Ελεγχος με ανατροφοδότηση εξόδου

∘ Κατάσταση του συστήματος = μη-μετρήσιμη, χωρίς παρατηρητή !

Επιλέγουμε : $u(t) = u_e + K\,(y(t) - y_e)$ με $y_e = C x_e$

Σύστ. Κλειστού Βρόχου:

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B u_e + BK\,[y(t) - y_e]$$
$$= A x(t) + B u_e + BK\,[C x(t) - C x_e]$$
$$= (A + BK)\,x(t) + B u_e - BKC x_e$$

Για να είναι x_e = κατάσταση ισορροπίας, πρέπει:

$$(A + BKC)\,x_e + B u_e - BKC x_e = 0$$
$$\Rightarrow \boxed{A x_e + B u_e = 0}$$

Για να είναι επίσης το x_e = Σ.Ι. ασυμπτωτικά ευσταθής, πρέπει η ισορροπία $z = 0$ του συστήματος

$$\dot{z}(t) = (A + BKC)\,z(t), \quad \text{όπου } z(t) \overset{\text{ορ}}{=} x(t) - x_e$$

να είναι Ασυμπτ. Ευσταθής, δηλ. να υπολογίσουμε K:

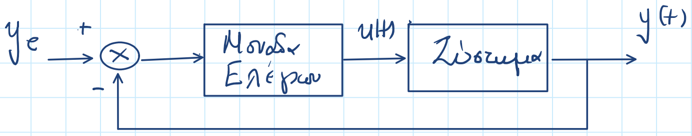
$$\boxed{Re\,\lambda_i(A + BKC) < 0}$$

Ρύθμιση Εξόδου

(ανάδραση κατάστασης ή ανάδραση εξόδου)

αν, ανάδραση εξόδου ⇝ x_e προσδιορίζεται από την σχέση $y_e = C x_e$

Εφαρμογή: (Βιομηχανικός Έλεγχος Συστημάτων)



$u(t)$: από $(y(t) - y_e)$

Αναλογικός Ρυθμιστής

$u(t) = K\,(y(t) - y_e)$ (έλεγχος μηδενικής μνήμης)

Αν το σύστημα : $\dot{x}(t) = A x(t) + B u(t)$
$y(t) = C x(t)$

τότε, κλειστός βρόχος :

$$\dot{x}(t) = A x(t) + BK\,[y(t) - y_e]$$
$$= A x(t) + BKC x(t) - BK y_e$$
$$= (A + BKC)\,x(t) - BK y_e$$

(σε αντίθεση με την προηγούμενη επιλογή νόμου ελέγχου $u(t)=u_e+K(y(t)-y_e)$)

σε ένα τέτοιο σύστημα, η κατάσταση Ισορροπίας εξαρτάται από το σημείο αφετηρίας του μεταβατικού φαινομένου!

Δηλαδή, αν x^* ≡ κατάσταση ισορροπίας του συστ. κλειστού βρόχου

$\Rightarrow y^* = Cx^*$ (αντίστοιχη έξοδος)

μετά το μεταβατικό φαινόμενο: $\Delta y^* = Cx^* - y_e$ (από την επιθυμητή y_e)

Επειδή όμως, x^* = κατάστ. ισορροπίας σημαίνει:

$$(A+BKC)x^* - BKy_e = 0$$

$\Rightarrow \Delta y^* = 0$ μόνο στα σημεία y_e : $\exists\ x^* : \begin{cases} Cx^* = y_e \\ (A+BKC)x^* - BKy_e = 0 \end{cases}$

που σημαίνει: $Ax^* = 0$ ή όταν $x^* : Cx^* = y_e \in \ker A$

Άρα, μηδενικό μόνιμο σφάλμα μόνο για y_e : $\begin{cases} Cx^* = y_e \\ Ax^* = 0 \end{cases}$

□ Προφανές σημείο $y_e = 0$

- όταν $y_e \neq 0 \Rightarrow \exists\ x^* \neq 0 : Ax^* = 0$, ⇒ θα πρέπει $A \ni$ ιδιοτιμή μηδέν (συστήματα τύπου 1)!
- (αναγκαία, όχι ικανή συνθήκη) για να μηδενίζεται το μόνιμο σφάλμα στο σημείο λειτουργίας $y_e \neq 0$

□ Ευστάθεια της y^* στην μόνιμη κατάσταση

Αν η $x^* : y^* = Cx^*$ ≃ ασυμπτωτ. ευσταθής και ορίσουμε $z(t) \triangleq x(t) - x^*$

τότε η x^* ≡ Ασυμπτ. Ευσταθής αν το $z=0$ του $\dot{z}(t) = (A+BKC)z(t)$ ≡ Ασυμπτ. Ευσταθής

δηλαδή όταν $\exists\ K : Re\lambda_i(A+BKC) < 0$

• Όμως, η Ασυμπτ. Ευστάθεια της y^* εξασφαλίζεται ακόμα κι αν $x^* \neq$ Ασ. Ευστ.

διότι, μπορεί να συμβαίνει:

$$\lim_{t\to+\infty}[y(t)-y_e] = \lim_{t\to\infty}[Cx(t)-Cx^*] = 0, \quad \text{ενώ} \quad \lim_{t\to+\infty}[x(t)-x^*] \neq 0$$

Επειδή, $y^* = Cx^*$, η απόκλιση $w(t) = y(t) - y^*$ στην μόνιμη κατάσταση

$t \to +\infty$ $\qquad$ $t \to \infty$ $\qquad$ $t \to +\infty$

Επειδή, $y^* = Cx^*$, η απόκλιση $w(t) = y(t) - y^*$ στην μόνιμη κατάσταση γράφεται: $w(t) = C\,z(t)$ με $z(t) \triangleq x(t) - x^*$

κ επειδή $\quad \dot{z}(t) = (A + BKC)\,z(t)$

$$\Rightarrow \quad \dot{w}(t) = C\,\dot{z}(t) = C\,(A+BKC)\,z(t) = $$
$$= CA\,z(t) + CBK\,w(t)$$

(για το επαυξημένο σύστημα:)

η $\begin{bmatrix} \dot{w}(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} CBK & CA \\ 0 & A+BKC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(t) \\ z(t) \end{bmatrix}$ με w_0, z_0: $w_0 = C z_0$ (όχι ανεξάρτητες)

□ η επιλογή της μήτρας K γίνεται για την Ασ. Ευσ. της εξόδου στην μόνιμη κατάσταση $\Rightarrow$ K δεν επηρεάζει το μόνιμο σφάλμα

Αναλογικός - Ολοκληρωτικός Ρυθμιστής

Για να μηδενίσουμε το μόνιμο σφάλμα, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε έναν δυναμικό ρυθμιστή ανατροφοδότησης εξόδου της μορφής:

$$u(t) = K_p\,(y(t) - y_e) + K_I\, z(t)$$

με $\quad \dot{z}(t) \triangleq y(t) - y_e$

Τότε, συσ. κλειστού βρόχου: $\quad \dot{x}(t) = A x(t) + B\left[K_p (y(t) - y_e)\right] + BK_I\, z(t)$

$\qquad \dot{z}(t) = y(t) - y_e$

η
$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + BK_pC & BK_I \\ C & \emptyset \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} BK_p \\ 1 \end{bmatrix} y_e$$

Τότε, μία κατάσταση:

$\begin{bmatrix} x^* \\ z^* \end{bmatrix}$ = κατασ. ισορροπίας άν:

ισχύει: $\begin{bmatrix} A + BK_pC & BK_I \\ C & \emptyset \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^* \\ z^* \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} BK_p \\ 1 \end{bmatrix} y_e = 0$

ή $y^* = Cx^*$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} Ax^* + BK_P y^* + BK_I z^* - BK_P y = 0 \\ y^* - y_e = 0 \end{cases}$

Αυτές ικανοποιούνται $\Longleftrightarrow$ $Ax^* + BK_I z^* = 0$

$y_e = Cx^*$

Άρα, για επιδομένο σημείο λειτουργίας y_e, το μόνιμο σφάλμα $\equiv 0$ αν $\exists$ K_I:

(το αλγεβρ. σύστημα) $\begin{bmatrix} A & BK_I \\ C & \emptyset \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^* \\ z^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \emptyset \\ y_e \end{bmatrix}$, έχει λύση

("δομική" συνθήκη)

- Επιπλέον, για Ισορροπία $\equiv$ Ασυμπτ. Ευσταθή πρέπει:

$$K_P, \; K_I \; : \quad Re\,\lambda \begin{pmatrix} A + BK_P C & BK_I \\ C & \emptyset \end{pmatrix} < \emptyset$$

Παρατηρήσεις:

- το e_{ss} δεν επηρεάζεται από την K_P
- ο ρυθμιστής $u(t) = K_P(y(t) - y_e) + K_I z(t)$ $\equiv$ αναλογικός-ολοκληρωτικός ρυθμιστής

δηλαδή: $u(t) = K_P(y(t) - y_e) + K_I \int_{t_0}^{t} (y(\tau) - y_e)\, d\tau$

(PI έλεγχος!)

Παρακολούθηση Εξόδου

παρακολούθηση τροχιάς $y^*(t)$

$u(t) = K(y(t) - y^*(t))$ (γενική μορφή)

Τότε, συστ. κλειστού βρόχου:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + BK[y(t) - y^*(t)] =$$
$$= Ax(t) + BKCx(t) - BKy^*(t)$$
$$= (A + BKC)x(t) - BKy^*(t)$$

και η απόκλιση $\Delta y(t) \overset{\text{def}}{=} y(t) - y^*(t) \equiv Cx(t) - y^*(t)$

θα μηδενίζεται στην μόνιμη κατάσταση, αν $\exists$ $x^*(t)$:

$$\boxed{y^*(t) = Cx^*(t)}$$

Προφανώς, θα ισχύει ακόμα:

$\dot{x}^*(t) = (A + BKC)x^*(t) - BKy^*(t)$ ($x^*(t)$ = τροχιά του συστ. κλειστού

Βρόχου)

$$\Rightarrow \boxed{\dot{x}^*(t) = A x^*(t)}$$

$\Rightarrow$ $e_{ss} \equiv 0$ μόνο για $y^*(t)$: $\exists$ $x^*(t)$ του συσ. Ανοικτού Βρόχου

$\dot{x}(t) = Ax(t)$

έτσι ώστε : $y^*(t) = C x^*(t)$

Εφαρμογή : Έστω $y^*(t) = \alpha t$, $\alpha \in \mathbb{R}^p$

θα πρέπει $\exists$ $x^*(t)$: $\alpha t = C x^*(t)$ $\Rightarrow$ $x^*(t) = \beta t$, $\beta \in \mathbb{R}^n$

Αλλά, οι λύσεις της $\dot{x}(t) = Ax(t)$, είναι της μορφής :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m_i} t^{j-1} e^{\lambda_i t} B_{ij}$$

, με $\lambda_1, \dots \lambda_n$ ≡ ιδιοτιμές A
m_i ≡ πολλαπλότης

Για να ισχύει :

$$x^*(t) = \beta t = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m_i} t^{j-1} e^{\lambda_i t} B_{ij} \quad , \forall t$$

θα πρέπει $\exists$ i, j : $t^{j-1} e^{\lambda_i t} B_{ij} = \beta t$

Ισχύει μόνο όταν $\boxed{\lambda_i = 0, \; j = 2}$

> Θεώρημα : Αναγκαία συνθήκη για να υπάρχει έλεγχος $u(t) = K(y(t) - y^*(t))$
> ώστε $y^*(t) = \alpha t$, είναι η A να έχει διπλή μηδενική ιδιοτιμή

(σύστημα τύπου 2) !

☐ Αν $y^*(t) = \alpha t^2$ . . .