Παρατηρητές Γ.Χ.Α. Συστημάτων

Υπόθεση : η μεταβ. κατάστασης ≠ μετρήσιμη $\quad \left(u = u_c + K(x - x_e) \right)$

"Εκτίμηση του μεταβ. κατάστασης" $\quad$ Πώς υλοποιείται ο νόμος ελέγχου;

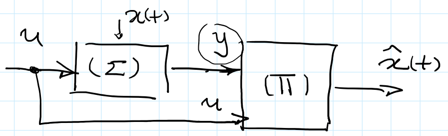
- Δοθέντων των A, B, C, D (πρότυπο Κ.Ε.), με $u(t) \approx$ είσοδο, $y(t) \approx$ μετρήσεις

  Αν γνωρίζαμε την αρχ. τιμή $x_0 \equiv x(t_0)$ $\Rightarrow$ λύση Δ.Ε.

  $\Rightarrow x(t) \quad \forall\, t \geq t_0$

  Αλλά, η $x_0 \equiv$ άγνωστη (μη-μετρήσιμη)

  "Παρατηρητής" ≡ δυναμικό σύστημα με εισόδους $u(t)$, $y(t)$ και έξοδο $\hat{x}(t)$ ≡ εκτίμηση της κατάστασης του αρχικού συστήματος



ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΤΟΥ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ

Δύο Μέθοδοι : 1. Απ' ευθείας εκτίμηση ("batch processing")

2. Δυναμικός Παρατηρητής

□ 1. Απ' ευθείας εκτίμηση διαν. κατάστασης

Ας θεωρήσουμε (για ευκολία στις πράξεις) ένα σύστημα διακριτού χρόνου με πρότυπο:

$$x(k+1) = A x(k) + B u(k)$$

$$y(k) = C x(k)$$

Θέλουμε να εκτιμήσουμε το διάνυσμα $x(k)$ με δεδομένα τις ακολουθίες:

$$y(k),\ y(k-1),\ \dots$$

$$u(k),\ u(k-1),\ \dots$$

Ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} y(k-n+1) &= C^T x(k-n+1) \\ y(k-n+2) &= C^T A x(k-n+1) + C^T B u(k-n+1) \\ &\ \vdots \\ y(k) &= C^T A^{n-1} x(k-n+1) + C^T A^{n-2} B u(k-n+1) + \dots + C^T B u(k-1) \end{aligned}$$

Συνοπτικά, γράφονται ως:

$$\begin{bmatrix} y(k-n+1) \\ y(k-n+2) \\ \vdots \\ y(k) \end{bmatrix} = R\, x(k-n+1) + \underline{Q} \begin{bmatrix} u(k-n+1) \\ u(k-n+2) \\ \vdots \\ u(k-1) \end{bmatrix}$$

όπου $R \equiv$ μήτρα παρατηρησιμότητας $= \begin{bmatrix} C^T \\ C^T A \\ \vdots \\ C^T A^{n-1} \end{bmatrix}$ και $\underline{Q} \equiv \begin{bmatrix} \emptyset & \emptyset & \dots & \emptyset \\ C^T B & \emptyset & & \emptyset \\ \vdots & & & \\ C^T A^{n-2} B & C^T A^{n-3} B & \dots & C^T B \end{bmatrix}$

Αν το σύστημα είναι παρατηρήσιμο $\Leftrightarrow$ R είναι αντιστρέψιμος, και άρα

$$x(k-n+1) = R^{-1}\begin{bmatrix} y(k-n+1) \\ \vdots \\ y(k) \end{bmatrix} - R^{-1}\underline{O}\begin{bmatrix} u(k-n+1) \\ \vdots \\ u(k-L) \end{bmatrix}$$

Τότε, χρησιμοποιώντας την δυναμική εξίσωση του προτύπου, κατ' επανάληψη:

$$x(k-n+2) = Ax(k-n+1) + Bu(k-n+1) = \dots$$

$$x(k-n+3) = Ax(k-n+2) + Bu(k-n+2) = \dots$$

$$\vdots$$

$$x(k) = A^{n-1}R^{-1}\begin{bmatrix} y(k-n+1) \\ \vdots \\ y(k) \end{bmatrix} + \Psi\begin{bmatrix} u(k-n+1) \\ \vdots \\ u(k-L) \end{bmatrix}$$

όπου $\Psi = [A^{n-2}B,\ A^{n-3}B, \dots\ B] - A^{n-1}R^{-1}\underline{O}$

□ 2. Δυναμικός Παρατηρητής

Πρότυπο Κ.Ε. Παρατηρητή

Το γραμμικό Χ.Α. σύστημα:

$$\dot{\hat{x}}(t) = \hat{A}\hat{x}(t) + \hat{B}u(t) + Ly(t), \qquad \hat{x}(0) = \hat{x}_0$$

για να είναι ένας παρατηρητής πρέπει: $\hat{x}(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} x(t)$ ("Πρόβλημα ρύθμισης")

Ορίζουμε την "απόκλιση": $\varepsilon(t) \triangleq \hat{x}(t) - x(t) \equiv$ σφάλμα εκτίμησης

° πώς συμπεριφέρεται το $\varepsilon(t)$;

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}(t) &= \dot{\hat{x}}(t) - \dot{x}(t) \\ &= \hat{A}\hat{x}(t) + \hat{B}u(t) + Ly(t) - Ax(t) - Bu(t) \\ &= \hat{A}[\varepsilon(t) + x(t)] + LCx(t) + \hat{B}u(t) - Ax(t) - Bu(t)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \dot{\varepsilon}(t) = \hat{A}\varepsilon(t) + [\hat{A} - LC - A]x(t) + [\hat{B} - B]u(t)$$

Για να έχουμε $\varepsilon(t) \to 0$, ανεξάρτητα των $x(t)$, $u(t)$, πρέπει:

1. $\hat{A} = A + LC$
2. $\hat{B} = B$
3. $\hat{A}$ = ευσταθής

τότε $\boxed{\dot{\varepsilon}(t) = \hat{A}\varepsilon(t)}$, $e(0) = \hat{x}_0 - x_0$

Άρα, το δυναμικό σύστημα του παρατηρητή, έχει πρότυπο:

$$\dot{\hat{x}}(t) = (A + LC)\hat{x}(t) + Bu(t) + Ly(t)$$

ή $\boxed{\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + L[C\hat{x}(t) + y(t)]}$

και $\hat{y}(t) = \hat{x}(t)$

Παρατηρούμε ότι:

∘ Αν $(A+LC)$ ευσταθής $\Rightarrow \lim_{t\to\infty} e(t) = 0, \quad \forall\ e_0 \in \mathbb{R}'$

∘ Αν L τέτοιο ώστε : $|Re\,\lambda(A+LC)|$ >> μεγάλες (κατ' απόλυτο τιμή)
↳ ιδιοτιμές

$\Rightarrow$ γρήγορη σύγκλιση $\Rightarrow$

άρα, "Πρακτικά" : $\hat{x}(t, t_0, \hat{x}_0) \equiv x(t, t_0, x_0)$

ΣΧΕΔΙΑΣΗ ΠΑΡΑΤΗΡΗΤΩΝ Γ.Χ.Α. ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

∘ παρατηρητές πλήρους τάξης $(=n)$
–//– μειωμένης –//– $m<n$

ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν (A,C) παρατηρήσιμο, δοθέντος $\Lambda = \{\lambda_1, \ldots \lambda_n\}$, (← $\lambda_i \approx 10\times$ γρηγορότερες από τις ιδιοτιμές του A)
τότε, $\exists$ πίνακα $L \in \mathbb{R}^{n\times p}$ ώστε $\Lambda \equiv$ ιδιοτιμές του $A+LC$
($\lambda_i \neq$ ιδιοτιμές του A)

Προσδιορισμός του πίνακα L έτσι ώστε : $\lambda_i(A+LC) = \Lambda = \{\lambda_1, \ldots \lambda_n\}$
(Γενική Περίπτωση)

Έστω $\lambda_1, \ldots \lambda_q$, $i = \ldots q$: $\neq$ ιδιοτιμές του πίνακα A

λ_i , $i = q+1, \ldots n$ = ευσταθείς ιδιοτιμές A

Σχηματίζουμε τον πίνακα $U = \begin{bmatrix} u_1^T \\ u_2^T \\ \vdots \\ u_q^T \\ \hdashline u_{q+1} \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$

u_i^T, $i = q+1, \ldots n$ $\equiv$ αρισ. ιδιοδιανύσματα της μήτρας $A \sim \lambda_i(A)$

u_i^T, $i = 1, \ldots q$

$$\boxed{u_i^T = v_i^T C (\lambda_i \mathbb{1}_n - A)^{-1}}$$

$v_i^T \in \mathbb{R}^{l\times m}$, $i = 1, \ldots q$
↳ αυθαίρετα, μη-μηδενικά διαν.

$\Rightarrow U$ πλήρους τάξης $\Rightarrow \exists\ U^{-1}$

Σχηματίζουμε τον πίνακα $V = \begin{bmatrix} v_1^T \\ v_2^T \\ \vdots \\ v_q^T \\ \hdashline v_{q+1} \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$

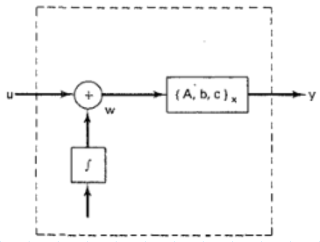
v_i^T , $i = q+1, \ldots n$ = μηδενικά διανύσματα γραμμής

Τότε, $\boxed{L = U^{-1} V}$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

(Integral Feedback)

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + bu + bw & (w \equiv \text{σταθ. διαταραχή}) \\ \dot{w} = \emptyset \\ y = Cx \end{cases}$$



Ιδέα: σχεδ. παρατηρητή $\rightsquigarrow \hat{w} \wedge u = -\hat{w}$

Παρατηρητής για το "Επικαυξημένο Σύστημα":

Έστω $\tilde{x} \triangleq \begin{pmatrix} x \\ w \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} \dot{\hat{x}} \\ \dot{\hat{w}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & b \\ \emptyset & \emptyset \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{w} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b \\ \emptyset \end{pmatrix} u + \underset{\substack{\downarrow \\ (n\times 1)\times 1}}{\ell} (y - C\hat{x}) , \quad \begin{matrix} \hat{x}(0) = 0 \\ \hat{w}(0) = 0 \end{matrix}$$

Αν, $\ell = \begin{pmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \end{pmatrix}$,

τότε $$\begin{pmatrix} \dot{\hat{x}} \\ \dot{\hat{w}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A - \ell_1 C & b \\ -\ell_2 C & \emptyset \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{w} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b \\ \emptyset \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \end{pmatrix} y$$

Για παράδειγμα,

Έστω $\ell \equiv \begin{pmatrix} \emptyset \\ \ell_2 \end{pmatrix}$

τότε, $$\begin{pmatrix} \dot{\hat{x}} \\ \dot{\hat{w}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & \emptyset \\ -\ell_2 C & \emptyset \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{w} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \emptyset \\ \ell_2 \end{pmatrix} y , \quad \begin{matrix} \hat{x}(0) = 0 \\ \hat{w}(0) = 0 \end{matrix}$$

επειδή $\dot{\hat{x}}$ = χωρίς είσοδο, $\hat{x}(0) = 0 \Rightarrow \hat{x}(t) = \emptyset$

άρα, $\boxed{\dot{\hat{w}} = \ell_2 y , \quad \hat{w}(0) = 0}$

Τότε, θέτοντας,
$u = -\hat{w}$ $\Rightarrow$ "απόρριψη της διαταραχής w"

- Πότε συγκλίνει ο παρατηρητής;

☐ έστω $\alpha(s) = \det \begin{pmatrix} s\mathbb{I} - A & -b \\ \ell_2 C & s \end{pmatrix} = \det(s\mathbb{I} - A) \det\left[s + \ell_2 C (s\mathbb{I} - A)^{-1} b \right]$

$$= s\,\alpha(s) + \ell_2 b(s) = 0$$

☐ Σχεδίαση Παρατηρητών με τύπο Ackermann

$(\Sigma): \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \end{cases} \rightarrow$ (Συζυγές σύστημα) $\begin{cases} \dot{z} = A^T z + C^T u \end{cases}$

$$(\Sigma): \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \rightarrow \text{(δυαδικό σύστημα)} : \begin{cases} \dot{z} = A^T z + C^T u \\ y = B^T z \end{cases}$$

$\Rightarrow$ τ. Ackermann:

$$L = [0, \dots 0\ 1][C^T \quad C^T A^T \dots \quad C^T (A^T)^{n-1}]\, P(A^T)$$

$$F^T \equiv L = P(A) \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad P(s) \equiv \text{χ.π. του παρατηρητή}$$

Παράδειγμα:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 20{,}6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = (0 \quad 1)$$

"Έστω επιθυμητές ιδιοτιμές παρατηρητή: $\mu_1 = \mu_2 = -10$

$$R = [C^T \quad C^T A^T] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{τάξη } R = 2 \quad (\Rightarrow \text{πλήρως παρατηρήσιμο})$$

- Μέθοδος 1: (σύστημα σε παρατηρήσιμη κανονική μορφή)

$$(WR^T)^{-1} \approx \mathbb{1} \quad \text{τότε} \quad L = (\hat{\alpha} - \alpha)$$

άρ. Επιθυμητό χ.π.: $(s+10)^2 = \dots = s^2 + 20s + 100 \Rightarrow \begin{cases} \hat{\alpha}_1 = 20 \\ \hat{\alpha}_2 = 100 \end{cases}$

$$\det(s\mathbb{1} - A) = \begin{vmatrix} s & -20{,}6 \\ -1 & s \end{vmatrix} = \dots = s^2 - 20{,}6 \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = -20{,}6 \end{cases}$$

"Άρα $L = \begin{bmatrix} 120{,}6 \\ 20 \end{bmatrix}$

- Μέθοδος 2: (Απ' ευθείας Επίλυση)

εξ. σφάλμ.: $\dot{e} = (A + LC)e \Rightarrow |s\mathbb{1} - A + LC| = 0, \quad L = \begin{pmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \left| \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 20{,}6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \end{bmatrix} [0 \quad 1] \right| = \dots\dots$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} s^2 + \ell_2 s - 20{,}6 + \ell_1 = 0 \\ \rightarrow s^2 + 20s + 100 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \ell_1 = 120{,}6 \\ \ell_2 = 20 \end{array}$$

- Μέθοδος 3 (συνάρτηση $P(A)$)

$$L = P(A) \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{όπου } P(s) = (s+10)^2 = s^2 + 20s + 100$$

τότε, $P(A) = A^2 + 20 \cdot A + 100\,\mathbb{1}$

$[\ 120{,}6$

τότε, $P(A) = A^2 + 20 \cdot A + 100\, I$

$$L = \dots = \begin{bmatrix} 120,6 \\ 20 \end{bmatrix}$$

ΑΡΧΗ ΔΙΑΧΩΡΙΣΜΟΥ

Ἄν σχεδιάσουμε τόν νόμο ἐλέγχου, χρησιμοποιώντας τήν εκτίμηση $\hat{x}(t)$, αντί γιά τήν πραγματική $x(t)$, θά ἱκανοποιοῦνται οἱ προδιαγραφές τοῦ ἐλέγχου;

Εστω νόμος ελέγχου: $\hat{u} = K(\hat{x}(t) - x_e) + u_e$

Τί αλλάζει όταν $\hat{x}(t)$ αντί $x(t)$:

- Σύστημα κλειστού βρόχου:

$$\dot{x}(t) = A x(t) + BK[\hat{x}(t) - x_e] + B u_e$$

ορίζουμε: $z(t) \triangleq x(t) - x_e$ ≡ απόκλιση του $x(t)$, από x_e

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= A z(t) + A x_e + BK[\hat{x}(t) - x_e] + B u_e \\ &= A z(t) + BK[x(t) - x_e] + BK[\hat{x}(t) - x(t)] + A x_e + B u_e \\ &= (A + BK) z(t) + BK[\hat{x}(t) - x(t) \end{aligned}$$

ἄρα, $\dot{z}(t) = (A+BK) z(t) + BK\, e(t)$, $\quad e(t) \triangleq \hat{x}(t) - x(t)$

είσοδος u_e: $A x_e + B u_e = 0$

- Παρατηρητής: $\dot{e}(t) = (A + LC)\, e(t)$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{z}(t) \\ \dot{e}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A+BK & BK \\ \emptyset & A+LC \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z(t) \\ e(t) \end{pmatrix}$$

μέ ιδιοτιμές $\sim \lambda(A+BK)$, $\lambda(A+LC)$

τότε, ή ισορροπία $(z=0,\ x=0)$ ≡ Ασυμπτ. Ευσταθής

□ Ὁ σχεδιασμός τοῦ ελεγκτή & τοῦ παρατηρητή μπορούν νά γίνουν ανεξάρτητα

Παράδειγμα.

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

, ελέγξιμο + παρατηρήσιμο

Ἔστω $u = -Kx$

Συστ. Κλ. Βρόχου: $\dot{x} = Ax - BK\hat{x} =$

$$= (A - BK)x + BK(x - \hat{x})$$

ορίζουμε $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = (A - BK)x + BKe \\ \dot{e} = (A - LC)e \end{cases}$$

Επαυξ. σύστημα: $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A - BK & BK \\ \emptyset & A - LC \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ e \end{pmatrix}$

Χ.Ε. επαυξ. συστ.: $|s\mathbb{I} - A + BK| \cdot |s\mathbb{I} - A + LC| = 0$

Πιό συγκεκριμένα, γιά τό σύστημα:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 20{,}6 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

• Σχεδιασμός Ελέγχου:

Επιθυμητοί ιδιοτιμές συστ. κλειστού βρόχου: $\lambda_{1,2} = -1{,}8 \pm j2{,}4$

Υπολογίζεται $K = [29{,}6 \quad 3{,}6]$

άρα $u = -[29{,}6 \quad 3{,}6] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

"Αν θέλουμε: $u = -K\hat{x} = -[29{,}6 \quad 3{,}6] \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix}$

Γιά το σύστημα:

$|s\mathbb{I} - A| = \cdots = s^2 - 20{,}6 = s^2 + \alpha_1 s + \alpha_2 \Rightarrow \alpha_1 = 0, \ \alpha_2 = -20{,}6$

• Σχεδιασμός Παρατηρητή

Γιά τον παρατηρητή: επιλέγω ιδιοτιμές παρατηρητή $\mu_{1,2} = -8$

$(s+8)^2 = s^2 + 16s + 64 \Rightarrow \hat{\alpha}_1 = 16, \ \hat{\alpha}_2 = 64$

Υπολογισμός κέρδους L:

$L = (WR^T)^{-1}(\hat{\alpha} - \alpha) \Rightarrow \cdots \Rightarrow L = \cdots = \begin{pmatrix} 16 \\ 84{,}6 \end{pmatrix}$

$R = [C^T \quad C^T A^T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$W = \begin{bmatrix} \hat{\alpha}_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Τότε, ο παρατηρητής $\dot{\hat{x}} = (A - LC)\hat{x} + Bu + Ly$, με έξοδο $\hat{x}(t)$

επειδή $u = -K\hat{x} \Rightarrow \dot{\hat{x}} = (A - LC - BK)\hat{x} + Ly$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{\hat{x}}_1 \\ \dot{\hat{x}}_2 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} \emptyset & 1 \\ 20{,}6 & \emptyset \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 16 \\ 84{,}6 \end{bmatrix} [1 \quad 0] - \begin{bmatrix} \emptyset \\ 1 \end{bmatrix} [29{,}6 \quad 3{,}6] \right\} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} +$$

$$+\begin{bmatrix} 16 \\ 84,6 \end{bmatrix} y = \dots$$