8
Ελεγχος συστημάτων

8.1 Τα προβλήματα ρυθμίσεως και παρακολουθήσεως

Ας θεωρήσουμε το σύστημα Σ που περιγράφεται απο τις εξισώσεις καταστάσεως

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \tag{8.1α}$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \tag{8.1β}$$

Το πρόβλημα ελέγχου του συστήματος (8.1) συνίσταται στον προσδιορισμό ενός άλλου συστήματος που ονομάζεται *μονάδα ελέγχου* και το οποίο έχει σαν έξοδό του ένα σήμα $u(t)$ τέτοιο ώστε αν τεθεί σαν είσοδος στο προς έλεγχο σύστημα το τελευταίο να έχει μία επιθυμητή συμπεριφορά. Ο τρόπος με τον οποίο ορίζεται η επιθυμητή συμπεριφορά του προς έλεγχο συστήματος καθώς και ο τρόπος με τον οποίο "παράγεται" το σήμα ελέγχου $u(t)$ καθορίζουν και την φύση των διαφορετικών μεθόδων ελέγχου. Σε γενικές γραμμές μπορούμε να θεωρήσουμε ότι τα δύο γενικά προβλήματα ελέγχου στα οποία κατά κανόνα ανάγονται όλα τα άλλα είναι το πρόβλημα της ρρυθμίσεως και το πρόβλημα της παρακολουθήσεως.

Το Πρόβλημα της Ρυθμίσεως (Regulation Problem) διατυπώνεται ως εξής: Δοθείσης μίας τιμής x_e του διανύσματος καταστάσεως να προσδιορισθεί ένας νόμος ελέγχου ώστε στην κανονική λειτουργία του συστήματος η κατάσταση $x(t)$ του ελεγχόμενου συστήματος να ικανοποιεί την σχέση $x(t)= x_e$, για την αντιμετώπιση δε εξωτερικών διαταραχών η κατάσταση x_e να είναι ευσταθής.

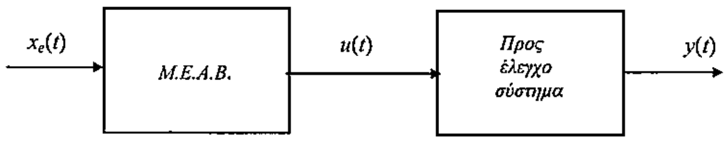
Με άλλα λόγια το πρόβλημα αυτό μπορεί να διατυπωθεί ως εξής: Δοθείσης μίας τιμής x_e του διανύσματος καταστάσεως να προσδιορισθεί ένας νόμος ελέγχου ώστε το ελεγχόμενο σύστημα να έχει την κατάσταση x_e σαν ευσταθή κατάσταση ισορροπίας.

Μία παραλλαγή του προβλήματος αυτού είναι το πρόβλημα ρυθμίσεως της εξόδου του συστήματος το οποίο διατυπώνεται με τον ίδιο τρόπο με την διαφορά ότι η κατάσταση x_e αντικαθίσταται από μία επιθυμητή τιμή y_e της εξόδου.

Το Πρόβλημα της Παρακολουθήσεως (Tracking Problem) διατυπώνεται ως εξής: Δοθείσης μίας τροχιάς $x^*(t)$ του διανύσματος καταστάσεως να προσδιορισθεί ένας νόμος ελέγχου ώστε στην κανονική λειτουργία του συστήματος η κατάσταση $x(t)$ του ελεγχόμενου συστήματος να ικανοποιεί την σχέση $x(t)=x^*(t)$ για την αντιμετώπιση δε εξωτερικών διαταραχών η τροχιά $x^*(t)$ να είναι ευσταθής.

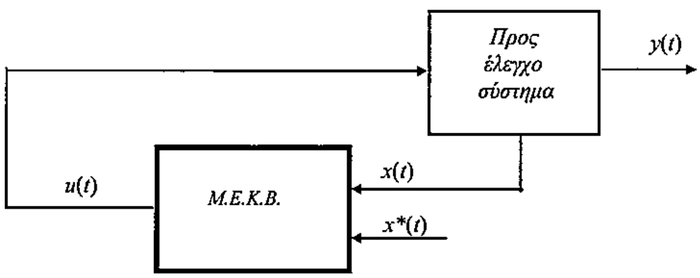
8.2 Ελεγχος με ανατροφοδότηση καταστάσεως

Τα βασικά σχήματα ελέγχου είναι *το σχήμα ελέγχου ανοικτού βρόχου* και το *σχήμα ελέγχου κλειστού βρόχου*. Στο σχήμα ελέγχου ανοικτού βρόχου ο νόμος ελέγχου δεν εξαρτάται από την εκάστοτε κατάσταση ή έξοδο του υπό έλεγχο συστήματος αλλά μόνο από τις παραμέτρους που ορίζουν την επιθυμητή συμπεριφορά του. Προφανώς για τον προσδιορισμό του νόμου ελέγχου ανοικτού βρόχου λαμβάνεται υπ'όψιν και η προβλεπόμενη συμπεριφορά του υπό έλεγχο συστήματος όπως αυτή περιγράφεται από το μαθηματικό πρότυπό του. Το σχήμα ελέγχου ανοικτού βρόχου φαίνεται στο σχήμα 8.1. όπου *η Μονάδα Ελέγχου Ανοικτού Βρόχου* (*Μ.Ε.Α.Β.*) δεν δέχεται καμμία πληροφορία για την εκάστοτε τιμή των μεταβλητών καταστάσεως ή των μεταβλητών εξόδου.



Σχήμα 8.1: Σχήμα ελέγχου ανοικτού βρόχου

Στό σχήμα ελέγχου κλειστού βρόχου, ο νόμος ελέγχου εξαρτάται όχι μόνο από τις παραμέτρους της επιθυμητής συμπεριφοράς του προς έλεγχο συστήματος αλλά και από την εκάστοτε κατάστασή του ή έξοδό του.



Σχήμα 8.2: Σχήμα ελέγχου κλειστού βρόχου με ανατροφοδότηση καταστάσεως

Το βασικό πλεονέκτημα ενός σχήματος κλειστού βρόχου σε σχέση με ένα αντίστοιχο ανοικτού βρόχου είναι το γεγονός ότι στο πρώτο είναι δυνατόν να ληφθούν υπ' όψιν οι συνέπειες που έχουν στο υπό έλεγχο σύστημα απρόβλεπτες εξωτερικές στιγμιαίες ή επιμένουσες διαταραχές όπως αυτές αποτυπώνονται στις αποκλίσεις των μεταβλητών καταστάσεως ή εξόδου από τις επιθυμητές τιμές τους. Στην περίπτωση όπου στον νόμο ελέγχου λαμβάνεται υπ'όψιν η κατάσταση του υπό έλεγχο συστήματος έχουμε το σχήμα ελέγχου με ανατροφοδότηση καταστάσεως ενώ άν λαμβάνεται υπ'όψιν η έξοδος του συστήματος έχουμε σχήμα ελέγχου με ανατροφοδότηση εξόδου.

Τέλος μπορεί να υπάρχει συνδυασμός των δύο σχημάτων ελέγχου ανοικτού και κλειστού βρόχου όπως φαίνεται στο σχήμα 8.3

8.3 Το πρόβλημα της ρυθμίσεως

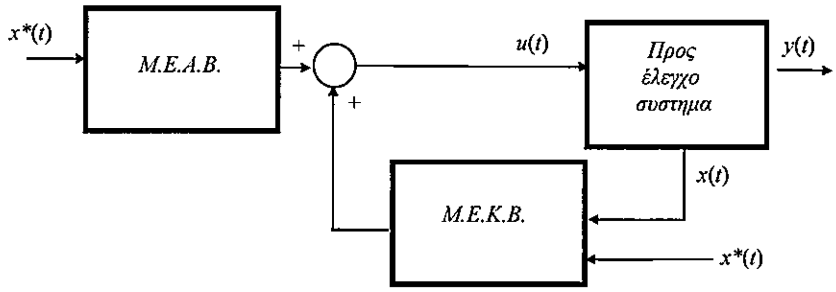
Στην γενική περίπτωση του προβλήματος ρυθμίσεως ενός χρονικά αμετάβλητου συστήματος ο νόμος ελέγχου με ανατροφοδότηση καταστάσεως θα έχει την μορφή $u=u(x;\, x_e)$. Επειδή είναι επιθυμητό στην κανονική λειτουργία του συστήματος η κατάσταση x_e να είναι κατάσταση ισορροπίας, θα πρέπει να ισχύει η σχέση

$$A\, x_e + Bu(x^*;\, x_e) = 0$$

Συνεπώς η ύπαρξη ενός διανύσματος $u_e = u(x_e\,;\, x_e)$ που ικανοποιεί την σχέση

$$Ax_e + Bu_e = 0 \tag{8.2}$$

είναι αναγκαία συνθήκη ώστε το πρόβλημα ρυθμίσεως, όπως έχει διατυπωθεί στην προηγούμενη παράγραφο, να έχει λύση. Η εξίσωση όμως αυτή με άγνωστη την u_e δεν έχει πάντοτε λύση. Για παράδειγμα, αν



Σχήμα 8.3: Σύνθετο σχήμα ελέγχου με Μονάδες Ελέγχου Ανοικτού και Κλειστού Βρόχου

$$A=\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ x_e=\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \tag{8.3}$$

τότε θα πρέπει να ισχύει η σχέση

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u_e = -\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

δηλαδή να ισχύουν ταυτόχρονα οι σχέσεις

$$u_e=-2$$

$$u_e=2$$

πράγμα που είναι αδύνατο να συμβεί. Συνεπώς, πριν προχωρήσουμε στον προσδιορισμό του νόμου ελέγχου θα πρέπει να εξετάσουμε αν η εξίσωση (8.2) έχει λύση ως προς u_e . Είναι φανερό ότι μία τέτοια λύση υπάρχει πάντοτε αν το σύστημα έχει ίσο πλήθος μεταβλητών καταστάσεως και ελέγχου, δηλαδή αν $B\in \Re^{nxn}$, και $detB\neq 0$. Τότε $u_e=-B^{-1}Ax^*$. Επίσης ένα τέτοιο u_e υπάρχει πάντοτε αν $B\in\Re^{nxn}$ με $m>n$ και $rankB=n$, δηλαδή αν το πλήθος των μεταβλητών ελέγχου είναι μεγαλύτερο του πλήθους των μεταβλητών καταστάσεως και η μήτρα B είναι πλήρους βαθμού. Τότε μία λύση μπορεί να προσδιορισθεί από την σχέση $u_e=-B^T(BB^T)^{-1}Ax_e$ γιατί $Ax_e-BB^T(BB^T)^{-1}Ax_e=0$. Στις υπόλοιπες περιπτώσεις, όπως στην συνήθη περίπτωση όπου το πλήθος των μεταβλητών ελέγχου είναι μικρότερο του πλήθους των μεταβλητών καταστάσεως, η ύπαρξη ενός u_e που ικανοποιεί την σχέση (8.2) εξαρτάται από την τιμή της επιθυμητής ισορροπίας x_e. Οταν για κάποια συγκεκριμένη τιμή x_e της επιθυμητής καταστάσεως ισορροπίας δεν υπάρχει u_e που να ικανοποιεί την σχέση (8.2), τότε για οποιοδήποτε νόμο ελέγχου $u(x;\ x_e)$ θα ισχύει η σχέση

$$Ax_e+Bu(x_e; x_e)\neq 0$$

που σημαίνει ότι το σύστημα δεν είναι δυνατόν να ισορροπήσει στην κατάσταση x_e. Τότε, και για συγκεκριμένο νόμο ελέγχου $u(x; x_e)$, το σύστημα θα ισορροπεί σε κάποια από τις καταστάσεις x^* για τις οποίες θα ισχύει η σχέση

$$Ax^*+Bu(x^*;x^*)=0 \qquad (8.3)$$

Συνεπώς στην μόνιμη κατάσταση θα υπάρχει μία απόκλιση από την επιθυμητή κατάσταση ισορροπίας. Ετσι, στην περίπτωση όπου δεν υπάρχει u_e που να ικανοποιεί την συνθήκη (8.2) αναζητούμε νόμο ελέγχου ο οποίος θα καθιστά κατάσταση ισορροπίας μία αλλη κατάσταση x^* που θα βρίσκεται όσο το δυνατόν "πλησιέστερα" προς την αρχικώς επιθυμητή x_e.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι η κατάσταση x_e μπορεί να καταστεί κατάσταση ισορροπίας, δηλαδή ότι υπάρχει u_e τέτοιο ώστε να ισχύει η σχέση .

$$Ax_e+Bu_e=0 \qquad (8.4)$$

Επειδή οποιοσδήποτε νόμος ελέγχου $u(x)$ μπορεί να γραφεί υπό την μορφή

$$u(x)=u_e+\Delta u(x) \qquad (8.5)$$

για να καθιστά ο νόμος ελέγχου $u(x)$ την x_e κατάσταση ισορροπίας θα πρέπει να ισχύει η σχέση

$$Ax_e+Bu(x_e)= Ax_e +B(u_e+\Delta u(x_e))=0$$

απ'όπου, λόγω της (8.4) προκύπτει ότι

$$\Delta u(x_e)=0$$

Συνεπώς ο νόμος ελέγχου $u(x)$ που επιλύει το πρόβλημα ρυθμίσεως έχει την μορφή (8.5). Το προσδιορισμός του διασπάται σε δύο υποπροβλήματα:

α) Το πρώτο υποπρόβλημα συνίσταται στον προσδιορισμό δύο διανυσμάτων u_e και x_e που ικανοποιούν την σχέση (8.4). Ο όρος u_e εκφράζει τον έλεγχο ανοικτού βρόχου και έχει σαν στόχο να καθιστά την x_e κατάσταση ισορροπίας.

β) Το δεύτερο υποπρόβλημα συνίσταται στον προσδιορισμό μίας συνάρτησης $\Delta u(x)$ έτσι ώστε $\Delta u(x_e)=0$ και η ισορροπία x_e του ελεγχόμενου συστήματος να είναι ευσταθής. Ο όρος $\Delta u(x)$ εκφράζει τον έλεγχο κλειστού βρόχου.

Παράδειγμα 8.1

Ενα σύστημα Σ, μίας εισόδου – μίας εξόδου, περιγράφεται από τις εξισώσεις

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 8 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u \tag{8.6}$$

Οι καταστάσεις x_e που μπορούν να καταστούν καταστάσεις ισορροπίας του συστήματος μέσω ενός ελέγχου της μορφής

$$u(x)=u_e+\Delta u(x)$$

είναι εκείνες για τις οποίες υπάρχει u_e τέτοιο ώστε

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 8 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{e1} \\ x_{e2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u_e = 0$$

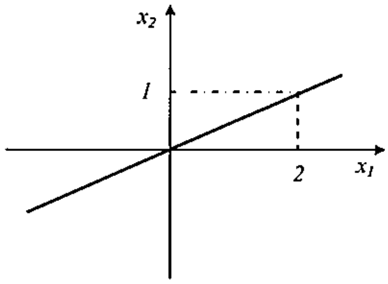
Η σχέση αυτή γράφεται υπό την μορφή

$$x_{e2} + u_e = 0$$
$$8x_{e1} - 2x_{e2} + 2u_e = 0$$

Με απαλειφή του u_e από τις προηγούμενες σχέσεις προκύπτει η σχέση

$$8x_{e1} - 4x_{e2} = 0$$

Συνεπώς μόνο οι καταστάσεις που βρίσκονται επί της ευθείας που ορίζεται από την τελευταία σχέση μπορούν να καταστούν καταστάσεις ισορροπίας.



el

Σχήμα 8.4: Το σύνολο των καταστάσεων του συστήματος (8.6) που μπορούν να καταστούν καταστάσεις ισορροπίας.

8.4 Ο έλεγχος ιδιοτιμών

Λόγω της γραμμικής μορφής των καταστατικών εξισώσεων είναι φυσικό να επιχειρήσει κανείς να επιλύσει το πρόβλημα ρυθμίσεως επιλέγοντας ένα νόμο ελέγχου της μορφής

$$\Delta u(x)=Kx+r$$

Τότε, από την συνθήκη $\Delta u(x_e)=0$ προκύπτει ότι

$$Kx_e+r=0$$

Συνεπώς,

$$r=-Kx_e$$

και

$$\Delta u(x)=K(x-x_e)$$

Αρα ο νόμος ελέγχου θα έχει την μορφή

$$u=u_e+K(x-x_e)$$

Με αυτό τον νόμο ελέγχου η συμπεριφορά του συστήματος θα περιγράφεται από την σχέση

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+B(u_e+K(x(t)-x_e))$$

Τότε η απόκλιση $z(t)=x(t)-x_e$ της καταστάσεως $x(t)$ του ελεγχόμενου συστήματος από την ισορροπία του x_e θα ικανοποιεί την εξίσωση

$$\begin{aligned}\dot{z}(t)&=Az(t)+Ax_e+B(u_e+K(z(t)))=\\&=(A+BK)z(t)+Ax_e+Bu_e=\\&=(A+BK)z(t)\end{aligned}$$

γιατί η u_e έχει υπολογισθεί έτσι ώστε $Ax_e+Bu_e=0$. Συνεπώς η άγνωστη μήτρα K θα υπολογισθεί έτσι ώστε η ισορροπία $z=0$ του συστήματος

$$\dot{z}(t)=(A+BK)z(t)$$

να είναι ασυμπτωτικά ευσταθής.

Συνοψίζοντας παρατηρούμε ότι με τον έλεγχο

$$u=u_e+K(x-x_e)$$

επιτυγχάνονται τα εξής: Στην κανονική λειτουργία του το σύστημα θα βρίσκεται στην κατάσταση ισορροπίας x_e. Τότε, επειδή $x(t)=x_e$, θα ισχύει

$$u(t)=u_e+K(x_e-x_e)=u_e$$

δηλαδή θα δρα μόνο το τμήμα του ελέγχου που οφείλεται στον όρο u_e. Αν όμως λόγω μίας στιγμιαίας εξωτερικής διαταραχής το σύστημα "ξεφύγει", από την κατάσταση ισορροπίας x_e οπότε $x(t) \neq x_e$, τότε δρα και ο δεύτερος όρος του ελέγχου τείνοντας να επανεφέρει το σύστημα στην κατάσταση ισορροπίας x_e. Είναι σημαντικό να τονισθεί ότι οι δύο άγνωστες παράμετροι u_e και K του νόμου ελέγχου $u(t)=u_e+K(x(t)-x_e)$ προσδιορίζονται ανεξάρτητα η μία από την άλλη. Ο όρος u_e εκφράζει τον έλεγχο ανοικτού βρόχου, ενώ ο όρος $K(x(t)-x_e)$ τον έλεγχο κλειστού βρόχου ή έλεγχο ανατροφοδοτήσεως της καταστάσεως του συστήματος.

8.4.1 Τοποθέτηση ιδιοτιμών με ανατροφοδότηση καταστάσεως

Ως γνωστόν η ισορροπία $z=0$ του συστήματος

$$\dot{z}(t) = (A+BK)z(t)$$

που περιγράφει την συμπεριφορά της αποκλίσεως $z(t)$ της μεταβλητής καταστάσεως $x(t)$ του συστήματος κλειστού βρόχου από την κατάσταση ισορροπίας x_e είναι ασυμπτωτικά ευσταθής αν και μόνο άν τα πραγματικά μέρη των ιδιοτιμών της μήτρας $A+BK$ είναι αρνητικά. Το πρόβλημα λοιπόν είναι να προσδιορισθεί μία μήτρα K ώστε η μήτρα $A+BK$ να έχει ιδιοτιμές με αρνητικά πραγματικά μέρη ή, άν είναι δυνατόν, να έχει συγκεκριμένες επιθυμητές ιδιοτιμές με αρνητικά πραγματικά μέρη. Το πρόβλημα αυτό ονομάζεται *τοποθέτηση ιδιοτιμών* (eigevalue assignment) με ανατροφοδότηση καταστάσεως.

8.4.2 Υπαρξη λύσεως στο πρόβλημα τοποθετήσεως ιδιοτιμών

Πρίν προχωρήσει κανείς στον προσδιορισμό της μήτρας K ώστε η μήτρα κλειστού βρόχου $A+BK$ να έχει ιδιοτιμές με αρνητικά πραγματικά μέρη, είναι σκόπιμο να αναπτυχθούν συνθήκες που εξασφαλίζουν την ύπαρξη μίας τέτοιας μήτρας K.

Ορισμός 8.1
Το ζεύγος (A,B) είναι *σταθεροποιήσιμο* (stabilisable) αν υπάρχει μήτρα K ώστε η μήτρα $A+BK$ να έχει ιδιοτιμές με αρνητικά πραγματικά μέρη.

Ειναι φανερό ότι για να είναι ένα ζεύγος (A,B) σταθεροποιήσιμο θα πρέπει να είναι δυνατόν να προσδιορισθεί μία μήτρα K ώστε οι ασταθείς ιδιοτιμές της μήτρας ανοικτού βρόχου A να μην είναι ιδιοτιμές και της μήτρας κλειστού βρόχου $A+BK$. Σχετικό με αυτό το προφανές γεγονός είναι το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 8.1
Αν για το αριστερό ιδιοδιάνυσμα v^T μίας ιδιοτιμής λ της μήτρας A ισχύει η σχέση $v^T B=0$, τότε για οποιαδήποτε μήτρα K η λ είναι ιδιοτιμή και της μήτρας $A+BK$

Απόδειξη:

Επειδή η λ είναι ιδιοτιμή της μήτρας A και το v^T το αντίστοιχο αριστερό ιδιοδιάνυσμα θα ισχύει

$$v^T \mathrm{A}=\lambda v^T$$

Εξ΄άλλου για οποιαδήποτε μήτρα K θα ισχύει

$$v^T (A+BK)= v^T A+ v^T BK= \lambda v^T+0= \lambda v^T$$

Αρα η λ θα είναι ιδιοτιμή και της μήτρας $A+BK$. □

Από το θεώρημα αυτό προκύπτει ότι μία αναγκαία συνθήκη ώστε το ζεύγος (A,B) να είναι σταθεροποιήσιμο είναι να ισχύει η σχέση $v^T B\neq 0$ για κάθε αριστερό ιδιοδιάνυσμα v^T που αντιστοιχεί σε ασταθή ιδιοτιμή της μήτρας ανοικτού βρόχου A. Μπορεί να αποδειχθεί ότι αυτή η συνθήκη είναι και ικανή ώστε το ζεύγος (A,B) να είναι σταθεροποιήσιμο. Ετσι:

Θεώρημα 8.2
Αναγκαία και ικανή συνθήκη για να είναι το ζεύγος (A,B) σταθεροποιήσιμο είναι να ισχύει η σχέση $v^T B\neq 0$ για κάθε αριστερό ιδιοδιάνυσμα v^T που αντιστοιχεί σε ασταθή ιδιοτιμή της μήτρας A.

Ορισμός 8.2
Μία ιδιοτιμή λ της μήτρας A είναι μη ελέγξιμη αν για το αντίστοιχο αριστερό ιδιοδιάνυσμα v^T ισχύει η σχέση $v^T B=0$.

Συμφώνως λοιπόν με τον ορισμό αυτόν και το προηγούμενο θεώρημα, η ελεγξιμότητα όλων των ασταθών ιδιοτιμών της μήτρας A, είναι αναγκαία και ικανή συνθήκη για την σταθεροποιησιμότητα του ζεύγους (A,B).

Πρέπει να σημειωθεί ότι η ύπαρξη κάποιας μη ελέγξιμης ιδιοτιμής της μήτρας A συνεπάγεται την μη ελεγξιμότητα του ζεύγους (A,B). Πράγματι, αν το ζεύγος (A,B) είναι ελέγξιμο, τότε θα ισχύει $v^T B\neq 0$ για κάθε αριστερό ιδιοδιάνυσμα v^T της μήτρας A, γιατί αν υπήρχε αριστερό ιδιοδιάνυσμα v^T της μήτρας Α τέτοιο ώστε $v^T B=0$ τότε θα ίσχυε

$$v^T[B\ AB\ A^2B \dots A^{v-1}B]=[\ v^TB\ \ \lambda v^TB\ \ \lambda^2v^TB \dots \lambda^{n-1}v^{TB}]=$$

$$=[0\ \ 0\ \ 0 \dots 0],$$

που θα σήμαινε ότι όλες οι στήλες της μήτρας ελέγξιμότητας $[B\ AB\ A^2B \dots A^{v-1}B]$ θα ήταν κάθετες προς το διάνυσμα v, που με την σειρά του θα σήμαινε ότι ο βαθμός της μήτρας ελεγξιμότητας θα ήταν μικρότερος του n. Το τελευταίο όμως δεν μπορεί να συμβαίνει διότι έχει υποτεθεί ότι το ζεύγος (A,B) είναι ελέγξιμο. Αρα πράγματι θα ισχύει ότι $v^T B\neq 0$ για κάθε αριστερό ιδιοδιάνυσμα v^T της μήτρας A.

Τέλος μπορεί να αποδειχθεί ότι

Θεώρημα 8.3
Αν το ζεύγος (A,B) είναι ελέγξιμο τότε για οποιοδήποτε αυτοσυζυγές σύνολο $\Lambda=\{\lambda_1, \lambda_2, \dots,\lambda_n\}$ υπάρχει μήτρα K τέτοια ώστε η μήτρα $A+BK$ να έχει σαν ιδιοτιμές τα στοιχεία λ_i του συνόλου Λ.

8.4.3 Μέθοδοι τοποθετήσεως ιδιοτιμών

α) Συστήματα πολλών εισόδων

Ας υποθέσουμε ότι επιλέγουμε ένα σύνολο πραγματικών ή μιγαδικών αριθμών $\Lambda=\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ με πραγματικά μέρη αρνητικά σαν σύνολο των ιδιοτιμών που επιθυμούμε να έχει το σύστημα κλειστού βρόχου. Είναι προφανές ότι το σύνολο αυτό είναι αυτοσυζυγές με την έννοια ότι αν ο λ_i ανήκει σ'αυτό τότε ανήκει και ο συζυγής του.

Υποθέτουμε ότι οι μιγαδικοί αριθμοί λ_i $i=1,2,\dots,q$ δεν συμπίπτουν με καμμία από τις ιδιοτιμές της μήτρας A ενώ οι λ_i $i=q+1,\ q+2,\ \dots,n$ είναι ιδιοτιμές τις μήτρας A. Σχηματίζουμε την μήτρα

$$U=[u_1\ u_2 \dots u_q\ u_{q+1} \dots u_n]$$

όπου u_i $i=q+1,\ q+2,\ \dots,n$ είναι τα ιδιοδιανύσματα της μήτρας A που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές λ_i $i=q+1,q+2,\ \dots,n$ και u_i $i=1,2,\dots,q$ διανύσματα που υπολογίζονται από τις σχέσεις

$$u_i=(\lambda_i I_n-A)^{-1}Bv_i$$

όπου $v_i\in \Re^m$ $i=1,2,\dots,q$ είναι τυχαία μη μηδενικά διανύσματα τέτοια ώστε τα διανύσματα u_i $i=1,2,\dots,n$ να είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Ετσι η μήτρα U είναι αντιστρέψιμη.

Σχηματίζουμε τώρα την μήτρα

$$V=[v_1\ v_2 \dots v_q\ v_{q+1} \dots v_n]$$

όπου $v_i \in \Re^m$ $i=q+1, q+2, \dots, n$ είναι μηδενικά ιδιοδιανύσματα. Τότε, θέτοντας

$$K=VU^{-1}$$

οι αριθμοί $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ είναι ιδιοτιμές της μήτρας $A+BK$

Απόδειξη

Θα αποδείξουμε ότι για κάθε λ_i ισχύει $(A+BK)u_i=\lambda_i u_i$ $i=1,2,\dots,n$. Πράγματι, για λ_i $i=1,2,\dots,q$ ισχύει

$$(A+BK)u_i=Au_i+BKu_i=$$

$$=Au_i+BVU^{-1}u_i=$$

$$=Au_i+BVe_i=$$

$$=Au_i+Bv_i$$

όπου e_i είναι το n-διάστατο διάνυσμα που έχει όλες του τις συνιστώσες μηδενικές πλην της i-στής που ισούται με την μονάδα. Η σχέση $U^{-1}u_i=e_i$ προκύπτει από το γεγονός ότι το διάνυσμα u_i είναι η i-στή στήλη της μήτρας U και $U^{-1}U=I_n$.

Αλλά

$$Au_i+Bv_i=\lambda_i u_i \qquad i=1,2,\dots,q$$

γιατί $u_i=(\lambda_i I_n-A)^{-1}Bv_i$. Αρα $(A+BK)u_i=\lambda_i u_i$ για $i=1,2,\dots,q$. Εξ' άλλου για $i=q+1, q+2, \dots, n$ προκύπτει ότι

$$(A+BK)u_i= Au_i+BKu_i =$$

$$=Au_i+BVU^{-1}u_i=$$

$$=Au_i+BVe_i=$$

$$=Au_i+Bv_i=$$

$$=\lambda_i u_i$$

γιατί $v_i=0$ για $i=q+1,\ q+2,\ \ldots,\ n$ και τα u_i είναι ιδιοδιανύσματα της μήτρας A για $i=q+1,\ q+2,\ \ldots,\ n$. Συνεπώς όλοι οι αριθμοί λ_i $i=1,2,\ldots,n$ είναι ιδιοτιμές της μήτρας $A+BK$.

Παράδειγμα 8.2

Ενα σύστημα Σ, μίας εισόδου – μίας εξόδου, περιγράφεται από τις εξισώσεις

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 8 & -2\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}0 & 3\end{bmatrix}x$$

Σκοπός είναι ο προσδιορισμός ενός νόμου ελέγχου για την ρύθμιση της εξόδου γύρω από το σημείο λειτουργίας $y_e=2$.

Λύση:

Θεωρούμε έλεγχο της μορφής

$$u=u_e+K(x-x_e)$$

όπου x_e είναι μία κατάσταση ισορροπίας του συστήματος κλειστού βρόχου τέτοια ώστε

$$y_e=\begin{bmatrix}0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{e1}\\ x_{e2}\end{bmatrix} \qquad (8.6)$$

Αν θέσουμε

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 8 & -2\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}0 & 2\end{bmatrix}$$

τότε για να είναι η x_e είναι κατάσταση ισορροπίας του συστήματος κλειστού βρόχου θα πρέπει επί πλέον να επαληθεύεται η σχέση

$$Ax_e+Bu_e=0$$

η οποία, αντικαθιστώντας τις τιμές των A και B γίνεται

$$\begin{bmatrix}0 & 1\\ 8 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{e1}\\ x_{e2}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}u_e=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix} \qquad (8.7)$$

Από τις σχέσεις (8.6) και (8.7) προκύπτει ότι

$$x_{e1} = 0{,}5$$

$$x_{e2} = 1$$

$$u_e = -1$$

Η μήτρα K θα πρέπει να είναι τέτοια ώστε τα πραγματικά μέρη των ιδιοτιμών της μήτρας $A+BK$ να είναι αρνητικά. Οι ιδιοτιμές της μήτρας A είναι λύσεις της αλγεβρικής εξίσωσης

$$\det(\lambda I_2 - A) = 0$$

ή

$$\det(\lambda I_2 - A) = \det\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 8 & -2 \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ -8 & \lambda+2 \end{bmatrix}\right) = \lambda^2 + 2\lambda - 8 = 0$$

Αρα, $\lambda_1 = -4$ $\lambda_2 = 2$. Συνεπώς το σύστημα ανοικτού βρόχου είναι ασταθές. Εξ'άλλου, επειδή για την μήτρα ελεγξιμότητας ισχύει η σχέση

$$rank\begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = rank\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = 1$$

μόνο μία από τις ιδιοτιμές μπορεί να αντικατασταθεί. Θα εξετάσουμε αν το σύστημα είναι σταθεροποιήσιμο, δηλαδή αν η ασταθής ιδιοτιμή $\lambda_2=2$ είναι ελέγξιμη ή όχι.

Εστω

$$w_2 = \begin{bmatrix} 1 & w_{22} \end{bmatrix}$$

το αριστερό ιδιοδιάνυσμα της μήτρας A που αντιστοιχεί στην ασταθή ιδιοτιμή $\lambda_2=2$. Τότε θα ισχύει

$$w_2 A = \lambda_2 w_2$$

ή

$$\begin{bmatrix} 1 & w_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 8 & -2 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 & w_{22} \end{bmatrix}$$

απ'όπου προκύπτει ότι

$$w_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}25 \end{bmatrix}$$

Επειδή

$$w_2 B = \begin{bmatrix} 1 & 0,25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 1,5 \neq 0$$

η ιδιοτιμή $\lambda_2=2$ είναι ελέγξιμη, συνεπώς μπορεί να αντικατασταθεί. Σαν νέα ιδιοτιμή επιλέγουμε την $\lambda_2=-5$. Τότε η μήτρα K θα υπολογισθεί από την σχέση

$$K = VU^{-1}$$

όπου

$$V = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix}$$

με

$v_1=0$ (επειδή δεν θα αντικαταστήσουμε την ευσταθή ιδιοτιμή $\lambda_1=-4$)
$v_2=1$ (αυθαίρετα)
u_1 το ιδιοδιάνυσμα της A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_1=-4$
$u_2 = (\lambda_2^* I_2 - A)^{-1} B v_2$

Επειδή

$$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}$$

και

$$u_2 = (\lambda_2^* I_2 - A)^{-1} B v_2 = \left(\begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 8 & -2 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot 1 =$$

$$= \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ -8 & -3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{7} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

η μήτρα U γίνεται

$$U = \begin{bmatrix} 1 & -1/7 \\ -4 & -2/7 \end{bmatrix}$$

Εξ'άλλου,

$$V = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Συνεπώς

$$K = VU^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1/7 \\ -4 & -2/7 \end{bmatrix}^{-1} = -\frac{7}{6} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2/7 & 1/7 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = -\frac{7}{6} \begin{bmatrix} 4 & 1 \end{bmatrix}$$

και ο νόμος ελέγχου είναι ο

$$u = u_e + K(x - x_e) = -1 - \frac{7}{6}[4 \quad 1]\begin{bmatrix} x_1 - 0{,}5 \\ x_2 - 1 \end{bmatrix}$$

ή

$$u = 2{,}5 - \frac{14}{3}x_1 - \frac{7}{6}x_2$$

β) Συστήματα μιας εισόδου

Θα μελετήσουμε τώρα την περίπτωση συστήματος που έχει μια είσοδο και είναι πλήρως ελέγξιμο. Ετσι το σύστημα μας περιγράφεται απο την σχέση

$$\dot{z}(t) = (A + bk)z(t) \tag{8.8}$$

όπου $b \in \Re^n$, $k^T \in \Re^n$ και ισχύει

$$rankU = rank[b \; Ab \; A^2b \ldots A^{n-1}b] = n$$

Με τις υποθέσεις αυτές υπάρχει ένας μετασχηματισμός $\bar{z} = Pz$ ο οποίος μετασχηματίζει το σύστημα

$$\dot{z} = Az + bu$$

στην ελέγξιμη κανονική μορφή

$$\dot{\bar{z}} = \bar{A}\,\bar{z} + \bar{b}\,u$$

όπου

$$\bar{A} = PAP^{-1}, \; \bar{b} = Pb$$

με

$$\overline{A}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}, \overline{b}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

και όπου a_i είναι οι συντελεστές του χαρακτηριστικού πολυωνύμου της μήτρας A:

$$det(s1_n\text{-}A)=s^n+a_1s^{n-1}+a_2s^{n-2}+....+a_{n-1}s+a_n$$

Εφαρμόζοντας τον μετασχηματισμό αυτόν στο σύστημα (8.6) έχουμε

$$\dot{\overline{z}}=(PAP^{-1}+PbkP^{-1})\,\overline{z}=(\overline{A}+\overline{b}\,kP^{-1})\,\overline{z}$$

ή

$$\dot{\overline{z}}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}\overline{z}+$$

$$+\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \overline{k}_1 & \overline{k}_2 & \cdots & \overline{k}_n \end{bmatrix}\overline{z}$$

ή τελικά,

$$\dot{\bar{z}}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}\bar{z} \qquad (8.9)$$

όπου ετέθη

$$\bar{k}=[\bar{k}_n \;\; \bar{k}_{n-1} \;\ldots\; \bar{k}_1]=kP^{-1}$$

δηλαδή

$$k=\bar{k}P$$

Επειδή οι μήτρες $P(A+bk)P^{-1}$ και $A+bk$ έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές, οι μεταβλητές $\bar{k}_i$ θα εκλεγούν έτσι ώστε οι ιδιοτιμές του συστήματος (8.9) να είναι ίσες με τις δοθείσες $\lambda_1, \lambda_2,\ldots,\lambda_n$. Αρα θα πρέπει να ισχύει εκ ταυτότητος η σχέση

$$s^n+(a_1-\bar{k}_1)s^{n-1}+\ldots+(a_{n-1}+\bar{k}_{n-1})s+a_n-\bar{k}_n=$$

$$=(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)\ldots(s-\lambda_n)=$$

$$=s^n+\bar{a}_1s^{n-1}+\ldots+\bar{a}_{n-1}s+\bar{a}_n$$

από την οποία προκύπτει ότι $\bar{k}_i=a_i-\bar{a}_i$.

Σημειώνουμε ότι η ύπαρξη του διανύσματος $\bar{k}$, συνεπώς και του k, για οποιαδήποτε σύνολο n ιδιοτιμών $\{\lambda_1, \lambda_2,\ldots,\lambda_n\}$ εξασφαλίζεται αν υπάρχει η μήτρα P που μετασχηματίζει το ζεύγος (A,b) στην ελέγξιμη κανονική μορφή. Αυτό όμως συμβαίνει όταν το ζεύγος (A,B) είναι ελέγξιμο. Υπενθυμίζουμε ότι η μήτρα P είναι η αντίστροφη της μήτρας Q όπου

$$Q=[q_1 \;\; q_2 \;\ldots\; q_n]$$

με

$$q_n=b$$

$$q_{n-i}=Aq_{n-i+1}+a_iq_n \quad i=1,2,\ldots,n-1$$

8.5 Το πρόβλημα της παρακολουθήσεως

Μία ιδανική επίλυση του προβλήματος της παρακολουθήσεως θα συνίστατο στον προσδιορισμό ενός νόμου ελέγχου $u[x;x^*(t)]$ ώστε η $x^*(t)$ να είναι τροχιά του ελεγχόμενου συστήματος και μάλιστα να είναι ασυμπτωτικά ευσταθής. Τότε θα έπρεπε να ίσχυε η σχέση

$$\dot{x}^*(t) = Ax^*(t) + Bu[x^*(t); x^*(t)]$$

για κάθε $t \in T$. Δηλαδή θα έπρεπε να υπήρχε μία συνάρτηση $u^*(t)=u[x^*(t);x^*(t)]$ τέτοια ώστε

$$\dot{x}^*(t) = Ax^*(t) + Bu^*(t)$$

Πρακτικά αυτό μπορεί να συμβεί μόνο στην περίπτωση όπου το πλήθος των μεταβλητών ελέγχου είναι τουλάχιστον ίσο προς των πλήθος των μεταβλητών καταστάσεως, δηλαδή αν $m \geq n$, και επί πλέον $rankB=n$. Τότε $u^*(t)=-B^T(BB^T)^{-1}Ax^*(t)$ ή, στην περίπτωση όπου $m=n$, απλώς $u^*(t)=-B^{-1}Ax^*(t)$. Στις συνήθεις περιπτώσεις όπου το πλήθος των μεταβλητών ελέγχου είναι μικρότερο του πλήθους των μεταβλητών καταστάσεως το πρόβλημα της παρακολούθησης, όπως αυτό ορίσθηκε στην παράγραφο 8.1, κατά κανόνα δεν έχει ακριβή λύση.

Μία ικανοποιητική "λύση" του προβλήματος μπορεί να επιτευχθεί επιλέγοντας ένα νόμο ελέγχου της μορφής

$$u(x(t);x^*(t))=K[x(t)-x^*(t)]+r(t)$$

Ο δεύτερος όρος $r(t)$ του νόμου ελέγχου $u(x(t);x^*(t))$ έχει σαν στόχο να καθορίσει την τροχιά που θα διαγράφει η κατάσταση του συστήματος στην "ομαλή" λειτουργία του συστήματος. Ο πρώτος όρος ενεργοποιείται όταν $x(t) \neq x^*(t)$, δηλαδή όταν η κατάσταση του συστήματος δεν κινείται επί της επιθυμητής τροχιάς $x^*(t)$.

Με αυτόν τον νόμο ελέγχου η συμπεριφορά του συστήματος περιγράφεται από την σχέση

$$\dot{x}(t) = Ax(t)+BK[x(t)-x^*(t)]+Br(t)$$

Η απόκλιση $z(t)=x(t)-x^*(t)$ της καταστάσεως $x(t)$ του συστήματος από την επιθυμητή τροχιά $x^*(t)$ ικανοποιεί την εξίσωση

$$\dot{z}(t) + \dot{x}^*(t) = A[z(t)+x^*(t)]+BKz(t)+Br(t)$$

ή

$$\dot{z}(t) = (A+BK)z(t) + x^*(t) - \dot{x}^*(t) + Br(t)$$

Από την μορφή της εξισώσεως αυτής, και δεδομένου ότι εν γένει ο όρος $Ax^*(t)-\dot{x}^*(t)+Br(t)$ δεν είναι εκ ταυτότητος ίσος με μηδέν, προκύπτει ότι και η απόκλιση $z(t)$ δεν μπορεί να παραμείνει ίση με μηδέν σε κάθε χρονική στιγμή t. Εκείνο που μπορεί να επιτευχθεί είναι να επιλεγεί η μήτρα Κ έτσι ώστε η απόκλιση να είναι φραγμένη. Για τον σκοπό αυτό θα εφαρμόσουμε τα αποτελέσματα της θεωρίας ευστάθειας φραγμένης εισόδου-φραγμένης καταστάσεως που αναπτύξαμε στο κεφάλαιο 7. Ετσι, αν θεωρηθεί ο όρος $Ax^*(t)-\dot{x}^*(t)+Br(t)$ σαν μία φραγμένη επιμένουσα διαταραχή στο σύστημα που περιγράφεται από την εξίσωση

$$\dot{z}(t) = (A+BK)z(t)$$

τότε και η απόκλιση $z(t)$ παραμένει φραγμένη υπό την προϋπόθεση ότι οι ιδιοτιμές της μήτρας $A+BK$ έχουν πραγματικά μέρη αρνητικά (Θεώρημα 6.1). Συνεπώς, όπως και στο πρόβλημα της ρύθμισης, έτσι και εδώ έχουμε ένα πρόβλημα τοποθέτησης ιδιοτιμών. Είναι φανερό ότι τα προβλήματα υπάρξεως μίας μήτρας K έτσι ώστε οι ιδιοτιμές της μήτρας $A+BK$ να έχουν αρνητικά πραγματικά μέρη καθώς και του υπολογισμού μίας τέτοιας μήτρας K είναι ίδια με εκείνα που μελετήθηκαν στην περίπτωση του προβλήματος της ρύθμισης

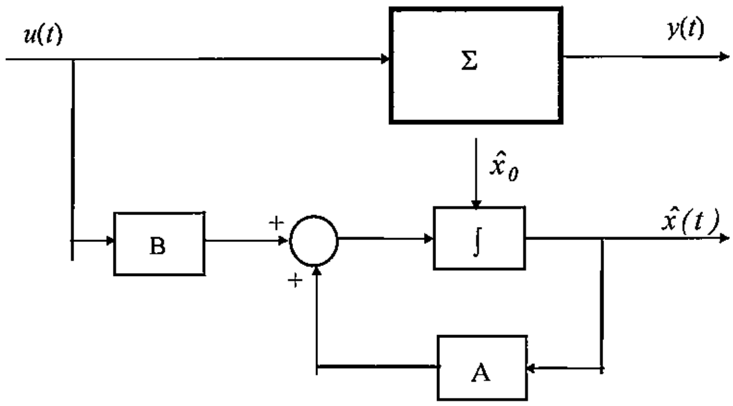
8.6 Παρατηρητές

Για την υλοποίηση ενός ελέγχου με ανατροφοδότηση καταστάσεως είναι απαραίτητο να γνωρίζουμε κάθε στιγμή την κατάσταση του ελεγχόμενου συστήματος. Σε αντίθεση όμως με την είσοδο και την έξοδο του συστήματος που είναι γνωστά ή μπορούν να προκύψουν άμεσα από μετρήσεις, οι μετάβλητες καταστάσεως γενικώς δεν είναι άμεσα μετρήσιμες. Είναι λοιπόν απαραίτητο να σχεδιασθούν οι κατάλληλες διατάξεις οι οποίες θα επιτρέπουν αν όχι τον ακριβή προσδιορισμό τουλάχιστον μία ικανοποιητική εκτίμηση των μεταβλητών καταστάσεως. Οι διατάξεις αυτές είναι γνωστές με το όνομα *παρατηρητές* (observers) ή *εκτιμητές καταστάσεως* (state estimators, estimateurs d'etat)

Ας δούμε ποιά είναι τα δεδομένα του προβλήματος: Γνωρίζουμε το μαθηματικό πρότυπο του συστήματος, δηλαδή τις μήτρες A,B,C,D και μπορούμε επίσης να γνωρίζουμε, μέσω μετρήσεων, την είσοδο $u(t)$ και την έξοδο $y(t)$. Αν γνωρίζαμε και την αρχική συνθήκη $x(t_0)=x_0$ τότε η επίλυση των καταστατικών εξισώσεων του συστήματος με αρχική συνθήκη $x(t_0)=x_0$ και $u(t)$ γνωστή μέσω μετρήσεων, θα μας έδιδε την $x(t)$ για $t>t_0$. Η αρχική όμως κατάσταση x_0 είναι άγνωστη γιατί οφείλεται σε μια "άγνωστη" εξωτερική διαταραχή. Εξ'άλλου δεν είναι ούτε μετρήσιμη γιατί στα μοναδικά μεγέθη στα οποία έχουμε πρόσβαση είναι η είσοδος $u(t)$ και η έξοδος $y(t)$. Αν κάναμε μια υπόθεση για την τιμή της x_0, δηλαδή αν θεωρούσαμε ότι η αρχική συνθήκη είναι κάποια $\hat{x}_0$, τότε αντί της ακριβούς $x(t)$ θα είχαμε την $\hat{x}(t)$ που ικανοποιεί την εξίσωση

$$\dot{\hat{x}}(t)=A\hat{x}(t)+Bu(t) \tag{8.8}$$

με αρχική συνθήκη $\hat{x}(t_0)=\hat{x}_0$. Το διάγραμμα αναλογικής εξομοιώσεως της εξισώσεως (8.8) φαινεται στο σχήμα 8.4.



Σχήμα 8.4 Στοιχειώδης ασυμπτωτικός παρατηρητής

Είναι φανερό ότι, λόγω του σφάλματος εκτιμήσεως της αρχικής καταστάσεως θα ισχύει γενικά η σχέση $\hat{x}(t)\neq x(t)$. Ας εξετάσουμε την συμπεριφορά της διαφοράς $\hat{x}(t)-x(t)$ για $t>t_0$, όπου

$$\dot{\hat{x}}(t)=A\hat{x}(t)+Bu(t) \quad \text{με } \hat{x}(t_0)=\hat{x}_0$$

και

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t) \quad \text{με } x(t_0)=x_0$$

Συμβολίζοντας με $\tilde{x}(t)$ το σφάλμα εκτιμήσεως της καταστάσεως

$$\tilde{x}(t)=\hat{x}(t)-x(t),$$

έχουμε

$$\dot{\tilde{x}}(t)=\dot{\hat{x}}(t)-\dot{x}(t),$$

Αρα

$$\dot{\tilde{x}}(t)=A\hat{x}(t)+Bu(t)-Ax(t)-Bu(t)$$

$$=A\tilde{x}(t)$$

με $\tilde{x}(t_0)=\hat{x}_0-x_0$

Το σύστημα $\dot{\tilde{x}}(t)=A\tilde{x}(t)$ που περιγράφει την συμπεριφορά του σφάλματος $\tilde{x}(t)=\hat{x}(t)-x(t)$ έχει την $\tilde{x}=0$ σαν κατάσταση ισορροπίας. Ετσι αν η μήτρα A είναι ευσταθής τότε $\lim_{t\to\infty}\tilde{x}(t)=0$ δηλαδή μετά απο ορισμένο χρόνο θα έχουμε πρακτικά $\hat{x}(t)=x(t)$ και το πρόβλημα της εκτιμήσεως της καταστάσεως του συστήματος "λύθηκε". Ομως

1) Αν η μήτρα A είναι ασταθής, τότε το σφάλμα $\tilde{x}(\mathrm{t})=\hat{x}(t)-x(t)$ μεγαλώνει καθώς το t μεγαλώνει.

2) Αν η μήτρα A είναι ευσταθής αλλά οι απόλυτες τιμές των αρνητικών πραγματικών μερών των ιδιοτιμών της A είναι πολύ-πολύ μικρές, τότε θα αργήσει πολύ η "σύμπτωση" της $\hat{x}(t)$ προς την $x(t)$.

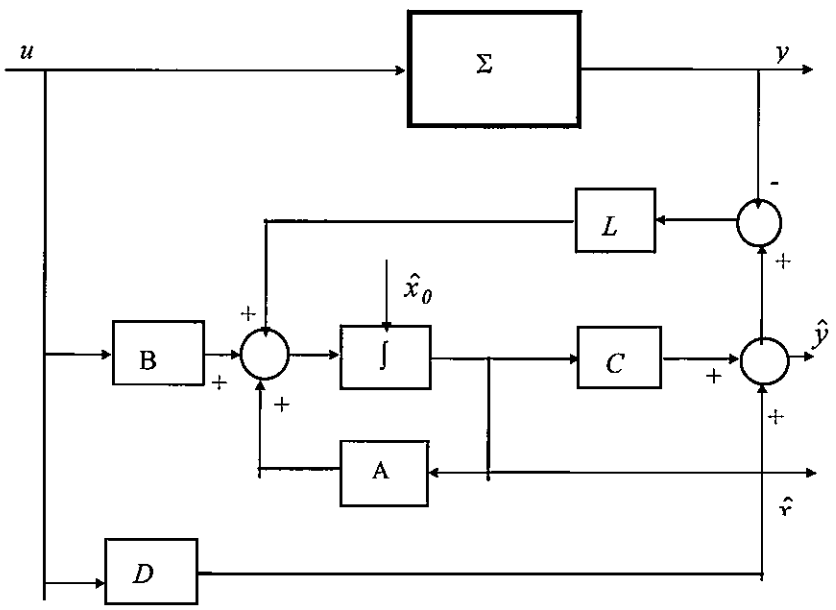
Συνεπώς ο εκτιμητής που σχεδιάσαμε χρειάζεται συμπλήρωμα. Για τον σκοπό αυτό θα λάβουμε υπ'όψιν και την έξοδο του συστήματος, πληροφορία που αγνοήσαμε μέχρι τώρα. Ο παρατηρητής αυτός θά περιγράφεται από την εξίσωση

$$\dot{\hat{x}}(t)=A\hat{x}(t)+Bu(t)+L[\hat{y}(t)-y(t)]$$

όπου

$$\hat{y}(t)=C\,\hat{x}(t)+Du(t)$$

και όπου L είναι μια μήτρα διαστάσεων nxp. Οπως βλέπουμε ο παρατηρητής αυτός έχει σαν εισόδους τα μετρήσιμα μεγέθη u t) και $y(t)$.



Σχήμα 8.5 Πλήρης ασυμπτωτικός παρατηρητής

Ας δούμε αν, ξεκινώντας απο μια αυθαίρετη αρχική κατάσταση x_0, ισχύει η σχέση $\lim_{t\to\infty} \hat{x}(t;t_0,\hat{x}_0)=x(t;t_0,x_0)$ όπου $x(t;t_0,x_0)$ είναι η λύση του συστήματος

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t)$$

$$y(t)=Cx(t)+Du(t)$$

Από το λειτουργικό διάγραμμα έχουμε του σχήματος 8.5:

$$\dot{\hat{x}}(t)=A\hat{x}(t)+Bu(t)+L[\hat{y}(t)-y(t)]=$$

$$=A\hat{x}(t)+Bu(t)+L[C\hat{x}(t)+Du(t)]-L[Cx(t)-Du(t)]$$

Αρα

$$\dot{\tilde{x}}(t)=\dot{\hat{x}}(t)-\dot{x}(t)=$$

$$=A\hat{x}(t)+Bu(t)+L[C\hat{x}(t)+Du(t)]-L[Cx(t)-Du(t)]-Ax(t)-Bu(t)$$

$$=A[\hat{x}(t)-x(t)]+LC[\hat{x}(t)-x(t)]$$

$$=(A+LC)[\hat{x}(t)-x(t)]$$

Δηλαδή

$$\dot{\tilde{x}}(t)=(A+LC)\tilde{x}(t)$$

με $\tilde{x}(t_0)=\hat{x}_0-x_0$

Η εξίσωση αυτή έχει την $\tilde{x}=0$ σαν λύση ισορροπίας. Αν η μήτρα $A+LC$ είναι ευσταθής τότε

$$\lim_{t\to\infty}\tilde{x}(t;t_0,\tilde{x}_0)=0 \qquad \text{για οποιοδήποτε } \tilde{x}_0\Re^n$$

δηλαδή

$$\lim_{t\to\infty}\hat{x}(t;t_0,\hat{x}_0)=x(t;t_0,x_0)$$

για οποιοδήποτε $\hat{x}_0\in\Re^n$. Αν επι πλέον η L εκλεγεί έτσι ώστε οι απόλυτες τιμές των αρνητικών πραγματικών μερών των ιδιοτιμών της $A+LC$ να είναι σχετικά μεγάλες τότε μετά από λίγο χρόνο θα ισχύει πρακτικά η σχέση $\hat{x}(t;t_0,\hat{x}_0)\approx x(t;t_0,x_0)$

Το ερώτημα που τίθεται είναι αν υπάρχει μια τέτοια μήτρα L. Απάντηση στο ερώτημα αυτό δίνει το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 8.4

Αν το ζεύγος (A,C), όπου $A\in\Re^{nxn}$ και $C\in\Re^{pxn}$ είναι παρατηρήσιμο, τότε, δοθέντος ενός αυτοσυζυγούς συνόλου πραγματικών ή μιγαδικών αριθμών $\Lambda=\{\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n\}$ υπάρχει πάντοτε μια μήτρα $L\in\Re^{nxp}$ τέτοια ώστε το Λ να είναι το σύνολο των ιδιοτιμών της $A+LC$.

Μία μέθοδος προσδιορισμού μίας μήτρας L έτσι ώστε η $A+LC$ να έχει επιθυμητές ιδιοτιμές $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$ έχει ως εξής: Υποθέτουμε ότι οι μιγαδικοί αριθμοί λ_i $i=1,2,...,q$ δεν συμπίπτουν με καμμία από τις ιδιοτιμές της μήτρας A ενώ οι λ_i $i=q+1,\ q+2,\ ...,n$ είναι ευσταθείς ιδιοτιμές τις μήτρας A. Σχηματίζουμε την μήτρα

$$U=\begin{bmatrix} u_1^T \\ u_2^T \\ \vdots \\ u_q^T \\ u_{q+1}^T \\ \vdots \\ u_n^T \end{bmatrix}$$

όπου u_i^T $i=q+1,\ q+2,\ ...,n$ είναι τα αριστερά ιδιοδιανύσματα της μήτρας A που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές λ_i $i=q+1,q+2,\ ...,n$ και u_i^T $i=1,2,...,q$ διανύσματα που υπολογίζονται από τις σχέσεις

$$u_i^T=v_i^T C\,(\lambda_i I_n\text{-}A)^{-1}$$

όπου $v_i^T \in \Re^{1xm}$ $i=1,2,...,q$ είναι τυχαία μη μηδενικά διανύσματα γραμμής τέτοια ώστε τα διανύσματα u_i^T $i=1,2,...,n$ να είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Ετσι η μήτρα U είναι αντιστρέψιμη.

Σχηματίζουμε τώρα την μήτρα

$$V=\begin{bmatrix} v_1^T \\ v_2^T \\ \vdots \\ v_q^T \\ v_{q+1}^T \\ \vdots \\ v_n^T \end{bmatrix}$$

όπου $v_i^T \in \Re^{1xm}$ $i=q+1,\ q+2,\ ...,n$ είναι μηδενικά ιδιοδιανύσματα γραμμής. Τότε, θέτοντας

$$L=U^1V$$

οι αριθμοί $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ είναι ιδιοτιμές της μήτρας $A+LC$

<u>Απόδειξη:</u>

Θα αποδείξουμε ότι για κάθε λ_i ισχύει $u_i^T(A+LC)=\lambda_i u_i^T$ $i=1,2,...,n$. Πράγματι, για λ_i $i=1,2,...,q$ ισχύει

$$u_i^T(A+LC)= u_i^T A+u_i^T LC=$$

$$=u_i^T A+u_i^T U^1VC=$$

$$=u_i^T A+e_i^T VC=$$

$$=u_i^T A+v_i^T C$$

όπου e_i^T είναι το n-διάστατο διάνυσμα γραμμής με μηδενικές συνιστώσες πλην της i-στης που ισούται με την μονάδα γιατί το διάνυσμα u_i^T είναι η i-στή γραμμή της μήτρας U και $U\,U^1=I_n$

Αλλά

$$=u_i^T A+e_i^T VC=$$

$$u_i^T A + v_i^T C = \lambda_i u_i^T \qquad i=1,2,\dots,q$$

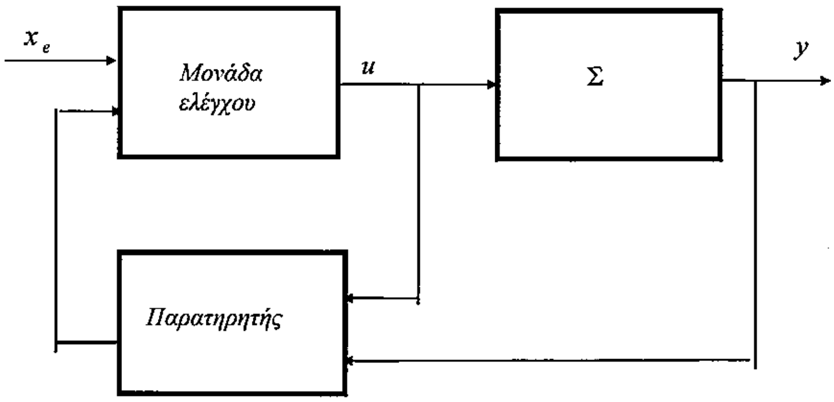
γιατί $u_i^T = v_i^T C(\lambda_i I_n - A)^{-1}$. Αρα $u_i^T(A+LC)=\lambda_i u_i^T$ για $i=1,2,\dots,q$. Εξ' άλλου για $i=q+1$, $q+2$, ...,n προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} u_i^T(A+LC) &= u_i^T A + u_i^T LC = \\ &= u_i^T A + u_i^T U^{-1} VC = \\ &= u_i^T A + e_i^T VC = \\ &= u_i^T A + v_i^T C = \\ &= \lambda_i u_i^T \end{aligned}$$

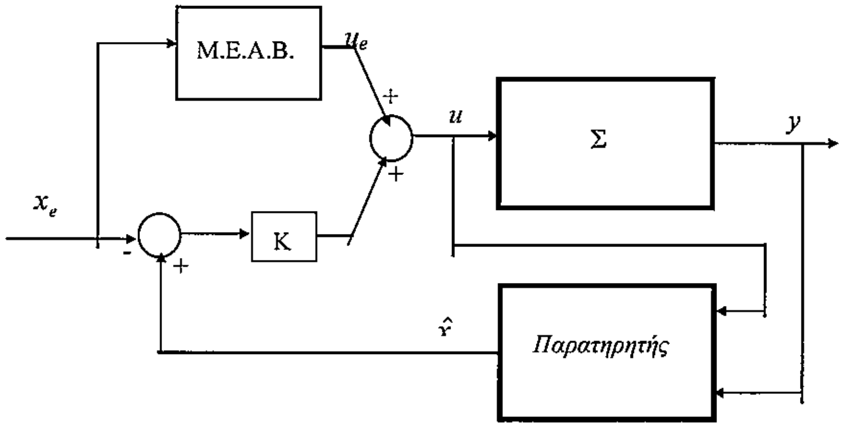
γιατί $v_i^T C = 0$ και τα v_i^T είναι αριστερά ιδιοδιανύσματα της μήτρας A για $i=q+1$, $q+2$, ..., n. Συνεπώς όλοι οι αριθμοί λ_i $i=1,2,\dots,n$ είναι ιδιοτιμές της μήτρας $A+LC$.

8.7 Η αρχή του διαχωρισμού

Το σύστημα που σχεδιάσαμε μπορεί να παρασταθεί ως εξής:



ή αναλυτικότερα



Ας θυμηθούμε ότι την μήτρα K της μονάδας ελέγχου την υπολογίσαμε θεωρώντας ότι ανατροφοδοτούμε την πραγματική τιμή της μεταβλητής καταστάσεως $x(t)$. Στην υλοποίηση πάντως του συστήματος χρησιμοποιούμε την εκτίμηση $\hat{x}(t)$ και όχι την $x(t)$. Ετσι, στην περίπτωση του προβλήματος της ρυθμίσεως αντί του νόμου ελέγχου

$$u[x(t);x_e]=K(x(t)-x_e)+u_e$$

εφαρμόζουμε τον νόμο

$$\hat{u}[\hat{x}(t);x_e]=K(\hat{x}(t)-x_e)+u_e$$

όπου $\hat{x}(t)$ είναι η εκτίμηση της $x(t)$ όπως δίνεται από την έξοδο του παρατηρητή. Τίθεται λοιπόν το ερώτημα: Πώς επηρρεάζεται η συμπεριφορά του συστήματος όταν αντί της $x(t)$ χρησιμοποιούμε την $\hat{x}(t)$ για τον προσδιορισμό του ελέγχου u; Και συγκεκριμένα, η απόκλιση της καταστάσεως από την επιθυμητή κατάσταση ισορροπίας εξακολουθεί να συγκλίνει στο μηδέν και αν ναί με ποιά ταχύτητα; Ανάλογα ερωτήματα μπορούν να τεθούν και για το πρόβλημα της παρακολουθήσεως. Αντικείμενο των επόμενων παραγράφων είναι η διερεύνηση των ερωτημάτων αυτών.

Η συμπεριφορά του συστήματος όταν εφαρμόζεται ο έλεγχος

$$u(t)=u_e+K[\hat{x}(t)-x_e]$$

περιγράφεται από την σχέση

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+BK[\hat{x}(t)-x_e]+Bu_e$$

Συνεπώς η απόκλιση $z(t)$ της $x(t)$ από την επιθυμητή κατάσταση ισορροπίας x_e θα ικανοποιεί την εξίσωση

$$\dot{z}(t) = Az(t)+Ax_e+BK[\hat{x}(t)-x_e]+Bx_e=$$

$$=Az(t)+BK[x(t)-x_e]+BK[\hat{x}(t)-x(t)]+Ax_e+Bu_e=$$

$$=(A+BK)z(t)+BK[\hat{x}(t)-x(t)]=$$

ή

$$\dot{z}(t) = (A+BK)z(t)+BK\tilde{x}(t) \tag{8.9}$$

όπου

$$\tilde{x}(t)=\hat{x}(t)-x(t)$$

είναι το σφάλμα εκτιμήσεως της καταστάσεως του συστήματος. Υπενθυμίζεται ότι ο έλεγχος ανοικτού βρόχου u_e έχει υπολογισθεί έτσι ώστε $Ax_e+Bu_e=0$. Εξ'άλλου, από τον σχεδιασμό του παρατηρητή προκύπτει ότι

$$\dot{\tilde{x}}(t) = (A+LC)\,\tilde{x}(t) \tag{8.10}$$

Οι εξισώσεις (8.9) και (8.10) μπορούν να τεθούν στην μορφή

$$\begin{bmatrix} \dot{z}(t) \\ \dot{\tilde{x}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A+BK & BK \\ 0_n & A+LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z(t) \\ \tilde{x}(t) \end{bmatrix}$$

Η εξίσωση αυτή περιγράφει ένα σύστημα χωρίς είσοδο και με διάνυσμα καταστάσεως που έχει σαν συνιστώσες α) τις αποκλίσεις $z_i(t)$ των μεταβλητών καταστάσεως του ελεγχόμενου συστήματος από τις αντίστοιχες συνιστώσες της επιθυμητής καταστάσεως ισορροπίας και β) τα σφάλματα της εκτιμήσεως $\tilde{x}_i(t)$ των μεταβλητών καταστάσεως από τον παρατηρητή. Οι ιδιοτιμές του συστήματος αυτού είναι οι ιδιοτιμές των μητρών $A+BK$ και $A+LC$. Αρα η ισορροπία $z=0$, $\tilde{x}=0$ του συστήματος αυτού είναι ασυμπτωτικά ευσταθής και κατά συνέπεια για οποιαδήποτε αρχική απόκλιση $z(t_0)$ της καταστάσεως $x(t)$ του ελεγχόμενου συστήματος από την επιθυμητή κατάσταση ισορροπίας x_e και οποιοδήποτε αρχικό σφάλμα $\tilde{x}(t_0)$ της εκτιμήσεως του διανύσματος καταστάσεως η απόκλιση $z(t)$ τείνει ασυμπτωτικά στο μηδέν και μάλιστα με εκθετική σύγκλιση της οποίας η ταχύτητα καθορίζεται κυρίως από τις ιδιοτιμές της μήτρας $A+BK$. Αυτό σημαίνει ότι οι σχεδιασμοί της μονάδας ελέγχου και του παρατηρητή μπορούν να γίνουν ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλο. Η ιδιότητα αυτή είναι γνωστή με το όνομα "*αρχή* *διαχωρισμού*" και σημαίνει ότι ορθώς σχεδιάσαμε ξεχωριστά το σύστημα ελέγχου απο τον εκτιμητή καταστάσεως.