ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
UNIVERSITY OF PATRAS

ΑΝΟΙΚΤΑ ακαδημαϊκά μαθήματα ΠΠ

ΤΙΤΛΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι**

ΕΝΟΤΗΤΑ: **ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ**

ΟΝΟΜΑ ΚΑΘΗΓΗΤΗ: **ΦΡ. ΚΟΥΤΕΛΙΕΡΗΣ**

ΤΜΗΜΑ**: Τμήμα Διαχείρισης Περιβάλλοντος και Φυσικών Πόρων**

ΑΓΡΙΝΙΟ

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

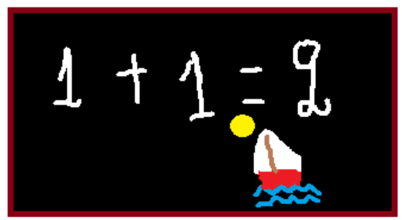
ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι

Φραγκίσκος Κουτελιέρης

Αναπληρωτής Καθηγητής Παν/μίου Πατρών



Επικοινωνία: fcoutelieris@upatras.gr

3. ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

1. **Ορισμοί**
2. **Είδη διανυσμάτων**
3. **Πράξεις διανυσμάτων**
4. **Εσωτερικό, εξωτερικό και μικτό γινόμενο**

3. ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

Διάνυσμα ονομάζεται το μαθηματικό μέγεθος που περιγράφεται από μια **τριάδα** στοιχείων: το **μέτρο**, τη **διεύθυνση** και τη **φορά** του.

$$\boxed{\underline{a}}$$

3. ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

Διάνυσμα είναι

ένα προσανατολισμένο

ευθύγραμμο τμήμα.

3. ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

Φορέας του διανύσματος ονομάζεται η μοναδική ευθεία η οποία διέρχεται από τα άκρα του διανύσματος.

3. ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

Μέτρο του διανύσματος ονομάζεται ο μη αρνητικός πραγματικός αριθμός ο οποίος εκφράζει το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος το οποίο έχει αρχή την αρχή του διανύσματος και τέλος, το τέλος του.

$$\boxed{\left|\underline{a}\right|}$$

3. ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

Διεύθυνση του διανύσματος ονομάζεται το σύνολο όλων των ευθειών που είναι παράλληλες με το φορέα του διανύσματος.

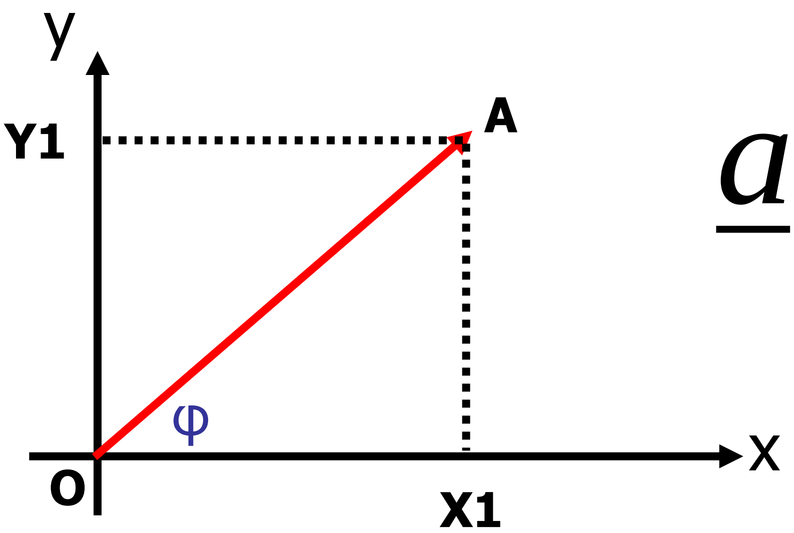
3. ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

Φορά του διανύσματος ονομάζεται η φορά της ημιευθείας που ορίζεται από την αρχή του διανύσματος πάνω στο φορέα του.

Αν δυο ημιευθείες έχουν ίδια φορά ονομάζονται **ομόρροπες**, ενώ αν έχουν αντίθετη **αντίρροπες**.

Αυθαίρετα χαρακτηρίζεται **θετική** η μια από τις δυο φορές, οπότε η άλλη χαρακτηρίζεται **αρνητική**.

3. ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ



$$\underline{a} = (X1, Y1)$$

3. ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

Μηδενικό ονομάζεται το διάνυσμα του οποίου η αρχή και το τέλος συμπίπτουν.

$$\boxed{\underline{0}}$$

3. ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

Μοναδιαίο ονομάζεται το διάνυσμα το οποίο έχει μοναδιαίο μέτρο.

$$\boxed{\underline{e}}$$

3. ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

Δυο διανύσματα ονομάζονται

συγγραμμικά

ή

παράλληλα

όταν έχουν την ίδια διεύθυνση.

3. ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

Δυο διανύσματα ονομάζονται **διαδοχικά** όταν η αρχή του ενός συμπίπτει με το τέλος του άλλου.

3. ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

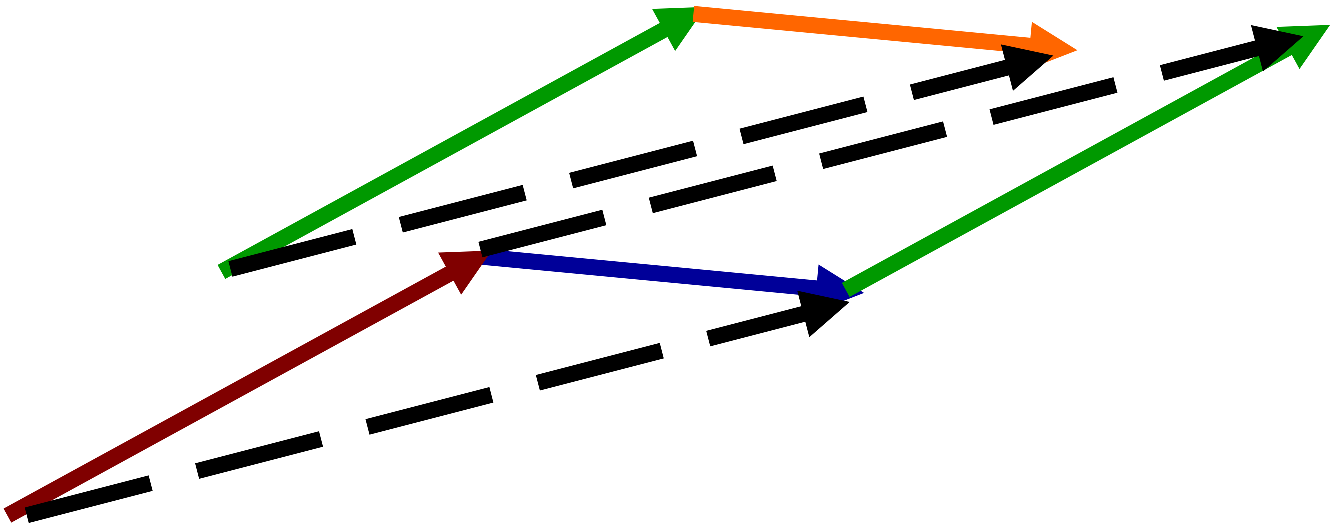
Δυο διανύσματα είναι **ίσα** όταν έχουν όλα τα στοιχεία τους ίσα, δηλ. αν έχουν **ίσα μέτρα** και είναι **συγγραμμικά** και **ομόρροπα**.

3. ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

Πρόσθεση

Αν **a**,**b** είναι δυο διανύσματα, τότε το άθροισμα τους είναι το διάνυσμα **a**+**b** το οποίο έχει για αρχή του την αρχή του **a** και για τέλος του το τέλος του **b** όταν τα **a**,**b** είναι διαδοχικά.

3. ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ



Διανύσματα

3. ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

Ιδιότητες

1. Μεταθετική $\underline{a}+\underline{b}=\underline{b}+\underline{a}$

2. Προσεταιριστική $\underline{a}+\left(\underline{b}+\underline{c}\right)=\left(\underline{a}+\underline{b}\right)+\underline{c}$

3. Ουδέτερο στοιχείο $\underline{a}+\underline{0}=\underline{0}+\underline{a}=\underline{a}$

4. Αντίθετο στοιχείο $\underline{a}+\left(-\underline{a}\right)=\left(-\underline{a}\right)+\underline{a}=\underline{0}$

5. Ισοδυναμία $\underline{a}+\underline{b}=\underline{a}+\underline{c}\Leftrightarrow\underline{b}=\underline{c}$

3. ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

Παρατηρήσεις

1. $-\underline{0} = \underline{0}$

2. $-(-\underline{a}) = \underline{a}$

3. $-\left(\underline{a} + \underline{b}\right) = \left(-\underline{a}\right) + \left(-\underline{b}\right)$

4. $\left|-\underline{a}\right| = \left|\underline{a}\right|$

3. ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

Βαθμωτός πολλαπλασιασμός

Αν $\underline{a}$ είναι ένα διάνυσμα και λ ένας πραγματικός αριθμός, τότε το αποτέλεσμα του εξωτερικού πολλαπλασιασμού $\lambda \underline{a}$ είναι ένα διάνυσμα συγγραμμικό με το διάνυσμα $\underline{a}$ και με μέτρο

$$\boxed{\left|\lambda \underline{a}\right| = \lambda \left|\underline{a}\right|}$$

Αν **λ>0** τότε το $\lambda \underline{a}$ είναι ομόρροπο του $\underline{a}$, ενώ αν **λ<0** είναι αντίρροπο.

3. ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

Ιδιότητες

$$(\lambda + \mu)\underline{a} = \lambda\underline{a} + \mu\underline{a}$$

$$\lambda(\underline{a} + \underline{b}) = \lambda\underline{a} + \lambda\underline{b}$$

$$\lambda(\mu\underline{a}) = (\lambda\mu)\underline{a}$$

$$1\underline{a} = \underline{a}$$

3. ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

Ιδιότητες

$$0\underline{a} = \underline{0}$$

$$\lambda\underline{0} = \underline{0}$$

$$\lambda\underline{a} = \lambda\underline{b} \Leftrightarrow \underline{a} = \underline{b}, \quad \lambda \neq 0$$

$$\lambda\underline{a} = \mu\underline{a} \Leftrightarrow \lambda = \mu, \quad \underline{a} \neq \underline{0}$$

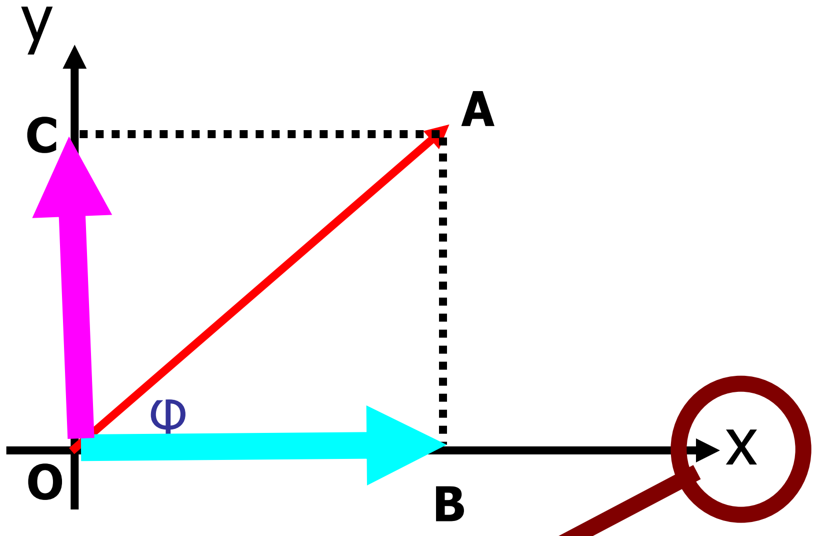
3. ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

Προβολή ενός διανύσματος $\underline{a}$ σε ένα άλλο διάνυσμα $\underline{b}$ είναι ένα διάνυσμα $\underline{c}$, το οποίο είναι <u>συγγραμμικό</u> με το $\underline{b}$ και επιπλέον $\left|\underline{c}\right| = \left|\underline{a}\right| \cos\vartheta$, όπου ϑ είναι η γωνία που σχηματίζουν οι φορείς των διανυσμάτων $\underline{a}$ και $\underline{b}$.

3. ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

$$OB = OA\cos\varphi$$

Η διεύθυνση του μοναδιαίου $\underline{e}_x$



3. ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

Συστήματα αναφοράς

Οι διευθύνσεις (φορείς) των μοναδιαίων **καθέτων** διανυσμάτων ορίζουν ένα **ορθογώνιο σύστημα αναφοράς** στο χώρο που ανήκουν τα διανύσματα.

3. ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

Αντίστροφα

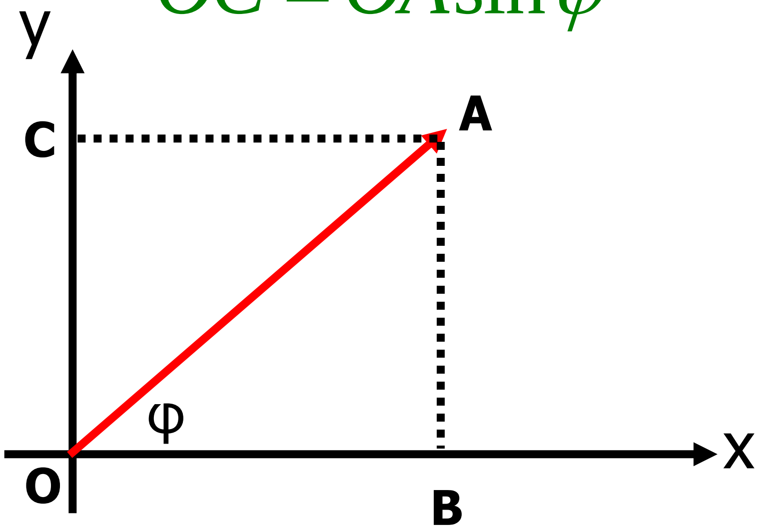
Δοθέντος ενός συστήματος αναφοράς, κάθε διάνυσμα **αναλύεται με μοναδικό τρόπο** σε διανύσματα συγγραμμικά των μοναδιαίων διανυσμάτων του συστήματος.

$$\underline{a} = 2\underline{e}_x + 52\underline{e}_y + 102\underline{e}_z \Leftrightarrow \underline{a} = \left(2, 52, 102\right)$$

3. ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

Το μέτρο της κάθε μιας τέτοιας προβολής ονομάζεται **συντεταγμένη** του διανύσματος.

$$OB = OA\cos\varphi$$
$$OC = OA\sin\varphi$$



3. ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

Αν $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \cdots, \underline{e}_n$ είναι τα μοναδιαία διανύσματα του συστήματος αναφοράς, τότε είναι

$$\underline{a} = a_1 \underline{e}_1 + a_2 \underline{e}_2 + \cdots + a_n \underline{e}_n$$

με $a_i = |\underline{a}||\underline{e}_i| \cos \vartheta_i$ όπου ϑ_i είναι η γωνία του $\underline{a}$ διανύσματος με το μοναδιαίο $\underline{e}_i$.

3. ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

Στην περίπτωση αυτή, το

διάνυσμα συμβολίζεται και ως

$$\underline{a} = \left(a_1, a_2, \cdots, a_n\right)$$

3. ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

Ξανά οι πράξεις

$$\underline{a} = \left(a_1, a_2, \cdots, a_n\right) \qquad \underline{b} = \left(b_1, b_2, \cdots, b_n\right) \qquad \lambda \in R$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{a} \pm \underline{b} = \left(a_1 \pm b_1, a_2 \pm b_2, \cdots, a_n \pm b_n\right)$$

$$\lambda \underline{a} = \left(\lambda a_1, \lambda a_2, \cdots, \lambda a_n\right)$$

3. ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

Εσωτερικό γινόμενο

Αν $\underline{a}, \underline{b}$ είναι δυο διανύσματα, τότε το εσωτερικό τους γινόμενο είναι ο **αριθμός** $\underline{a} \cdot \underline{b}$ ο οποίος ισούται με $\boxed{\underline{a} \cdot \underline{b} = |\underline{a}||\underline{b}| \cos \vartheta}$ όπου ϑ είναι η γωνία του διανύσματος $\underline{a}$ με το διάνυσμα $\underline{b}$.

3. ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

Εσωτερικό γινόμενο

$$\underline{a}=\left(a_1,a_2,\cdots,a_n\right) \qquad \underline{b}=\left(b_1,b_2,\cdots,b_n\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{a}\cdot\underline{b}=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$$

3. ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

Γεωμετρική ερμηνεία

Το εσωτερικό γινόμενο δυο διανυσμάτων είναι το μέτρο της προβολής του ενός διανύσματος στο άλλο.

3. ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

Ιδιότητες

$$\underline{a}\cdot\underline{b}=\underline{b}\cdot\underline{a}$$

$$\left(\lambda\underline{a}\right)\cdot\underline{b}=\underline{a}\cdot\left(\lambda\underline{b}\right)=\lambda\left(\underline{a}\cdot\underline{b}\right)$$

$$\underline{a}\cdot\left(\underline{b}+\underline{c}\right)=\underline{a}\cdot\underline{b}+\underline{a}\cdot\underline{c}$$

$$\underline{a}\cdot\underline{b}=0\Rightarrow\underline{a}=\underline{0}\ \ \eta\ \ \underline{b}=\underline{0}\ \ \eta\ \ \underline{a}\perp\underline{b}$$

3. ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

Συνθήκη καθετότητας

$$\begin{array}{l}\underline{a}\neq\underline{0}\\ \underline{b}\neq\underline{0}\\ \boxed{\underline{a}\cdot\underline{b}=0}\end{array} \Rightarrow \boxed{\underline{a}\perp\underline{b}}$$

3. ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

Εξωτερικό γινόμενο

Αν $\underline{a},\underline{b}$ είναι δυο διανύσματα, τότε το εξωτερικό τους γινόμενο είναι το **διάνυσμα** $\underline{a}\times\underline{b}$ το οποίος έχει **μέτρο** $|\underline{a}||\underline{b}|\sin\vartheta$, **διεύθυνση** κάθετη στο επίπεδο των $\underline{a},\underline{b}$ και **φορά** εκείνην που θα προχωρούσε δεξιόστροφος κοχλίας από το $\underline{a}$ προς το $\underline{b}$.

3. ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

Εξωτερικό γινόμενο

$$\underline{a} = \left(a_1, a_2, a_3\right) \qquad \underline{b} = \left(b_1, b_2, b_3\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{a} \times \underline{b} = \begin{vmatrix} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \underline{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \left(a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1\right)$$

3. ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

Γεωμετρική ερμηνεία

Το μέτρο του εξωτερικού γινομένου δυο διανυσμάτων είναι το εμβαδόν του παραλληλογράμμου που ορίζεται από τα δυο διανύσματα όταν αυτά γίνουν διαδοχικά.

3. ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

Ιδιότητες

$$\underline{a}\times\underline{b}=-\underline{b}\times\underline{a}$$

$$\left(\lambda\underline{a}\right)\times\underline{b}=\underline{a}\times\left(\lambda\underline{b}\right)=\lambda\left(\underline{a}\times\underline{b}\right)$$

$$\underline{a}\times\left(\underline{b}+\underline{c}\right)=\underline{a}\times\underline{b}+\underline{a}\times\underline{c}$$

$$\underline{a}\times\left(\underline{b}\times\underline{c}\right)=\left(\underline{a}\times\underline{b}\right)\times\underline{c}$$

$$\underline{a}\times\underline{a}=\underline{0}$$

3. ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

Συνθήκη συγγραμικότητας (παραλληλίας)

$$\underline{a} \neq \underline{0}$$

$$\underline{b} \neq \underline{0}$$

$$\boxed{\underline{a} \times \underline{b} = \underline{0}}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\underline{a} \parallel \underline{b}}$$

3. ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

Μικτό γινόμενο

Αν $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ είναι τρία διανύσματα, τότε το εξωτερικό τους γινόμενο είναι ο **αριθμός**

$\underline{a} \times \underline{b} \cdot \underline{c}$

3. ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

Παρατήρηση

$$\boxed{=\left(\underline{a}\times\underline{b}\right)\cdot\underline{c}}$$

$$\underline{a}\times\underline{b}\cdot\underline{c}$$

$$\cancel{\boxed{=\underline{a}\times\left(\underline{b}\cdot\underline{c}\right)}}$$

3. ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

Μικτό γινόμενο

$$\underline{a}=\left(a_1,a_2,a_3\right) \quad \underline{b}=\left(b_1,b_2,b_3\right) \quad \underline{c}=\left(c_1,c_2,c_3\right)$$

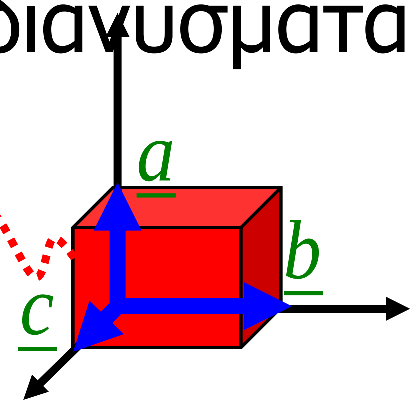
$$\underline{a}\times\underline{b}\cdot\underline{c}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

3. ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

Γεωμετρική ερμηνεία

Το μικτό γινόμενο τριών διανυσμάτων είναι ο όγκος του παραλληλεπιπέδου που ορίζεται από τα τρία αυτά διανύσματα.

$$\underline{a}\times\underline{b}\cdot\underline{c}$$



3. ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

Ιδιότητες

$$\underline{a} \times \underline{b} \cdot \underline{c} = \underline{b} \times \underline{c} \cdot \underline{a} = \underline{c} \times \underline{a} \cdot \underline{b}$$

$$\underline{a} \times \underline{b} \cdot \underline{c} = -\underline{a} \times \underline{c} \cdot \underline{b}$$

3. ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

Συνθήκη ομοεπίπεδων διανυσμάτων

$$\underline{a} \neq \underline{0}$$

$$\underline{b} \neq \underline{0}$$

$$\underline{c} \neq \underline{0}$$

$$\boxed{\underline{a} \times \underline{b} \cdot \underline{c} = 0}$$

$\Rightarrow$ $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ ομοεπίπεδα

3. ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ