ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
UNIVERSITY OF PATRAS

ΑΝΟΙΚΤΑ ακαδημαϊκά μαθήματα ΠΠ

ΤΙΤΛΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι**

ΕΝΟΤΗΤΑ: **ΕΙΣΑΓΩΓΗ – ΠΙΝΑΚΕΣ - ΟΡΙΖΟΥΣΕΣ**

ΟΝΟΜΑ ΚΑΘΗΓΗΤΗ: **ΦΡ. ΚΟΥΤΕΛΙΕΡΗΣ**

ΤΜΗΜΑ**: Τμήμα Διαχείρισης Περιβάλλοντος και Φυσικών Πόρων**

ΑΓΡΙΝΙΟ

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

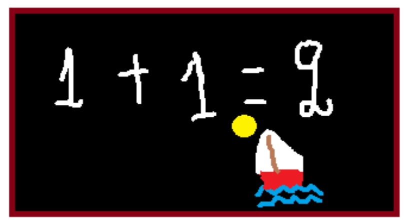
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι

Φραγκίσκος Κουτελιέρης

Αναπληρωτής Καθηγητής Παν/μίου Πατρών



Επικοινωνία: fcoutelieris@upatras.gr

Γραμμική άλγεβρα ...

... είναι τομέας των μαθηματικών ο οποίος ασχολείται με **τη μελέτη διανυσμάτων**, **διανυσματικών χώρων**, **γραμμικών απεικονίσεων** και **συστημάτων γραμμικών εξισώσεων** μέσω των **πινάκων**.

Περιεχόμενα του μαθήματος

1. Πίνακες & ορίζουσες
2. Γραμμικά συστήματα
3. Διανύσματα
4. Αναλλοίωτα μεγέθη πινάκων

1. Πίνακες & Ορίζουσες

1. Ορισμοί
2. Πράξεις πινάκων
3. Αντιστροφή πίνακα
4. Όμοιοι πίνακες
5. Ορίζουσες και ιδιότητες οριζουσών

2. Γραμμικά συστήματα

1. Ορισμοί
2. Επίλυση Crammer
3. Επίλυση Gauss
4. Ομογενές σύστημα
5. Σύστημα σε μορφή πίνακα
6. Επίλυση με αντίστροφο πίνακα

3. Διανύσματα

1. **Ορισμοί**
2. **Είδη διανυσμάτων**
3. **Πράξεις διανυσμάτων**
4. **Εσωτερικό, εξωτερικό και μικτό γινόμενο**

4. Αναλλοίωτα μεγέθη πινάκων

1. **Ορισμοί**
2. **Εύρεση ιδιοτιμών**
3. **Εύρεση ιδιοδιανυσμάτων**

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Πίνακες
&
Ορίζουσες

1. Πίνακες & Ορίζουσες

Πίνακας ονομάζεται κάθε ορθογώνια διάταξη *m*x*n* στοιχείων της μορφής

$$\underset{\sim}{A}=\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{ή} \quad \underset{\sim}{A}=\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{bmatrix}$$

m (=πλήθος γραμμών), *n* (=πλήθος στηλών)

1. Πίνακες & Ορίζουσες

Τα $\alpha_{11}, \alpha_{12}, ..., \alpha_{mn}$ πρέπει να είναι **ομοειδή** δηλ. να ανήκουν στο ίδιο σύνολο.

Στα πλαίσια του δικού μας μαθήματος είναι **πραγματικοί** εκτός αν αναφέρεται ρητώς κάτι διαφορετικό.

1. Πίνακες & Ορίζουσες

Αν $\alpha_{i,j} \in R$, i=1,..., m, j=1,... , n τότε λέμε

ο πίνακας ανήκει στο σύνολο *M* όλων των πινάκων μεγέθους *m*x*n*

και συμβολίζουμε $\boxed{\underset{\sim}{A} \in \mathrm{M}_{mxn}(R)}$

1. Πίνακες & Ορίζουσες

Αν $m = n$ τότε ο πίνακας ονομάζεται

$\boxed{\textbf{τετραγωνικός πίνακας διάστασης n}}$

και συμβολίζουμε $\boxed{\underset{\sim}{A} \in \mathrm{M}_n(R)}$

1. Πίνακες & Ορίζουσες

Ισότητα πινάκων: $\boxed{\underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{B} \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij} \forall i, j}$

Δυο πίνακες είναι ίσοι αν έχουν ένα προς ένα <u>όλα</u> τα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα

βρίσκονται σε αντίστοιχες θέσεις

1. Πίνακες & Ορίζουσες

Πίνακας στήλη:

$$\underset{\sim}{S} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix}$$

1. Πίνακες & Ορίζουσες

Πίνακας γραμμή: $\underset{\sim}{G} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \end{bmatrix}$

1. Πίνακες & Ορίζουσες

Πίνακας κλιμακωτός (ή τριγωνικός) άνω:

$$\underset{\sim}{K}_a = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ 0 & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}$$

1. Πίνακες & Ορίζουσες

Πίνακας κλιμακωτός (ή τριγωνικός) κάτω:

$$\underset{\sim}{K}_k = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}$$

1. Πίνακες & Ορίζουσες

Μοναδιαίος τετραγωνικός πίνακας:

$$\underset{\sim}{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

1. Πίνακες & Ορίζουσες

Πρόσθεση/Αφαίρεση πινάκων:

$$\underset{\sim}{C} = \underset{\sim}{A} \pm \underset{\sim}{B} \Leftrightarrow c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij} \forall i, j$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} \pm b_{11} & \alpha_{12} \pm b_{12} & \dots & \alpha_{1n} \pm b_{1n} \\ \alpha_{21} \pm b_{21} & \alpha_{22} \pm b_{22} & \dots & \alpha_{2n} \pm b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \alpha_{m1} \pm b_{m1} & \alpha_{m2} \pm b_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \pm b_{mn} \end{bmatrix}$$

1. Πίνακες & Ορίζουσες

Δυο πίνακες μπορούν να προστεθούν ή να αφαιρεθούν μόνο όταν έχουν <u>και οι δυο</u> τις ίδιες διαστάσεις και μάλιστα το αποτέλεσμα έχει και αυτό τις ίδιες διαστάσεις.

1. Πίνακες & Ορίζουσες

Παράδειγμα:

$$\underset{\sim}{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{B} = \begin{bmatrix} -5 & 6 \\ 7 & -8 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{A} + \underset{\sim}{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 & 6 \\ 7 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-5 & 2+6 \\ 3+7 & 4-8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 8 \\ 10 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{A} - \underset{\sim}{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -5 & 6 \\ 7 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+5 & 2-6 \\ 3-7 & 4+8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ -4 & 12 \end{bmatrix}$$

1. Πίνακες & Ορίζουσες

Ιδιότητες πρόσθεσης:

1. Μεταθετική $\underset{\sim}{A}+\underset{\sim}{B}=\underset{\sim}{B}+\underset{\sim}{A}$
2. Προσεταιριστική $\underset{\sim}{A}+\left(\underset{\sim}{B}+\underset{\sim}{C}\right)=\left(\underset{\sim}{A}+\underset{\sim}{B}\right)+\underset{\sim}{C}$
3. Ουδέτερο στοιχείο $\underset{\sim}{A}+\underset{\sim}{0}=\underset{\sim}{0}+\underset{\sim}{A}=\underset{\sim}{A}$
4. Αντίθετο στοιχείο $\underset{\sim}{A}+\left(-\underset{\sim}{A}\right)=\left(-\underset{\sim}{A}\right)+\underset{\sim}{A}=\underset{\sim}{0}$
5. Ισοδυναμία $\underset{\sim}{A}+\underset{\sim}{B}=\underset{\sim}{A}+\underset{\sim}{C}\Leftrightarrow\underset{\sim}{B}=\underset{\sim}{C}$

1. Πίνακες & Ορίζουσες

Εξωτερικός πολλαπλασιασμός :

$$\underset{\sim}{B} = \lambda \underset{\sim}{A} \Leftrightarrow b_{ij} = \lambda a_{ij} \forall i, j$$

$$\lambda \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{bmatrix}$$

1. Πίνακες & Ορίζουσες

Παράδειγμα:

$$\underset{\sim}{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = 7$$

$$\lambda \underset{\sim}{A} = 7 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \times 1 & 7 \times 2 \\ 7 \times 3 & 7 \times 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 14 \\ 21 & 28 \end{bmatrix}$$

1. Πίνακες & Ορίζουσες

Ιδιότητες εξωτερικού πολλαπλασιασμού:

ΠΡΟΘΕΣΗ ΠΙΝΑΚΩΝ

ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΣ ΠΟΛΛ/ΜΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

1. $(\lambda + \mu)\underset{\sim}{A} = \lambda \underset{\sim}{A} + \mu \underset{\sim}{A}$
2. $\lambda\left(\underset{\sim}{A} + \underset{\sim}{B}\right) = \lambda \underset{\sim}{A} + \lambda \underset{\sim}{B}$
3. $\lambda\left(\mu \underset{\sim}{A}\right) = (\lambda \mu)\underset{\sim}{A}$
4. $1\underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{A}$

ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΣ ΠΟΛΛ/ΜΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

1. Πίνακες & Ορίζουσες

Ιδιότητες εξωτερικού πολλαπλασιασμού:

ΜΗΔΕΝΙΚΟΣ ΠΙΝΑΚΑΣ

5. $0\underset{\sim}{A}=\underset{\sim}{0}$

ΜΗΔΕΝ

6. $\lambda\underset{\sim}{0}=\underset{\sim}{0}$
7. $\lambda\underset{\sim}{A}=\lambda\underset{\sim}{B}\Leftrightarrow\underset{\sim}{A}=\underset{\sim}{B},\quad\lambda\neq 0$
8. $\lambda\underset{\sim}{A}=\mu\underset{\sim}{A}\Leftrightarrow\lambda=\mu,\quad\underset{\sim}{A}\neq\underset{\sim}{0}$

1. Πίνακες & Ορίζουσες

Εσωτερικός πολλαπλασιασμός:

$$\underset{\sim}{A} \in \mathrm{M}_{mxk}(R),\ \underset{\sim}{B} \in \mathrm{M}_{kxn}(R),\ \underset{\sim}{C} \in \mathrm{M}_{mxn}(R)$$

$$\underset{\sim}{C} = \underset{\sim}{A} \cdot \underset{\sim}{B} \Leftrightarrow \boxed{c_{ij} = \sum_{p=1}^{k} a_{ip} b_{pj}, \forall i, j}$$

1. Πίνακες & Ορίζουσες

Εσωτερικός πολλαπλασιασμός:

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1k} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2k} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mk} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \dots & b_{kn} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha_{11}b_{11}+\alpha_{12}b_{21}+\dots+\alpha_{1k}b_{k1} & \alpha_{11}b_{12}+\alpha_{12}b_{22}+\dots+\alpha_{1k}b_{k2} & \dots & \alpha_{11}b_{1n}+\alpha_{12}b_{2n}+\dots+\alpha_{1k}b_{kn} \\ \alpha_{21}b_{11}+\alpha_{22}b_{21}+\dots+\alpha_{2k}b_{k1} & \alpha_{21}b_{12}+\alpha_{22}b_{22}+\dots+\alpha_{2k}b_{k2} & \dots & \alpha_{21}b_{1n}+\alpha_{22}b_{2n}+\dots+\alpha_{2k}b_{kn} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \alpha_{m1}b_{11}+\alpha_{m2}b_{21}+\dots+\alpha_{mk}b_{k1} & \alpha_{m1}b_{12}+\alpha_{m2}b_{22}+\dots+\alpha_{mk}b_{k2} & \dots & \alpha_{m1}b_{1n}+\alpha_{m2}b_{2n}+\dots+\alpha_{mk}b_{kn} \end{bmatrix}$$

1. Πίνακες & Ορίζουσες

Δυο πίνακες μπορούν να πολλαπλασιαστούν εσωτερικά μόνον όταν το πλήθος των στηλών του πρώτου είναι ίσο με το πλήθος των γραμμών του δεύτερου.

1. Πίνακες & Ορίζουσες

Παράδειγμα:

$$\underset{\sim}{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{B} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{A} \cdot \underset{\sim}{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1\times 5 + 2\times 7 & 1\times 6 + 2\times 8 \\ 3\times 5 + 4\times 7 & 3\times 6 + 4\times 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{bmatrix}$$

1. Πίνακες & Ορίζουσες

Στον εσωτερικό πολλαπλασιασμό <u>δεν ισχύει η μεταθετική ιδιότητα</u>.

$$\underset{\sim}{A} \cdot \underset{\sim}{B} \neq \underset{\sim}{B} \cdot \underset{\sim}{A}$$

1. Πίνακες & Ορίζουσες

Παράδειγμα:

ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΟΙ !!!!

$$\underset{\sim}{A}=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{B}=\begin{bmatrix}-3 & 2\\ 1 & -1\end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{A}\cdot\underset{\sim}{B}=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-3 & 2\\ 1 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-6-1 & 4+1\\ -3+0 & 2-0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-7 & 5\\ -3 & 2\end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{B}\cdot\underset{\sim}{A}=\begin{bmatrix}-3 & 2\\ 1 & -1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-6+2 & 3+0\\ 2-1 & -1-0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4 & 3\\ 1 & -1\end{bmatrix}$$

1. Πίνακες & Ορίζουσες

Δυνάμεις πινάκων:

$$\underset{\sim}{A}^0 = \underset{\sim}{I}$$
$$\underset{\sim}{A}^1 = \underset{\sim}{A}$$
$$\underset{\sim}{A}^2 = \underset{\sim}{A} \cdot \underset{\sim}{A}$$
$$\underset{\sim}{A}^3 = \underset{\sim}{A}^2 \cdot \underset{\sim}{A}$$
$$\ldots$$
$$\underset{\sim}{A}^n = \underset{\sim}{A}^{n-1} \cdot \underset{\sim}{A}$$

Οι δυνάμεις μπορούν να οριστούν μόνο σε <u>τετραγωνικούς</u> πίνακες.

1. Πίνακες & Ορίζουσες

Αντίστροφος ενός πίνακα ονομάζεται ένας άλλος πίνακας ο οποίος **αν πολλαπλασιαστεί και από τις δυο μεριές με τον αρχικό** δίνει τον **μοναδιαίο πίνακα**.

$$\underset{\sim}{A}^{-1} \text{ αντίστροφος του } \underset{\sim}{A} \Leftrightarrow$$

$$\underset{\sim}{A} \cdot \underset{\sim}{A}^{-1} = \underset{\sim}{A}^{-1} \cdot \underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{I}$$

1. Πίνακες & Ορίζουσες

Αντίστροφο έχουν <u>μόνο οι τετραγωνικοί πίνακες.</u>

$$\boxed{\underset{\sim}{A}\cdot\underset{\sim}{A}^{-1}=\underset{\sim}{A}^{-1}\cdot\underset{\sim}{A}=\underset{\sim}{I}}$$

1. Πίνακες & Ορίζουσες

Μια εφαρμογή (άσκηση):

Έστω ο *n x n* πίνακας A για τον οποίο είναι γνωστό ότι $A^2 + 2A = 0$. Να λυθεί η εξίσωση: $A – X = A \times X$

$$\underset{\sim}{A}^2+2\underset{\sim}{A}=\underset{\sim}{0} \Leftrightarrow \underset{\sim}{A}^2+2\underset{\sim}{A}+\underset{\sim}{I}=\underset{\sim}{I} \Leftrightarrow \left(\underset{\sim}{A}+\underset{\sim}{I}\right)^2=\underset{\sim}{I} \Leftrightarrow \left(\underset{\sim}{A}+\underset{\sim}{I}\right)\left(\underset{\sim}{A}+\underset{\sim}{I}\right)=\underset{\sim}{I}$$

Άρα $\left(\underset{\sim}{A}+\underset{\sim}{I}\right)^{-1}=\underset{\sim}{A}+\underset{\sim}{I}$

Επίσης $\underset{\sim}{A}-\underset{\sim}{X}=\underset{\sim}{A}\cdot\underset{\sim}{X} \Leftrightarrow \underset{\sim}{A}=\underset{\sim}{A}\cdot\underset{\sim}{X}+\underset{\sim}{X} \Leftrightarrow \underset{\sim}{A}=\left(\underset{\sim}{A}+\underset{\sim}{I}\right)\cdot\underset{\sim}{X} \Leftrightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} \underset{\sim}{X}=\left(\underset{\sim}{A}+\underset{\sim}{I}\right)^{-1}\cdot\underset{\sim}{A} \Leftrightarrow \underset{\sim}{X}=\left(\underset{\sim}{A}+\underset{\sim}{I}\right)\cdot\underset{\sim}{A} \Leftrightarrow \underset{\sim}{X}=\underset{\sim}{A}^2+\underset{\sim}{A} \\ \text{Τέλος } \underset{\sim}{A}^2+2\underset{\sim}{A}=\underset{\sim}{0} \Leftrightarrow \underset{\sim}{A}^2+\underset{\sim}{A}+\underset{\sim}{A}=\underset{\sim}{0} \Leftrightarrow \underset{\sim}{A}^2+\underset{\sim}{A}=-\underset{\sim}{A} \end{array}\right\} \underset{\sim}{X}=-\underset{\sim}{A}$$

1. Πίνακες & Ορίζουσες

Ο κοινός παράγοντας θέλει πολλή προσοχή.

$$\boxed{\underset{\sim}{A}\cdot\underset{\sim}{B}+\underset{\sim}{A}\cdot\underset{\sim}{C}} \qquad \cancel{\left(\underset{\sim}{B}+\underset{\sim}{C}\right)\underset{\sim}{A}} \qquad \boxed{\underset{\sim}{A}\cdot\left(\underset{\sim}{B}+\underset{\sim}{C}\right)}$$

$$\boxed{\underset{\sim}{A}\cdot\underset{\sim}{B}+\underset{\sim}{A}} \qquad \cancel{\underset{\sim}{A}\cdot\left(\underset{\sim}{B}+1\right)} \qquad \boxed{\underset{\sim}{A}\cdot\left(\underset{\sim}{B}+\underset{\sim}{I}\right)}$$

ΛΑΘΟΣ !!!!

1. Πίνακες & Ορίζουσες

Μια ακόμη εφαρμογή (άσκηση):

Έστω ο πίνακας $\underset{\sim}{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$. Να λυθεί η εξίσωση $\underset{\sim}{A} \cdot \underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{A} + \underset{\sim}{I}$

$$\boxed{\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{A} + \underset{\sim}{I} \overset{\cdot \underset{\sim}{A}}{\Leftrightarrow} \quad \underset{\sim}{A}^2 \cdot \underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{A}^2 + \underset{\sim}{A}}$$

Όμως $\underset{\sim}{A}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 4\underset{\sim}{I}$

Άρα $\underset{\sim}{A}^2 \cdot \underset{\sim}{X} = 4\underset{\sim}{I} \cdot \underset{\sim}{X}$ και $\underset{\sim}{A}^2 + \underset{\sim}{A} = 4\underset{\sim}{I} + \underset{\sim}{A}$

οπότε $4\underset{\sim}{I} \cdot \underset{\sim}{X} = 4\underset{\sim}{I} + \underset{\sim}{A} \Leftrightarrow \underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{I} + \frac{1}{4}\underset{\sim}{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}$

1. Πίνακες & Ορίζουσες

Όταν πολλαπλασιάζουμε πίνακες, προσέχουμε αν ο πολλαπλασιασμός είναι από αριστερά ή από δεξιά.

$$\boxed{\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{A} + \underset{\sim}{I} \overset{\cdot \underset{\sim}{A}}{\Leftrightarrow}}$$

$$\boxed{\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{X}\underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{A}^2 + \underset{\sim}{A}}$$

ΑΠΟ ΔΕΞΙΑ

$$\boxed{\underset{\sim}{A}^2\underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{A}^2 + \underset{\sim}{A}}$$

ΑΠΟ ΑΡΙΣΤΕΡΑ

1. Πίνακες & Ορίζουσες

Όμοιοι λέγονται δυο πίνακες $\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B}$
αν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας $\underset{\sim}{P}$
τέτοιος ώστε $\boxed{\underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{P}^{-1} \cdot \underset{\sim}{A} \cdot \underset{\sim}{P}}$

1. Πίνακες & Ορίζουσες

Πίνακες όμοιοι με έναν αρχικό πίνακα προκύπτουν αν σε αυτόν κάνουμε <u>γραμμοπράξεις</u>.

γραμμικές πράξεις στα στοιχεία των **γραμμών**

1. Πίνακες & Ορίζουσες

Παράδειγμα γραμμοπράξεων:

$$\underset{\sim}{A}=\begin{bmatrix}2 & 6 & 10 & 14\\ -1 & 4 & 2 & 0\\ 1 & 10 & 12 & 14\end{bmatrix}\xrightarrow{(\Gamma_1/2)\to\Gamma_1}\begin{bmatrix}1 & 3 & 5 & 7\\ -1 & 4 & 2 & 0\\ 1 & 10 & 12 & 14\end{bmatrix}\xrightarrow{(\Gamma_1+\Gamma_2)\to\Gamma_2}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 3 & 5 & 7\\ 0 & 7 & 7 & 7\\ 1 & 10 & 12 & 14\end{bmatrix}\xrightarrow{(\Gamma_3-\Gamma_1)\to\Gamma_3}\begin{bmatrix}1 & 3 & 5 & 7\\ 0 & 7 & 7 & 7\\ 0 & 7 & 7 & 7\end{bmatrix}\xrightarrow{(\Gamma_3-\Gamma_2)\to\Gamma_3}\begin{bmatrix}1 & 3 & 5 & 7\\ 0 & 7 & 7 & 7\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

1. Πίνακες & Ορίζουσες

Κλιμακωτή μορφή ενός μη μηδενικού πίνακα ονομάζεται **ένας όμοιός του πίνακας** για τον οποίον ισχύουν:

1. Οι μη μηδενικές γραμμές του είναι πάνω από τις μηδενικές
2. Το πρώτο μη μηδενικό στοιχείο κάθε γραμμής είναι η μονάδα
3. Το πλήθος των μη μηδενικών στοιχείων κάθε μη μηδενικής γραμμής είναι μικρότερο από το πλήθος των μη μηδενικών στοιχείων της αμέσως προηγούμενης

1. Πίνακες & Ορίζουσες

Βαθμός ενός πίνακα ονομάζεται το πλήθος των μη μηδενικών γραμμών **της κλιμακωτής μορφής του**.

$$\boxed{\underset{\sim}{A}} \longrightarrow \boxed{rank\left(\underset{\sim}{A}\right)}$$

1. Πίνακες & Ορίζουσες

Ένα παράδειγμα:

$$\underset{\sim}{A}=\begin{bmatrix} 2 & 6 & 10 & 14 \\ -1 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 10 & 12 & 14 \end{bmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 7 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{(\Gamma_2/7)\rightarrow\Gamma_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow rank(\underset{\sim}{A})=2$$

1. Πίνακες & Ορίζουσες

Ορίζουσα ονομάζεται η γραμμική απεικόνιση

$$\left| \ \right| : M_n(R) \to R$$

Ορίζουσα έχουν μόνο οι τετραγωνικοί πίνακες.

Η ορίζουσα ενός πίνακα είναι αριθμός.

1. Πίνακες & Ορίζουσες

Πως υπολογίζουμε τις ορίζουσες.

$$\underset{\sim}{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

2x2

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

1. Πίνακες & Ορίζουσες

Πως υπολογίζουμε τις ορίζουσες.

ΕΠΙΛΕΓΩ ΟΠΟΙΑΔΗΠΟΤΕ ΓΡΑΜΜΗ ή ΣΤΗΛΗ

$$\underset{\sim}{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

3x3

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = \ldots$$

ΕΝΑΛΛΑΞ ΠΡΟΣΗΜΑ

1. Πίνακες & Ορίζουσες

Πως υπολογίζουμε τις ορίζουσες.

$$\underset{\sim}{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

nxn

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \dots + (-1)^{n+1} a_{1n}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n-1} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn-1} \end{vmatrix} = \dots$$

1. Πίνακες & Ορίζουσες

Ένα παράδειγμα:

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} + 7\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$2(-9+8)-5(-18-20)+7(-12-15)=$$

$$-2+190-189=-1$$

1. Πίνακες & Ορίζουσες

Ιδιότητες οριζουσών:

Η ορίζουσα ενός **άνω** ή **κάτω τριγωνικού** πίνακα ισούται με το **γινόμενο των διαγώνιων** στοιχείων του.

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 0\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -3\times 2\times 3$$

1. Πίνακες & Ορίζουσες

Ιδιότητες οριζουσών:

Αν **εναλλάξουμε** δυο γραμμές ή στήλες του πίνακα, η ορίζουσά του **αλλάζει πρόσημο**.

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 5 = 1$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 5 - 6 = -1$$

1. Πίνακες & Ορίζουσες

Ιδιότητες οριζουσών:

$$\boxed{\left|\underset{\sim}{A}\cdot\underset{\sim}{B}\right| = \left|\underset{\sim}{A}\right|\left|\underset{\sim}{B}\right|, \forall \underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B} \in M_n\left(\square\right)}$$

1. Πίνακες & Ορίζουσες

Ιδιότητες οριζουσών:

Αν **δυο γραμμές** ή **στήλες** του πίνακα είναι **ίσες** ή **ανάλογες**, η ορίζουσά του είναι **μηδενική**.

Να δειχθεί με βάση το προηγούμενο.

1. Πίνακες & Ορίζουσες

Ιδιότητες οριζουσών:

Αν **μια γραμμή** ή **στήλη** ενός πίνακα πολλαπλασιαστεί με έναν πραγματικό αριθμό, τότε **όλη η ορίζουσα** πολλαπλασιάζεται με τον ίδιο αριθμό.

$$\boxed{\left|\lambda \underset{\sim}{A}\right| = \lambda^{n}\left|\underset{\sim}{A}\right|, \forall \underset{\sim}{A} \in M_{n}(R)}$$

1. Πίνακες & Ορίζουσες

Προσαρτημένος του τετραγωνικού πίνακα $\underset{\sim}{A}$ ονομάζεται ο τετραγωνικός πίνακας $adj(\underset{\sim}{A})$ που κάθε στοιχείο του είναι **το αλγεβρικό συμπλήρωμα** του αντίστοιχου στοιχείου του πρώτου πίνακα.

1. Πίνακες & Ορίζουσες

Ένα παράδειγμα:

$$\underset{\sim}{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$adj\left(\underset{\sim}{A}\right) = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -11 & 6 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Πίνακες & Ορίζουσες

Σε τι μας χρησιμεύει ο προσαρτημένος;

$$\underset{\sim}{A}^{-1} = \frac{1}{\left|\underset{\sim}{A}\right|} adj\left(\underset{\sim}{A}\right)$$

Υπάρχει ο αντίστροφος μόνον όταν η ορίζουσα **δεν είναι μηδέν**.