος Jacobi

  Μέθοδος Gauss - Seidel

Επαναληπτική επίλυση

δημιουργία μιας ακολουθίας τιμών
$\{x_1^{(k)}, x_2^{(k)},\ldots, x_n^{(k)}, k=0,\ldots M\ , M\to\infty\}$

έπειτα από μεγάλο αλλά πεπερασμένο αριθμό βημάτων

συγκλίνει στη λύση $\{x_1, x_2,\ldots, x_n\}$ του γραμμικού συστήματος

Για να λειτουργήσει η επαναληπτική διαδικασία χρειάζεται να οριστεί μια αρχική προσέγγιση για το διάνυσμα x των αγνώστων, η οποία είναι η $x_0=\{x_1^{(0)}, x_2^{(0)},\ldots, x_n^{(0)}\}$.

Απευθείας επίλυση: Μέθοδος Gauss

- **ΦΑΣΗ 1: Απαλοιφή**
  μετατρέπει τον τετραγωνικό πίνακα των συντελεστών των αγνώστων σε άνω τριγωνικό

- **ΦΑΣΗ 2: Αντικατάσταση**
  αντικατάσταση ξεκινώντας από την τελευταία εξίσωση και καταλήγοντας στην πρώτη

Απευθείας επίλυση: Μέθοδος Gauss

Για $i=1,2,\ldots,n-1$

    Για $j=i+1,i+2,\ldots n$

        Θέτουμε $m_{ij} = a_{ji}/a_{ii}$

        Εκτελούμε την πράξη $(\varepsilon_j - m_{ij}\varepsilon_i) \rightarrow (\varepsilon_j)$

    Τέλος

Θέτουμε $x_n=a_{n,n+1}/a_{n,n}$

Για $i=n-1,n-2,\ldots,2,1$

    Θέτουμε $x_n=[a_{i,n+1}- \sum a_{i,j}x_j]/a_{n,n}$

Τέλος

Επαναληπτική επίλυση: Μέθοδος Jacobi

$$x_i^{(k)} = \frac{-\sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} x_j^{(k-1)} - \sum_{j=i+1}^{n} \alpha_{ij} x_j^{(k-1)} + b_i}{\alpha_{ii}}, \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

Επαναληπτική επίλυση: Μέθοδος Gauss-Seidel

$$x_i^{(k)} = \frac{-\sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} \alpha_{ij} x_j^{(k-1)} + b_i}{\alpha_{ii}}, \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

Ερωτήματα

Gauss: Εφαρμόζεται πάντα; → $\alpha_{ii} \neq 0$

Jacobi/Gauss-Seidel: Συγκλίνει πάντα; →

1) $\alpha_{ii} \neq 0$

2) ;;;;;;

Σύγκλιση επαναληπτικής επίλυσης για μια εξίσωση

$$2x+3=0$$

1. $x= -x-3$ *δηλ.* $x_{i+1}= -x_i-3$ ⇨ αποκλίνει
2. $x=3x+3$ *δηλ.* $x_{i+1}=3x_i+3$ ⇨ αποκλίνει
3. $x=(x/3)-1$ *δηλ.* $x_{i+1}=(x_i/3)-1$ ⇨ $x=-1.5$!!!

Σύγκλιση επαναληπτικής επίλυσης για μια εξίσωση

ΚΡΙΤΗΡΙΟ

$$\left|F'(x)\right| < 1$$

Σύγκλιση επαναληπτικής επίλυσης για σύστημα

$$A\,x = (D+L+U)\,x = b$$

$$D\,x = -(L+U)\,x + b \Leftrightarrow$$

$$x = -D^{-1}\,(L+U)\,x + D^{-1}\,b \Leftrightarrow$$

$$x^{(\kappa)} = T\,x^{(\kappa-1)} + C$$

$\mu\varepsilon$ $T= -D^{-1}\,(L+U)$ και $C = D^{-1}\,b$

Σύγκλιση επαναληπτικής επίλυσης για σύστημα

Πρέπει ο συντελεστής του αγνώστου για τον οποίον λύνουμε, να είναι ο κατ' απόλυτη τιμή μεγαλύτερος στη γραμμή του.

ΑΝΑΓΚΑΙΟ, ΟΧΙ ΙΚΑΝΟ