Ασκήσεις

Άσκηση 1: (Υπολογισμός Υπόχωρου Ελεγξιμότητας)

Γιά τό σύστημα:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$\operatorname{Im} C = ?$

Μήτρα ελεγξιμότητας:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ τάξη $C = 2$ διότι στήλες (1), (4) $\equiv$ γραμμ. ανεξάρτητες

Άρα, $\operatorname{Im} C = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R}^4 : x = \begin{pmatrix} \alpha \\ -\alpha \\ b \\ -b \end{pmatrix}, \alpha, b \in \mathbb{R} \right\}$

Άσκηση 2: (τάξη πίνακα, βάσεις Im( ), Ker( ))

Έστω ο γραμμικός μετασχηματισμός $F: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$F = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -4 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -5 & 8 \end{bmatrix}$$

α) τάξη $F = ?$ $\equiv$ αριθμ. γραμμ. ανεξάρτητων στηλών

αριθμ. —''— —''— γραμμών

Άρα, τάξη $F = 2$

β) Η βάση για το $\operatorname{Im} F$ δημιουργείται από (τάξη $F = 2$), 2 γραμμ. ανεξ. στήλες του F.

Πιθανές επιλογές:

$$\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix} \right\}$$

(Γραμμ. ανεξαρτησία $\equiv$ ο αντίστοιχος 3×2 πίνακας έχει ένα υποπίνακα 2×2 με ορίζουσα $\neq 0$)

γ) Βάση για Ker F: Λύσεις της εξίσωσης $Fx=0$

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} & F & \end{bmatrix}}_{(3\times4)} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}}_{(4\times1)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{(3\times1)} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_2+x_4 \\ x_3-2x_4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

τότε πρέπει: $x_2 = -x_4$ και $x_3 = 2x_4$. Άρα για $x_1 = 1$, $x_4 = 0$

$\Rightarrow x_2 = x_3 = 0$ και άρα $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in \text{Ker} F$

Παρόμοια, για $x_1 = 0$, $x_4 = 1 \Rightarrow x_2 = -1$, $x_3 = 2$, και άρα

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \in \text{Ker} F$$

Τέλος,

$$\text{Ker} F \approx \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Άσκηση 3: (Ελεγξιμότητα, μη-ελέγξιμη κανονική μορφή)

Για το σύστημα:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} u(t)$$

α) Ελεγξιμότητα ?

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad AB = \dots = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad A^2B = \dots = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ -15 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathcal{C} = [B \;\; AB \;\; A^2B] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 7 \\ -3 & 7 & -15 \end{pmatrix}$$

$$\det \mathcal{C} = \left| \begin{matrix} 0 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 7 \\ -3 & 7 & -15 \end{matrix} \right| \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \\ -3 & 7 \end{matrix} = \dots = 0$$

$\Rightarrow$ τάξη $\mathcal{C} < 3$

- ο επάνω αριστερά 2×2 υποπίνακας $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ έχει μη-μηδενική

ορίζουσα $\Rightarrow$ $\boxed{\text{τάξη } \mathcal{C} = 2}$

□ ο επάνω αριστερά 2×2 υποπίνακας $\begin{bmatrix} 1 & -3 \end{bmatrix}$ έχει μή-μηδενική ορίζουσα $\Rightarrow$ $\boxed{\text{τάξη } \mathcal{C} = 2}$

β) Γιά την διάσπαση σε ελέγξιμο και μή ελέγξιμα υποσυστήματα:

Υπολογίζω τόν πίνακα Q τού μετασχ. ομοιότητας:

∘ τάξη $\mathcal{C} = 2 \Rightarrow$ 2 γραμμ. ανεξάρτητες στήλες/διανύσματα + 1 επιπλέον, πού επιλέγουμε ώστε $\det Q \neq 0$

$$\Rightarrow \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ -3 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

Τότε, $\hat{A} = Q^{-1} A Q = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, $\hat{B} = Q^{-1} B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

άρα $A_{11} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$, $B_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\rightsquigarrow$ ελέγξιμο

Άσκηση 4 (Έλεγχος Ελεγξιμότητας)

Γιά τό σύστημα τής προηγούμενης άσκησης (διαφορετικός τρόπος)

Ιδιοτιμές τού πίνακα A: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = -3$

Τότε, αντίστοιχα (αρ.) ιδιοδιανύσματα: $W_1\big|_{\lambda_1} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$, $W_2\big/_{\lambda_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

$W_3\big/_{\lambda_3} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Προκύπτει ότι $\boxed{W_3^T B = \varnothing}$ $\Rightarrow \lambda_3 \equiv$ μη-ελέγξιμη ιδιοτιμή

∘ Ακόμα ισχύει ότι: $W_3^T \mathcal{C} = W_3^T \left[B \quad AB \quad A^2 B \right] = \left(2 \quad 3 \quad 1 \right) \begin{pmatrix} \varnothing & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 7 \\ -3 & 7 & -15 \end{pmatrix} =$

$= \left(\varnothing \quad \varnothing \quad \varnothing \right)$

Άσκηση 5 (Έλεγχος σταθεροποιησιμότητας)

Γιά τό ίδιο σύστημα τών προηγούμενων ασκήσεων: $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Γιά τό ίδιο σύστημα τών προηγούμενων ασκήσεων:

Ισχύει ότι ο μετασχηματισμός $x(t) = T z(t)$ με $T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ -3 & 7 & 1 \end{bmatrix}$

οδηγεί στην μή-ελέγξιμη κανονική μορφή

$$\hat{A} = T^{-1} A T = \left[\begin{array}{cc:c} 0 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & -3 \end{array}\right], \quad \hat{B} = T^{-1} B = \left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ \hdashline 0 \end{array}\right]$$

Προκύπτει ότι το μη-ελέγξιμο υποσύστημα είναι 1-διάστατο, με $A_{22} = -3$

Άρα, είναι σταθεροποιήσιμο (ορισμός)

Άρα, μπορούμε νά μετακινήσουμε 2 ιδιοτιμές του αρχικού συστήματος.

Έστω ότι θέλουμε σάν ιδιοτιμές του συστ. κλειστού βρόχου $\hat{\lambda}_{1,2} = -2 \pm j2$

τότε ο έλεγχος K_1 πού πρέπει νά εφαρμοσθεί στό ελέγξιμο υποσύστημα

(A_{11}, B_1) υπολογίζεται ως έξής: . . .

Άσκηση 6 (Σχεδιασμός Παρατηρητή)

Γιά τό σύστημα:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & -4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

Νά σχεδιασθεί παρατηρητής (πλήρους τάξης)

- Τό σύστημα βρίσκεται στην κανονική μορφή ελεγξιμότητας, άρα:

χ.π. $\alpha(s) = s^3 + s^2 + 4s + 4 \rightsquigarrow \alpha_2 = 1, \ \alpha_1 = 4, \ \alpha_0 = 4$

$= (s+1)(s-j2)(s+j2)$

$\Rightarrow \lambda_{1,2,3} = +1, \ \pm j2$

Επιλέγουμε ιδιοτιμές για τό σύστημα του παρατηρητή:

$$\{\mu_1, \mu_2, \mu_3\} = \{-1, -2, -3\}$$

Τότε, (χ.π.) $\hat{\alpha}(s) = (s+1)(s+2)(s+3)$

$$= s^3 + 6s^2 + 11s + 6 \quad \Rightarrow \alpha_2 = 6,\ \alpha_1 = 11,\ \alpha_0 = 6$$

- Έλεγχος παρατηρησιμότητας: $Q = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Προφανώς $\det Q \neq \emptyset \Rightarrow$ σύστημα (πλήρως) παρατηρήσιμο

- Σχεδιασμός παρατηρητή (τ. Ackermann)

από το χ.π. του παρατηρητή: $\hat{\alpha}(A) = A^3 + 6A^2 + 11A + 6\mathbb{1}$

$$= \begin{bmatrix} -4 & -4 & -1 \\ 4 & 0 & -3 \\ 12 & 16 & 3 \end{bmatrix} + 6\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -4 & -4 & -1 \\ 4 & 0 & -2 \end{bmatrix} + 11\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & -4 & -1 \end{bmatrix}$$

$$+ 6\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 7 & 5 \\ -20 & -18 & 2 \\ -8 & -28 & -20 \end{bmatrix}$$

Τότε,

$$L = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 5 \\ -20 & -18 & 2 \\ -8 & -28 & -20 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -20 \end{bmatrix}$$

Άρα, ο παρατηρητής θα είναι:

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_1(t) \\ \dot{\hat{x}}_2(t) \\ \dot{\hat{x}}_3(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -5 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 16 & -4 & -1 \end{bmatrix}}_{A-LC}\begin{bmatrix} \hat{x}_1(t) \\ \hat{x}_2(t) \\ \hat{x}_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}u(t) + \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -20 \end{bmatrix}y(t)$$

Άσκηση 7 (Αρχή Διαχωρισμού)

Για το σύστημα της προηγούμενης άσκησης, γνωρίζουμε ότι: $\alpha(s) = s^3 + s^2 + 4s + 4$

με ιδιοτιμές $\lambda_{1,2,3} = \pm 1, \pm j2 \Rightarrow$ οριακά ευσταθές

Θέλουμε να τοποθετήσουμε με ανάδραση κατάστασης, τις ιδιοτιμές του συστήματος με ιδιοτιμές $\lambda_{1,2,3}$ …

Θέλουμε νά τοποθετήσουμε μέ ανάδραση κατάστασης, σάν ιδιοτιμές τοῦ συστήματος κλειστοῦ βρόχου:

$$\hat{\lambda}_{1,2,3} = -1\,,\ -\frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Χρησιμοποιώντας έναν παρατηρητή, γιά νά υλοποιήσουμε τόν νόμο ελέγχου

- Τό επιθυμητό Χ.Π. κλειστοῦ βρόχου είναι:

$$\hat{\alpha}(s) = s^3 + 2s^2 + 2s + 1$$

Επειδή όμως, τό σύστημα βρίσκεται στήν κανονική μορφή ελεγξιμότητας, άρα είναι πλήρως ελέγξιμο, μπορούμε νά σχεδιάσουμε τόν πίνακα κέρδους K_F (από τόν απλοποιημένο τ. Ackermann):

$$K_F = [\,(\hat{\alpha}_0 - \alpha_0) \quad (\hat{\alpha}_1 - \alpha_1) \quad (\hat{\alpha}_2 - \alpha_2)\,]$$
$$= [\,(1-4) \quad (2-4) \quad (2-1)\,]$$
$$= [\,-3 \quad -2 \quad 1\,]$$

- Επαληθεύουμε ότι ό πίνακας $A - BK$ έχει σάν Χ.Π. τό επιθυμητό Χ.Π. κλειστοῦ βρόχου.

- Ο έλεγχος $u(t) = -K_F\,x(t)$, υλοποιείται ως $u(t) = -K_F\,\hat{x}(t)$ όπου ή εκτίμηση $\hat{x}(t)$ τοῦ διανύσματος κατάστασης, υπολογίζεται από τόν παρατηρητή τής άσκησης 6 . . .