ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
UNIVERSITY OF PATRAS

ΑΝΟΙΚΤΑ ακαδημαϊκά μαθήματα ΠΠ

ΤΙΤΛΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι**

ΕΝΟΤΗΤΑ: **ΑΝΑΛΛΟΙΩΤΑ ΜΕΓΕΘΗ ΠΙΝΑΚΩΝ**

ΟΝΟΜΑ ΚΑΘΗΓΗΤΗ: **ΦΡ. ΚΟΥΤΕΛΙΕΡΗΣ**

ΤΜΗΜΑ**: Τμήμα Διαχείρισης Περιβάλλοντος και Φυσικών Πόρων**

ΑΓΡΙΝΙΟ

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

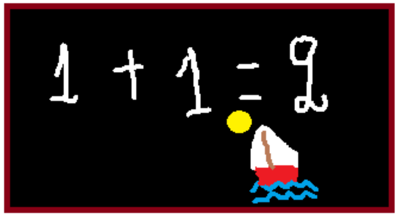
- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι

Φραγκίσκος Κουτελιέρης

Αναπληρωτής Καθηγητής Παν/μίου Πατρών



Επικοινωνία: fcoutelieris@upatras.gr

4.ΑΝΑΛΛΟΙΩΤΑ ΜΕΓΕΘΗ ΠΙΝΑΚΩΝ

1. **Ορισμοί**

2. **Εύρεση <u>ιδιοτιμών</u>**

3. **Εύρεση <u>ιδιοδιανυσμάτων</u>**

4.ΑΝΑΛΛΟΙΩΤΑ ΜΕΓΕΘΗ ΠΙΝΑΚΩΝ

Αν $\underset{\sim}{A} \in \mathrm{M}_n(R)$, το $\underline{x} \in R^n$ λέγεται **ιδιοδιάνυσμα** του $\underset{\sim}{A}$ όταν για κάποιο $\lambda \in R$ ισχύει:

$$\boxed{\underline{x} \cdot \underset{\sim}{A} = \lambda \underline{x}}$$

ιδιοδιάνυσμα **ιδιοτιμή**

4.ΑΝΑΛΛΟΙΩΤΑ ΜΕΓΕΘΗ ΠΙΝΑΚΩΝ

$$\underline{x} \cdot \underset{\sim}{A} = \lambda \underline{x} \Leftrightarrow \underline{x} \cdot \left(\underset{\sim}{A} - \lambda \underset{\sim}{I} \right) = \underset{\sim}{0}$$

4.ΑΝΑΛΛΟΙΩΤΑ ΜΕΓΕΘΗ ΠΙΝΑΚΩΝ

Προφανώς ενδιαφέρουν μόνο τα <u>μη μηδενικά</u> ιδιοδιανύσματα.

4.ΑΝΑΛΛΟΙΩΤΑ ΜΕΓΕΘΗ ΠΙΝΑΚΩΝ

Χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα

$$\underset{\sim}{A} \in \mathrm{M}_n(R)$$

$$\boxed{P_n(\lambda) = \left|\underset{\sim}{A} - \lambda \underset{\sim}{I}\right|}$$

4.ΑΝΑΛΛΟΙΩΤΑ ΜΕΓΕΘΗ ΠΙΝΑΚΩΝ

Χαρακτηριστική εξίσωση του πίνακα $\underset{\sim}{A} \in \mathrm{M}_n(R)$

$$\boxed{\left|\underset{\sim}{A} - \lambda \underset{\sim}{I}\right| = 0}$$

4.ΑΝΑΛΛΟΙΩΤΑ ΜΕΓΕΘΗ ΠΙΝΑΚΩΝ

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
\left|\underset{\sim}{A}-\lambda\underset{\sim}{I}\right|=0 \arrow[r] & \lambda=a,b,c,.. \arrow[d, "\lambda=a"'] \arrow[dr, "\lambda=b"] \arrow[drr] & & \\
 & \underline{x}\cdot\underset{\sim}{A}=a\underline{x} \arrow[d] & \underline{x}\cdot\underset{\sim}{A}=b\underline{x} \arrow[d] & \ldots \\
 & \underline{x}=\ldots & \underline{x}=\ldots &
\end{tikzcd}
$$

4.ΑΝΑΛΛΟΙΩΤΑ ΜΕΓΕΘΗ ΠΙΝΑΚΩΝ

Το σύνολο λύσεων της χαρακτηριστικής εξίσωσης ονομάζεται <u>φάσμα</u> του πίνακα.

4.ΑΝΑΛΛΟΙΩΤΑ ΜΕΓΕΘΗ ΠΙΝΑΚΩΝ

Μια άσκηση:

Να βρεθούν οι ιδιοτιμές του $\underset{\sim}{A}=\begin{bmatrix}1 & 3 & -2\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$

$$\left|\underset{\sim}{A}-\lambda\underset{\sim}{I}\right|=0\Leftrightarrow\begin{vmatrix}1-\lambda & 3 & -2\\ 0 & 2-\lambda & 1\\ 0 & 0 & 2-\lambda\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow\boxed{(1-\lambda)(2-\lambda)^2=0}$$

Άρα $\lambda_1=1$ και $\lambda_2=2$

4.ΑΝΑΛΛΟΙΩΤΑ ΜΕΓΕΘΗ ΠΙΝΑΚΩΝ

Η πολλαπλότητα της ιδιοτιμής **λ** ως λύση της χαρακτηριστικής εξίσωσης ονομάζεται **αλγεβρική πολλαπλότητα** της ιδιοτιμής.

4.ΑΝΑΛΛΟΙΩΤΑ ΜΕΓΕΘΗ ΠΙΝΑΚΩΝ

Συνέχεια της άσκησης:

Να βρεθούν τα ιδιοδιανύσματα του $\underset{\sim}{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

$\boxed{\lambda_1 = 1}$

$$[x_1, x_2, x_3] \cdot \begin{bmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [0,0,0] \Leftrightarrow \begin{matrix} 3x_1 + x_2 = 0 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} x_2 = -3x_1 \\ x_3 = 5x_1 \end{matrix} \Leftrightarrow$$

$$[x_1, x_2, x_3] = [x_1, -3x_1, 5x_1] \Leftrightarrow \quad [x_1, x_2, x_3] = x_1 [1, -3, 5]$$

ιδιοδιάνυσμα

4.ΑΝΑΛΛΟΙΩΤΑ ΜΕΓΕΘΗ ΠΙΝΑΚΩΝ

Συνέχεια της άσκησης:

Να βρεθούν τα ιδιοδιανύσματα του $\underset{\sim}{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

$\boxed{\lambda_1 = 2}$

$$[x_1, x_2, x_3] \cdot \begin{bmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [0,0,0] \Leftrightarrow \begin{matrix} -x_1 = 0 \\ 3x_1 = 0 \\ -2x_1 + x_2 = 0 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = x_3 \end{matrix} \Leftrightarrow$$

ιδιοδιάνυσμα

$$[x_1, x_2, x_3] = [0, 0, x_3] \Leftrightarrow \quad [x_1, x_2, x_3] = x_3 [0,0,1]$$

4.ΑΝΑΛΛΟΙΩΤΑ ΜΕΓΕΘΗ ΠΙΝΑΚΩΝ

Το πλήθος των ιδιοδιανυσμάτων που αντιστοιχούν σε μια ιδιοτιμή *λ* ονομάζεται γεωμετρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής.

4.ΑΝΑΛΛΟΙΩΤΑ ΜΕΓΕΘΗ ΠΙΝΑΚΩΝ

Αν το χαρακτηριστικό πολυώνυμο ενός ***n* x *n*** πίνακα έχει ***n*** διακεκριμένες ρίζες, τότε ο πίνακας αυτός είναι διαγωνιοποιήσιμος

$$\boxed{\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix}}$$

4.ΑΝΑΛΛΟΙΩΤΑ ΜΕΓΕΘΗ ΠΙΝΑΚΩΝ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ