- "διαταραχές" → επιμένουσες / → στιγμιαίες

<u>Ερώτημα</u>: φραγμένη διαταραχή ⇒ ? έξοδος φραγμένη

—//— : - άν θα επηρεάσει στην εξ λειτουργία
- πόσο κοντά - μακρυά
- πόσο μεγάλη επηρεάζεται κά όλα

Επιμένουσες διαταραχές: Ευστάθεια τροχιάς $x^*(t)\big|_{u^*(\cdot)}$ η διαταραχή

(π.χ. αεροσκάφος) ↓

BIBS - BIBO

Στιγμιαίες διαταραχές: Ευστάθεια σημείου ισορροπίας (Θεωρία Lyapunov)

"Εσωτερική" ιδιότητα

- Ευστάθεια | κατάστασης ⇒ Ευστάθεια | έξοδο

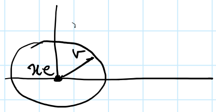
$\not\Leftarrow$ $\quad y = Cx(t)$

Σημείο Ισορροπίας: (Μη Γραμμικά Συστήματα)

$\dot{x} = f(x)$ ~ αυτόνομο σύστημα ←

$\dot{x} = f(x,t)$ ~ μη-αυτόνομο —//—

$x_e \overset{\text{ορ.}}{=} : f(x) = \emptyset \Rightarrow x_e = \dots$



- Απομονωμένο Σ.Ι. : $\exists\, r>0 : B(x_e, r) \subset \mathbb{R}^n$

$B(x_e, r) \triangleq \{ x : \|x - x_e\| \le r \}$

στην $B(x_e, r)$ $\nexists$ άλλο Σ.Ι.

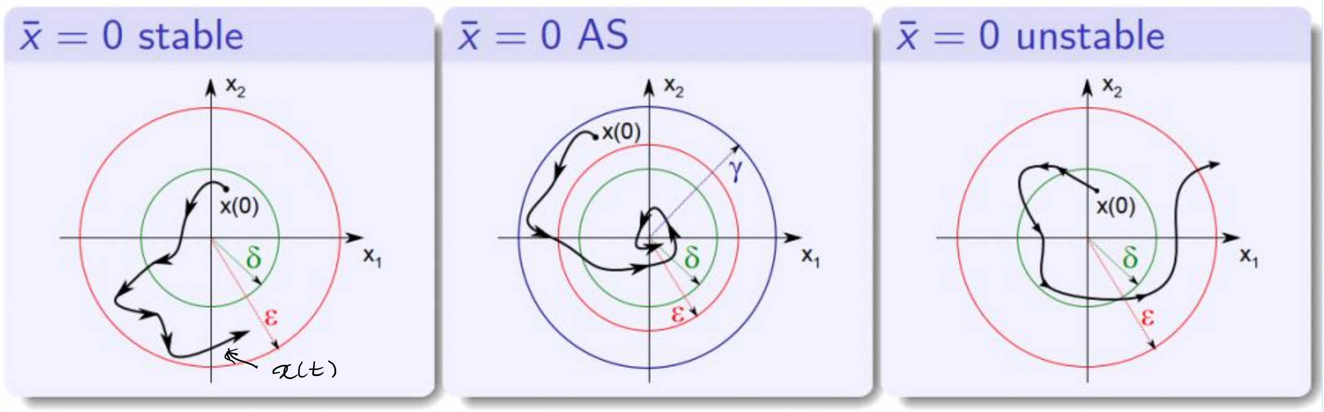
Παράδειγμα: $\dot{x} = Ax \Rightarrow Ax = 0 \; (\rightarrow (\lambda \mathbb{1} - A)x_e = 0) \Rightarrow x_e = 0$ (άν $\det A \neq \emptyset$)

άν $A : \det A = \emptyset \Rightarrow Ax = 0$ ~ άπειρες λύσεις

$\{x : Ax = \emptyset\} \subset \mathbb{R}^n$

μη-απομονωμένα Σ.Ι.

<u>Ορισμός</u>: Το Σ.Ι. $x_e = 0$ ≡ ευσταθές Lyapunov άν για $\delta(\varepsilon,t) > 0$, $\exists\, \varepsilon > 0$ έτσι ώστε: άν $\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon$, $\forall\, t \ge 0$



x_e ≡ Ασυμπτωτικά ευσταθές αν : 1) ευσταθές

"περιοχή ελκυστικότητας" → 2) $\exists\ \delta > 0 : \|x(0)\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \to +\infty} x(t) = 0$

Θεωρία Lyapunov → 1η μέθοδος (γραμμικοποίηση)
→ 2η -//- (μη-γραμμικά συστήματα)

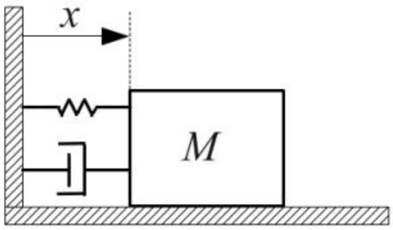
"σταθεροποίηση" ← έλεγχος γραμμικών & μη-γραμμικών

y^* ~ $(y(t) - y^*) \equiv y_e$, ? $u(t)$: $y_e(t) \to 0$

2η Μέθοδος Lyapunov : (Ευστάθεια ΧΩΡΙΣ να λυθούν οι Δ.Ε.)

Ιδέα : σύστημα → ενέργεια αποσβένεται → ακινησία = Σ.Ι.

Lyapunov direct method: a first example



Model

$$M\ddot{x} = -\underbrace{b\dot{x}|\dot{x}|}_{\text{NL damping}} - \underbrace{\left(k_0 x + k_1 x^3\right)}_{\text{NL elastic force}}$$

$b, k_0, k_1 > 0$

Defining $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}_1$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\dfrac{b}{M}x_2|x_2| - \dfrac{k_0}{M}x_1 - \dfrac{k_1}{M}x_1^3 \end{cases} \Rightarrow \bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ is stab./AS/ES ?}$$

$$D_x f = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{k_0}{M} - \dfrac{3k_1}{M}x_1^2 & -\dfrac{2b}{M}x_2 \operatorname{sgn}(x_2) \end{bmatrix} \Rightarrow D_x f\Big|_{x=\bar{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{k_0}{M} & 0 \end{bmatrix}$$

Eigenvalues: $\lambda_{1,2} = \pm j\sqrt{k_0/M}$

No conclusion on $\bar{x} = 0$ using the linearized system

συνάρτηση (βαθμωτή)

"Συνάρτηση Ενέργειας" : $V(x)$

$$V(x) = \underbrace{\frac{1}{2} m \dot{x}^2}_{\text{κινητική}} + \underbrace{\int_0^x (k_0 x + k_1 x^3)\, dx}_{\text{δυναμική}} = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k_0 x^2 + \frac{1}{4} k_1 x^4$$

- μηδενική ενέργεια ⇝ όταν $(x = 0,\ \dot{x} = 0)$, στο Σ. Ι.
- Ασυμπτωτική Ευστάθεια ≡ μηχ. ενέργεια ⟶ 0
- Αστάθεια ≡ μηχ. ενέργεια ↑

- Παράγωγος της μηχ ενέργειας ↓ ⇒ μηχ ενέργεια ↓

$\dot{V}(x)$

Συναρτήσεις "Τύπου Ενέργειας" ⇝ συναρτήσεις "γενικευμένης απόστασης"

<u>ορισμός</u>: μια συνάρτηση $V(x)$ ≡ (τοπικά) θετικά ορισμένη.

1) $V(0) = 0$

2) $V(x) > 0 \ , \forall x \neq 0$ $\qquad \forall x \in B(x_e, r)$

(καθολικά) θετικά ορισμένη $\qquad \forall x \in \mathbb{R}^n$

- V = μοναδικό ελάχιστο (Σ.Ι.)

- Πρόταση: αν $V(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, θετικά ορισμένη $\mathbb{R}^n$

$$\Rightarrow d(x,y) \approx d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

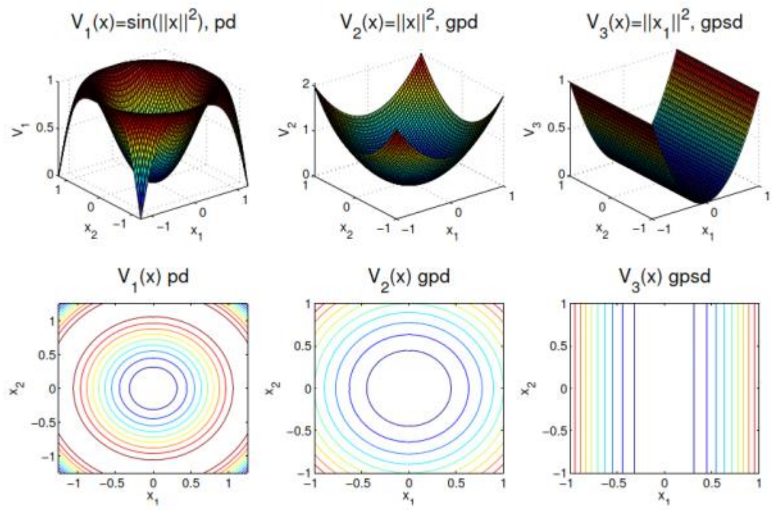
$$d(x,y) = \begin{cases} V(x) + V(y) & \text{όταν } x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}$$

αποτελεί μια απόσταση στο $\mathbb{R}^n$

□ απόσταση σημείου x από το $y = 0$:

$$d(x, 0) = V(x) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

Examples of positive definite functions



Level surfaces: $V_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) = \alpha\}$

- they do not intersect

Έστω $V(x,t)$ = positive definite (p.d.f) (τοπικά) ~ l.p.d.f

Υπολογισμός $\dot{V}(x,t)$:

$$\dot{V}(x,t) = \frac{d}{dt} V(x,t) = \frac{\partial V(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial V(x,t)}{\partial x} \cdot f(x,t) \quad \text{(μη-αυτόνομα)}$$

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x) \equiv \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V(x)}{\partial x_i} \dot{x}_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V(x)}{\partial x_i} f_i(x)$$

άρα $$\boxed{\dot{V}(x) = \nabla V(x) f(x) \quad \text{(αυτόνομα)}}$$

μεταβολή της $V(x,t)$ κατά μήκος των τροχιών του διανυσματικού πεδίου $\dot{x} = f(x,t)$ ονομάζεται "παράγωγος Lie" της $V(x,t)$ ....

Θεώρημα (Lyapunov) (2η μέθοδος)

1. Το Σ.Ι. x_e είναι ευσταθές / Lyapunov άν:

$\exists\ V(x,t)$: = l.p.d.f. & $\dot{V}(x,t) \leq \emptyset$, $\forall\ x \in B(x_e, r)$

2. άν $V(x,t) = $ l.p.d.f, ↓ (φθίνουσα)

$\dot{V}(x,t) \leq \emptyset \quad \forall\ x \in B(x_e, r)$

$\Rightarrow x_e$ = ομοιόμορφα ευσταθές

3. άν $V(x,t) = $ lpdf & $\dot{V}(x,t) < \emptyset$ (l.n.d.f)

$\Rightarrow x_e$ = ασυμπτωτικά ευσταθές $\forall\ x \in B(x_e, r)$

4. άν $V(x,t) = $ pdf, & $\dot{V}(x,t) < \emptyset$

$\Rightarrow x_e$ = καθολικά ασυμπτ. ευσταθές, $\forall\ x \in \mathbb{R}^n$

Παρατήρηση :

1. Αναγκαίες συνθήκες (όχι ικανές)

2. Άν δεν $\exists\ V(x,t)$ .... ? $\Rightarrow$ ΚΑΝΕΝΑ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ

$\sim$ άλλη επιλογή $V(x,t)$.

3. Δεν υπάρχει συγκεκριμένη διαδικασία υπολογισμού $V(x,t)$

$$V(x,t) \overset{\varphi}{\equiv} \text{συνάρτηση Lyapunov} = \{ (\ell.) \text{pdf} + \dot{V}(x,t) \leq 0 \}$$

$$V(x,t) = \{ (\ell), \text{pdf} \} \equiv \text{"υποψήφια" συν. Lyapunov}$$

4. "Περιοχή Ελκυστικότητας" του Σ.Ι. x_e : $B(x_e, \gamma)$

Παράδειγμα :

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_2$$
$$\dot{x}_2 = -x_1 - x_2 - x_2^3$$

$$\Sigma.I. \equiv x_e = \begin{pmatrix} \emptyset \\ \emptyset \end{pmatrix}$$

Έστω $V(x) = x_1^2 + x_2^2$ ("υποψήφια") $\rightsquigarrow$ pdf

$$\dot{V}(x) = 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 = 2x_1[-x_1 + x_2] + 2x_2[-x_1 - x_2 + x_2^3]$$
$$= \ldots = -2x_1^2 - 2x_2^2(1 + x_2^2)$$

$$\forall x \neq 0 \Rightarrow \dot{V}(x) < \emptyset \Rightarrow x_e = \emptyset = \text{ασυμπτωτικά ευσταθές}$$

ορισμός : περιοχή ελκυστικότητας $B(x_e, \gamma) = \{ x \in \mathbb{R}^n : \text{άν } x(0) \in B(x_e, \gamma) \Rightarrow$
$\Rightarrow \lim_{t \to +\infty} \| \varphi(t, x(0)) \| = \emptyset \}$

Η 2η μέθοδος Lyapunov σε Γραμμικά Συστήματα :

$$\dot{x} = Ax$$

- Θετικά Ορισμένοι Πίνακες

ένας $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ = pd άν $x \neq \emptyset \Rightarrow x^T M x > \emptyset$

= psd άν $x \neq \emptyset \Rightarrow x^T M x \geq \emptyset$

= nd, άν $x \neq 0 \Rightarrow -M$ = pd

Τετραγωνικός Μορφός : $M = \underbrace{\dfrac{M + M^T}{2}}_{} + \underbrace{\dfrac{M - M^T}{2}}_{}$ ($\Rightarrow$ M συμμετρικός) συμμετρικό μέρος   αντι-συμμετρικό μέρος

□ άν $M > 0$ ($\equiv$ pd) $\Rightarrow$ $V(x) = x^T M x$ = pdf

$M \geq \emptyset$ (psd) $\Rightarrow$ $V(x) = x^T M x$ = psdf

□ Ένας συμμετρικός M έχει πραγματικές ιδιοτιμές

□ Άν $M > \emptyset$, $\lambda_{min}(M)$, $\lambda_{max}(M)$ την ελάχιστη & μέγιστη ιδιοτιμή

ισχύει $$\lambda_{min}(M)\|x\|^2 \leq x^T M x \leq \lambda_{max}(M)\|x\|^2$$

$$\|M\| = \lambda_{max}(M)$$

Γραμμικά Συστήματα Χ.Α.

$$\dot{x} = Ax$$

"Υποψήφια" συν. Lyapunov: $V(x) = x^T P x$, $P = P^T$, $P > \emptyset$

$\Rightarrow$ $V(x)$ = pdf,

$$\dot{V} = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} = x^T (A^T P + PA) x$$

Άν $A^T P + PA < \emptyset$ δηλ. $\exists\ Q : Q = Q^T$, $Q > \emptyset$:

$$\boxed{A^T P + PA = -Q}$$ (εξίσωση Lyapunov)

$\Rightarrow$ $\dot{V}(x) < \emptyset$, $\forall\ x \in \mathbb{R}^n$

τότε $V(x) \equiv$ συνάρτηση Lyapunov

Πρόταση:

Ικανή + Αναγκαία συνθήκη για ασυμπτωτική ευστάθεια του $x = \emptyset$ ενός Γ.Σ. Χ.Α. είναι: $\forall$ συμμετρικό $Q > \emptyset$, ο μοναδικός πίνακας P ο οποίος λύνει την εξίσωση Lyapunov να είναι συμμετρικός, $P > \emptyset$.

ν.σ.χ.π.σ. είναι ... συμμετρικός, $Q>0$, ο μοναδικός πίνακας P

ο οποίος λύνει την εξίσωση Lyapunov να είναι συμμετρικός, $P > 0$.

Τότε, $V(x) = x^T P x$ = συν. Lyapunov ⊕ ισχύει $\dot{V}(x) = -x^T Q x < 0$

- Γ.Χ.Α. $\rightsquigarrow$ $V(x) = x^T P x$

- "αντίστροφο" Lyapunov Θ : άν $x = 0$ = ασυμπτωτ. ευσταθές, τότε $\exists$ συν. Lyapunov $V(x) = x^T P x$ = ..

(αποδεικνύονται ΜΟΝΟ για ειδικές περιπτώσεις!)

Αλγόριθμος : (απόδειξη της ασυμπτ. ευστάθειας)

1. Επιλέγω $Q > 0$, $Q = Q^T$ (π.χ. $Q = \mathbb{I}$)

2. λύνω $A^T P + P A = -Q$

3. το Γ.Χ.Α. σύστημα είναι Ασυμπτωτ. Ευσταθές $(x = 0)$

άν $P > 0$, $(P = P^T)$

Παράδειγμα:

$$\dot{x}_1 = 4x_2 + u \qquad \rightarrow \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -8 & -12 \end{pmatrix}$$
$$\dot{x}_2 = -8x_1 - 12x_2$$

1. $Q = \mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. Έστω $P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{pmatrix}$ $\quad (p_{12} = p_{21})$

$$A^T P + P A = -Q$$

δηλ.
$$\begin{pmatrix} 0 & -8 \\ 4 & -12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} & P & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -8 & -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -8p_{12} & -8p_{22} \\ 4p_{11} - 12p_{12} & 4p_{12} - 12p_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \quad & \quad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \ldots \left\{ \begin{array}{l} -8p_{12} - 8p_{12} = -1 \\ -8p_{22} + 4p_{11} - 12p_{12} = 0 \\ 4p_{11} - 12p_{12} - 8p_{22} = 0 \\ 4p_{12} - 12p_{22} + 4p_{12} - 12p_{22} = -1 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow P = \frac{1}{16}\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad P > 0 \Rightarrow$$ $x=0$ = Ασυμπτ. Ευσταθές

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0{,}0477 \\ \lambda_2 = 0{,}3273 \end{cases}$$

<u>Άσκηση:</u> Ισχύει η ανωτέρω πρόταση για χρονικά μεταβαλλόμενα συστήματα;

Καθολική Ασυμπτωτική και Εκθετική Ευστάθεια

Πρόταση: Αν $V(x) = x^T P x$, $P > 0$, δηλ. $\dot{V}(x) = -x^T Q x$, $Q > 0$

δηλ. $x = 0$ ≡ Ασυμπτωτ. Ευσταθές

Τότε,

α) $\lambda_{min}(P)\|x\|^2 \leq V(x) \leq \lambda_{max}(P)\|x\|^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

b) $\dot{V}(x) \leq -\lambda_{min}(Q)\|x\|^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

$\Rightarrow$ άν (α)+(b) $\Rightarrow$ $x = 0$ ≡ Καθολικά Ασυμπτ. Ευσταθές

Έστω: $$\boxed{\gamma \overset{\text{ορ.}}{=} \frac{\lambda_{min}(Q)}{2\lambda_{max}(P)}}$$ ≡ Εκτίμηση ταχύτητας σύγκλισης

(Προηγούμενο παράδειγμα): (συνέχεια)

$$P = \frac{1}{16}\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{matrix} \lambda_1 = 0.0477 \\ \lambda_2 = 0{,}3273 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \gamma = \frac{\lambda_{min}(Q)}{2\lambda_{max}(P)} = 1{,}5276$$ ≡ ταχύτητα σύγκλισης

αυτό σημαίνει ότι: $\forall x(0) \in \mathbb{R}^2, \quad \|x(t)\| \leq c\|x(0)\| e^{-1{,}5276t}, \quad c > 0$

Η 1η Μεθοδος Lyapunov

Ξ "τέστ ευστάθειας μέσω γραμμικοποίησης"

Μη Γραμμικό Σύστημα

$\dot{x} = f(x)$

$\bar{x} = \emptyset = \Sigma.I.$ $\Big\}(\Sigma)$

Γραμμικοποίηση

(Σ_Γ) : $\dot{\delta x} = A\,\delta x$

$A \triangleq D_x f(x)\big|_{x=\emptyset}$

Θεώρημα: (Lyapunov – 1η μέθοδος)

Το $\Sigma.I.$ $\bar{x}=0$ του (Σ) : i) άν όλες οι ιδιοτιμές του Σ_Γ: $Re[\lambda_i(A)] < 0$

$\Rightarrow$ είναι Ασυμπτ. Ευσταθές

ii) άν υπάρχουν μία ιδιοτιμή του $A\,|_{\Sigma_\Gamma}$: $Re[\lambda_i(A)] > 0$

$\rightarrow$ ασταθές

- όταν $x=0 = \Sigma.I. \equiv$ Ασυμπ. Ευσταθές $\Rightarrow$ εκτίμηση περιοχής έλξης

Απόδειξη:

Γ.Χ.Α. : $A^T P + PA = -Q$, $\exists\ Q = Q^T, > 0 \Rightarrow V(x) = x^T P x$ ("υποψήφια σ. Lyapunov)

$(\mathrm{M\Gamma.\Sigma})$: $\dot{V}(x) = x^T P \dot{x} + \dot{x}^T P x = x^T P f(x) + f(x)^T P x$

$\forall$: $f(x) = Ax + g(x)$ όπου $A \triangleq D_x f(x)\big|_{x=\emptyset}$

$g(x) =$ όροι υψηλ. τάξης (Taylor)

Αν ισχύει : $\left\{ \dfrac{\|g(x)\|}{\|x\|} \rightarrow 0 \right.$, όταν $\|x\| \rightarrow 0$

$\Rightarrow \dot{V}(x) = x^T P(Ax + g(x)) + (x^T A^T + g(x)) P x =$

$= x^T (A^T P + PA) x + 2x^T P g(x) = -x^T Q x + 2x^T P g(x)$

προκύπτει ότι: $\forall\, \gamma > 0$, $\exists\, r > 0$: $\|g(x)\| < \gamma \|x\|$, $\forall\, x \in B(\emptyset, r)$

$\forall\, x \in B(\emptyset, r)$:

$$\dot{V}(x) \leq -x^T Q x + |2x^T P g(x)| \leq -x^T Q x + 2\|x\| \cdot \|P\| \cdot \|g(x)\|$$

$$< -x^T Q x + 2\gamma \lambda_{max}(P) \|x\|^2 \leq$$

$$\leq -[\lambda_{min}(Q) - 2\gamma \lambda_{max}(P)]\, \|x\|^2$$

όταν γ μικρό : $\lambda_{min}(Q) - 2\gamma \lambda_{max}(P) > 0 \Rightarrow \dot{V}(x) \leq 0$

$\Rightarrow$ (La Salle) : $D_e = \{x : V(x) < e\} \supset B(\emptyset, r) \equiv$ περιοχή έλξης $x = \emptyset$

$\square$

Εφαρμογή: (Αλγόριθμος)

- διάσπαση f: $f(x) = Ax + g(x)$, $A \equiv D_x f(x)\big|_{x=0}$
- επιλογή Q: $A^T P + PA = -Q \sim P$
- υπολογισμός γ: $\dfrac{\lambda_{min}(Q)}{2\lambda_{max}(P)} > \gamma$
- $B(0,r)$: $\forall x \in B(0,r) \Rightarrow \|g(x)\| < \gamma \|x\| \Rightarrow$

$$D_c \equiv \{x : V(x) = x^T P x < c\} \supset B(0,r) \equiv \text{περιοχή ελκυστικότητας}$$

Παράδειγμα:

$$(\Sigma): \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_1^3 - 2x_2 \end{cases}$$

($x=0 \equiv$ A.S. + περιοχή ελκυστικότητας

- Ανάλυση ευστάθειας με γραμμικοποίηση

$$\delta\dot{x}_1 = \delta x_2$$
$$\delta\dot{x}_2 = -\delta x_1 - \underbrace{3x_1^2 \delta x_1}_{g(x)} - 2\delta x_2$$

$\Rightarrow f(x) = Ax + g(x) \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$

$$\det(\lambda \mathbb{I} - A) = 0 \Rightarrow \det\left(\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & \lambda+2 \end{bmatrix}\right) = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -1 \Rightarrow x=0 \equiv \text{A.S.}$$

- Εκτίμηση Περιοχής Ελκυστικότητας

$$f(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -x_1^3 \end{bmatrix} \quad \left(\Rightarrow g(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -x_1^3 \end{pmatrix}\right)$$

Επιλέγω $Q = \mathbb{I} \Rightarrow$ λύνουμε $A^T P + PA = -Q$, $P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} -2p_{12} &= -1 \\ -p_{22} + p_{11} - 2p_{12} &= 0 \\ 2p_{12} - 4p_{22} &= -1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow P = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

↳ ιδιοτιμές P: $1 \pm \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

· Επιλέγω γ: $\dfrac{\lambda_{min}(Q)}{2\lambda_{max}(P)} > \gamma$, $\lambda_{max}(P) = 1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\lambda_{min}(Q) = 1$

$\lambda_{min}(Q)$ 1

$2\lambda_{max}(P)$

$\lambda_{min}(Q) = 1$

$$\Rightarrow \frac{\lambda_{min}(Q)}{2\lambda_{max}(P)} = \frac{1}{2+\sqrt{2}} > \gamma \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{\gamma = \frac{1}{4}}$$

Έστω r : $x \in B(\emptyset, r) \Rightarrow \|g(x)\| < \gamma \|x\|$

$$\|g(x)\| < \gamma \|x\| \Rightarrow \left\| \begin{bmatrix} \emptyset \\ -x_1^3 \end{bmatrix} \right\| < \frac{1}{4} \|x\| \Rightarrow |x_1^3| < \frac{1}{4} \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

Άρα, $\forall$ $D_e = \left\{ x : [x_1 \;\; x_2] \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} < \ell \right\} \supset B(\emptyset, r)$

είναι περιοχή ελκυστικότητας