ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
UNIVERSITY OF PATRAS

ΑΝΟΙΚΤΑ ακαδημαϊκά μαθήματα ΠΠ

ΤΙΤΛΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι**

ΕΝΟΤΗΤΑ: **ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ**

ΟΝΟΜΑ ΚΑΘΗΓΗΤΗ: **ΦΡ. ΚΟΥΤΕΛΙΕΡΗΣ**

ΤΜΗΜΑ**: Τμήμα Διαχείρισης Περιβάλλοντος και Φυσικών Πόρων**

ΑΓΡΙΝΙΟ

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

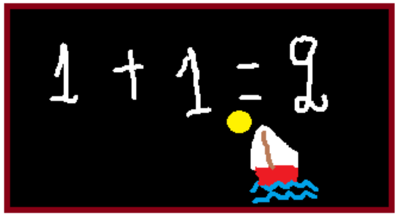
- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι

Φραγκίσκος Κουτελιέρης

Αναπληρωτής Καθηγητής Παν/μίου Πατρών



Επικοινωνία: fcoutelieris@upatras.gr

2. Γραμμικά συστήματα

1. Ορισμοί
2. Σύστημα σε μορφή πίνακα
3. Επίλυση Crammer
4. Επίλυση Gauss
5. Ομογενές σύστημα
6. Επίλυση με αντίστροφο πίνακα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

2. Γραμμικά συστήματα

2. Γραμμικά συστήματα

Γραμμικό σύστημα mx**n** ονομάζεται κάθε σύνολο **m γραμμικών** αλγεβρικών εξισώσεων που η καθεμιά τους περιέχει **n** το πολύ αγνώστους.

$$\boxed{m, n \in N}$$

2. Γραμμικά συστήματα

$$
\begin{array}{ccccccc}
\alpha_{11}x_1 & +\alpha_{12}x_2 & + \dots & +\alpha_{1n}x_n & = b_1 \\
\alpha_{21}x_1 & +\alpha_{22}x_2 & + \dots & +\alpha_{2n}x_n & = b_2 \\
. & . & & . & . \\
. & . & & . & . \\
. & . & & . & . \\
\alpha_{m1}x_1 & +\alpha_{m2}x_2 & + \dots & +\alpha_{mn}x_n & = b_m
\end{array}
$$

$\boxed{\alpha_{ij}, b_i \in R}$ ***i=1,..., m*** ***j=1,..., n.***

Γραμμικά Συστήματα

2. Γραμμικά συστήματα

Κάθε εξίσωση του συστήματος παριστάνει **ένα συνδυασμό πληροφοριών** για τις άγνωστες ποσότητες $x_1, x_2, \ldots, x_n$ που περιέχει.

2. Γραμμικά συστήματα

Αν **m=n**

τότε το σύστημα λέγεται

τετραγωνικό.

2. Γραμμικά συστήματα

$$\begin{matrix} \alpha_{11}x_1 & +\alpha_{12}x_2 & + & \dots & +\alpha_{1n}x_n & = & b_1 \\ \alpha_{21}x_1 & +\alpha_{22}x_2 & + & \dots & +\alpha_{2n}x_n & = & b_2 \\ \cdot & \cdot & & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & \cdot & & \cdot \\ \alpha_{m1}x_1 & +\alpha_{m2}x_2 & + & \dots & +\alpha_{mn}x_n & = & b_m \end{matrix}$$

$$\underset{\sim}{A} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad \underset{\sim}{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\underset{\sim}{A} \cdot \underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{b}}$$

Γραμμικά Συστήματα

2. Γραμμικά συστήματα

Ο **επαυξημένος πίνακας** του παραπάνω συστήματος είναι ο

$$\underset{\sim}{E} = \left[\underset{\sim}{A} : \underset{\sim}{b}\right] = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} & b_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

2. Γραμμικά συστήματα

$$\underset{\sim}{A}\cdot\underset{\sim}{x}=\underset{\sim}{b}\;\cancel{\Leftrightarrow}\;\underset{\sim}{x}=\underset{\sim}{A}^{-1}\cdot\underset{\sim}{b}$$

$$\underset{\sim}{A}\cdot\underset{\sim}{x}=\underset{\sim}{b}\Leftrightarrow\underset{\sim}{A}^{-1}\cdot\left(\underset{\sim}{A}\cdot\underset{\sim}{x}\right)=\underset{\sim}{A}^{-1}\cdot\underset{\sim}{b}\Leftrightarrow\left(\underset{\sim}{A}^{-1}\cdot\underset{\sim}{A}\right)\cdot\underset{\sim}{x}=\underset{\sim}{A}^{-1}\cdot\underset{\sim}{b}$$

$$\Leftrightarrow\underset{\sim}{I}\cdot\underset{\sim}{x}=\underset{\sim}{A}^{-1}\cdot\underset{\sim}{b}\Leftrightarrow\underset{\sim}{x}=\underset{\sim}{A}^{-1}\cdot\underset{\sim}{b}$$

ΠΟΤΕ ΕΧΕΙ ΛΥΣΗ ΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ

2. Γραμμικά συστήματα

ΕΝΑ ΣΥΣΤΗΜΑ ΜΠΟΡΕΙ ΓΕΝΙΚΑ ΝΑ ΕΧΕΙ

- **ΜΟΝΑΔΙΚΗ ΛΥΣΗ (συμβιβαστό)**
- **ΑΠΕΙΡΕΣ ΛΥΣΕΙΣ (αόριστο)**
- **ΚΑΜΙΑ ΛΥΣΗ (αδύνατο)**

2. Γραμμικά συστήματα

ΤΟ ΠΛΗΘΟΣ ΤΩΝ ΛΥΣΕΩΝ ΕΞΑΡΤΑΤΑΙ ΑΠΟ

ΤΙΣ ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ m ΚΑΙ n ΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

2. Γραμμικά συστήματα

$\boxed{m > n}$

Το σύστημα περιέχει **περισσότερους συνδυασμούς πληροφοριών (=εξισώσεις)** απ' όσους είναι απαραίτητοι για να οριστούν οι άγνωστες ποσότητες. Έτσι, **πρέπει η λύση κάθε υποσυστήματος nxn να ικανοποιεί τις υπόλοιπες m-n εξισώσεις**, ώστε το σύστημα να είναι ***συμβιβαστό***. Αν η λύση έστω και ενός υποσυστήματος **δεν ικανοποιεί** τις εξισώσεις που απομένουν, τότε το σύστημα είναι ***αδύνατο***.

2. Γραμμικά συστήματα

$\boxed{m < n}$

Το σύστημα περιέχει **λιγότερους συνδυασμούς πληροφοριών (=εξισώσεις)** απ' όσους είναι απαραίτητοι για να οριστούν οι άγνωστες ποσότητες. Έτσι, **το σύστημα επιδέχεται *απειρία* λύσεων**, η οποία προκύπτει από τη θεώρηση των n-m αγνώστων ως παραμέτρων και τη συνεπακόλουθη λύση του mxm συστήματος συναρτήσει αυτών των παραμέτρων.

2. Γραμμικά συστήματα

$\boxed{m = n}$

Το σύστημα μπορεί να έχει **καμία**, **μια** ή **άπειρες** λύσεις.

2. Γραμμικά συστήματα

$\boxed{m = n}$

ΜΟΝΑΔΙΚΗ ΛΥΣΗ =>

ΥΠΑΡΧΕΙ Ο ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΣ $\underset{\sim}{A}^{-1}$ **=>**

ΜΗ ΜΗΔΕΝΙΚΗ ΟΡΙΖΟΥΣΑ $\left|\underset{\sim}{A}\right|$

2. Γραμμικά συστήματα

$\boxed{m = n}$

ΔΕΝ ΥΠΑΡΧΕΙ Ο ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΣ

ΜΗΔΕΝΙΚΗ ΟΡΙΖΟΥΣΑ

- **ΑΠΕΙΡΕΣ ΛΥΣΕΙΣ =>**

  $\left|\underset{\sim}{A}\right| = 0$ **και όλες οι υποορίζουσες επίσης =0**

- **ΚΑΜΙΑ ΛΥΣΗ =>**

  $\left|\underset{\sim}{A}\right| = 0$ **και κάποια από τις υποορίζουσες ≠0**

2. Γραμμικά συστήματα

$\boxed{m = n}$

Αντίστοιχα

- **ΜΟΝΑΔΙΚΗ ΛΥΣΗ =>**
- **ΑΠΕΙΡΕΣ ΛΥΣΕΙΣ =>**

$$rank\left(\underset{\sim}{A}\right) = rank\left(\underset{\sim}{E}\right) < n$$

- **ΚΑΜΙΑ ΛΥΣΗ =>**

$$rank\left(\underset{\sim}{A}\right) \neq rank\left(\underset{\sim}{E}\right)$$

2. Γραμμικά συστήματα

Το σύστημα $\underset{\sim}{A} \cdot \underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{b}$ λέγεται **ομογενές**,

όταν $\underset{\sim}{b} = \underset{\sim}{0}$

Το ομογενές σύστημα δεν είναι ποτέ αδύνατο μιας και έχει πάντα τη μηδενική λύση.

- **αν** $\left|\underset{\sim}{A}\right| \neq 0$**, τότε έχει μόνο τη μηδενική λύση**
- **αν** $\left|\underset{\sim}{A}\right| = 0$**, έχει άπειρες λύσεις.**

2. Γραμμικά συστήματα

$\boxed{\textbf{Μέθοδος επίλυσης Cramer}}$

Έστω το τετραγωνικό γραμμικό σύστημα $\underset{\sim}{A} \cdot \underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{b}$ με $\boxed{\left|\underset{\sim}{A}\right| \neq 0}$.Τότε η λύση δίνεται από τη σχέση

$$x_i = \frac{\left|\underset{\sim}{A}_i\right|}{\left|\underset{\sim}{A}\right|}$$

όπου η υποορίζουσα $\left|\underset{\sim}{A}_i\right|$ είναι ίδια με την $\left|\underset{\sim}{A}\right|$, με μόνη διαφορά ότι η i-στήλη της $\left|\underset{\sim}{A}\right|$ έχει αντικατασταθεί από τον $\underset{\sim}{b}$ (σταθεροί όροι).

2. Γραμμικά συστήματα

Μέθοδος επίλυσης Gauss

Έστω το τετραγωνικό γραμμικό σύστημα $\underset{\sim}{A} \cdot \underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{b}$ Εκτελώντας **γραμμοπράξεις** έως ότου μετασχηματιστεί **ο επαυξημένος πίνακας** του συστήματος σε **τριγωνικό άνω**, ο τελευταίος άγνωστος υπολογίζεται απευθείας, ενώ οι υπόλοιποι προκύπτουν από διαδοχικές αντικαταστάσεις.

2. Γραμμικά συστήματα

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Γραμμικά Συστήματα