Ειδικες Μορφές Γραμμικών Χρον. Αμεταβλητων Συστημάτων

$$(\Sigma): \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \qquad A \in \mathbb{R}^{n\times n},\ B \in \mathbb{R}^{n\times m},\ C \in \mathbb{R}^{p\times n},\ D \in \mathbb{R}^{p\times m}$$

Ανακεφαλαίωση:

- (Σ) προσιτό $\iff$ $\mathcal{C} = [B \ AB, \dots A^{n-1}B]$: τάξη $\mathcal{C} = n$

  $Im(\mathcal{C}) = R_r \equiv$ υπόχωρος προσιτότητας

- (Σ) προσιτό $\iff$ ελέγξιμο
  -από- -στην-

- (Σ) παρατηρήσιμο $\iff$ $\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$: τάξη $\mathcal{O} = n$

  $Ker\,\mathcal{O} = R_{\bar{o}} \equiv$ υπόχωρος μη-παρατηρησιμότητας

- (Σ) παρατηρήσιμο $\iff$ ανακατασκευάσιμο

  Παρόμοια, για Ψηφιακά Συστήματα: ισοδυναμία προσιτότητας - Ελεγξιμότητας μόνο $A \equiv$ μη-ιδιάζων

Ειδική Μορφή Μη-Ελέγξιμων Συστημάτων

? μετασχ. ομοιότητας $\rightsquigarrow$ αλλαγή βάσης στο Χώρο Κατάστασης

Κατασκευή του Μετασχ. Ομοιότητας

I Έστω τάξη $\mathcal{C} = n_r < n \Rightarrow R_r \equiv Im(\mathcal{C})$: $\dim R_r = n_r < n$

Έστω $\{v_1, v_2, \dots v_{n_r}\} \equiv$ βάση του R_r

διανύσματα (n_r στήλες γραμμ. ανεξάρτητες του $\mathcal{C}$)

II Ορίζουμε μία μήτρα Q $(n\times n)$:

$$Q \triangleq [v_1, v_2, \dots v_{n_r}, Q_{n-n_r}]$$

"αυθαίρετα" $\approx \det Q \neq \emptyset$ ($\rightsquigarrow \exists$ πολλές επιλογές Q)

$n-n_r$ γραμμ. ανεξ. διανύσματα

Πρόταση:

Για (A,B) μη-ελέγξιμο (πλήρως), $\exists$ Q μη-ιδιάζων :

$$\hat{A} = Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} A_1 & A_{12} \\ \emptyset & A_2 \end{bmatrix} \qquad A_1 \in \mathbb{R}^{n_r\times n_r}$$

$$\hat{B} = Q^{-1}B = \begin{bmatrix} B_1 \\ \emptyset \end{bmatrix} \qquad B_1 \in \mathbb{R}^{n_r\times m}$$

$\Rightarrow (A_1, B_1)$ ελέγξιμο

- $(\hat{A}, \hat{B}) \equiv$ Ειδική μορφή μη-ελέγξιμων συστημάτων

- Ο πίνακας $\hat{\mathcal{C}} = [\hat{B}, \hat{A}\hat{B}, \dots \hat{A}^{n-1}\hat{B}] = \begin{bmatrix} B_1 & A_1B_1 & \dots & A_1^{n-1}B_1 \\ \emptyset & \emptyset & & \emptyset \end{bmatrix}$ $(n\times nm)$

Ο πίνακας $\mathcal{C} = [B, AB, \dots A \; B] = \begin{bmatrix} \cdot \\ \emptyset & \emptyset & \cdots & \emptyset \end{bmatrix}$. $(n \times nm)$

$$\text{τάξη } \hat{\mathcal{C}} = n_r = \text{τάξη } [B_1, \; A_1 B_1, \; \dots \; A_1^{n-1} B_1]$$

Ισχύει επίσης $\boxed{\hat{\mathcal{C}} = Q^{-1} \mathcal{C}}$

- $\operatorname{Im}(\hat{\mathcal{C}})$ = ελέγξιμος υπόχωρος του $(\hat{A}, \hat{B})$

$$\forall \; x \in \operatorname{Im}(\hat{\mathcal{C}}) \equiv \left\{ \begin{bmatrix} \alpha \\ \emptyset \end{bmatrix} \right\} \quad \alpha \in \mathbb{R}^{n_r}$$

  - κάθε διάνυσμα ελέγξιμο γράφεται στην μορφή $\begin{bmatrix} \alpha \\ \emptyset \end{bmatrix}$
  - τελευταίες $n - n_r$ γραμμές $\equiv \emptyset$

- ο μετασχ. ομοιότητας άλλαξε την βάση του $\mathbb{R}^n$

νέο: $\boxed{\hat{x}(t) = Q^{-1} x(t)}$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_1(t) \\ \dot{\hat{x}}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & A_{12} \\ \emptyset & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ \emptyset \end{bmatrix} u$$

$$\rightarrow \begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 = A_1 \hat{x}_1 + A_{12} \hat{x}_2 + B_1 u \\ \dot{\hat{x}}_2 = A_2 \hat{x}_2 \end{cases} \longleftarrow \text{ η } u \text{ δεν επηρεάζει την } x_2$$

άρα
- n_r ιδιοτιμές A_1 ≡ ελέγξιμες του (A, B)
- $n - n_r$ —//— A_2 ≡ μη-ελέγξιμες ιδιοτιμές του (A, B)

- στην λύση (απόκριση) — μηδενικής κατάστασης, οι μη-ελέγξιμες δεν εμφανίζονται

Παράδειγμα:

$$A = \begin{pmatrix} \emptyset & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ \emptyset & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & \emptyset \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{C} = [B \;\; AB \;\; A^2B] = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} 1 & \emptyset & \emptyset & 1 & \emptyset & -1 \\ 1 & 1 & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ 1 & 2 & \emptyset & -1 & \emptyset & 1 \end{array}\right]$$

(? εύρεση τάξης μη-τετραγωνικού πίνακα)

$$\text{τάξη } \mathcal{C} = n_r = 2 < 3 = n \quad \Rightarrow (A, B) \text{ μη-ελέγξιμο}$$

$$\Rightarrow R_r \equiv \operatorname{Im}(\mathcal{C}) \equiv \boxed{\text{διάστασης } 2 = n_r} \Rightarrow \exists \text{ βάση } \{ v_1, v_2 \}$$

2 γραμμ. ανεξ. στήλες $\mathcal{C}$

Ορίζουμε $Q \triangleq [v_1, \; v_2, \; Q_1] =$

$$Q = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \emptyset & \emptyset \\ 1 & 1 & \emptyset \\ 1 & 2 & 1 \end{array}\right] \quad (\Rightarrow \det Q \neq \emptyset)$$

$$\hat{A} = Q^{-1} A Q = \begin{bmatrix} 1 & \emptyset & \emptyset \\ -1 & 1 & \emptyset \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & & \\ & A & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \emptyset & \emptyset \\ 1 & 1 & \emptyset \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \dots = \left[\begin{array}{cc|c} \emptyset & 1 & 1 \\ \emptyset & -1 & \emptyset \\ \hline \emptyset & \emptyset & -2 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} A_1 & A_{12} \\ \emptyset & A_2 \end{bmatrix}$$

A_1, A_{12}, A_2

$$\hat{B} = Q^{-1} B = \begin{bmatrix} \\ -//- \\ \\ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \emptyset \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc} 1 & \emptyset \\ \emptyset & 1 \\ \hline \emptyset & \emptyset \end{array}\right] = \begin{bmatrix} B_1 \\ \emptyset \end{bmatrix}$$

όπου, (A_1, B_1) ελέγξιμο

(ιδιοτιμές A: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = -2$

$(\hat{A}, \hat{B}) \rightsquigarrow \left.\begin{array}{l}\lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = -1\end{array}\right\}$ ελέγξιμες (A_1)

$\lambda_3 = -2 \to$ μη ελέγξιμες (A_2))

<u>Άσκηση</u>: Λύστε πάλι το παράδειγμα, για διαφορετική επιλογή των v_1, v_2

Ειδική Μορφή Μη-Παρατηρήσιμων Συστημάτων

(ευκολότερος τρόπος:)

Δυαδικότητα:

$(A, C) \rightsquigarrow (A_D = A^T, \; B_D = C^T)$ δυαδικό του (A, C)

$(A_D, B_D) \rightsquigarrow$ ελεγξιμότητα

$\hookrightarrow \hat{A}_D, \hat{B}_D \to A^T, C^T$

$$\hat{A}_D = Q_D^{-1} A_D Q_D = \begin{bmatrix} A_{D_1} & A_{D_{12}} \\ \emptyset & A_{D_2} \end{bmatrix} \Rightarrow (A_{D_1}, B_{D_1}) \approx \text{ελέγξιμο}$$

$$\hat{B}_D = Q_D^{-1} B = \begin{bmatrix} B_{D_1} \\ \emptyset \end{bmatrix}$$

- $\hat{A} = \hat{A}_D^T = Q_D^T A_D^T (Q_D^T)^{-1} = Q_D^T A (Q_D^T)^{-1} = \begin{bmatrix} A_{D_1}^T & \emptyset \\ A_{D_{12}}^T & A_{D_2}^T \end{bmatrix}$

- $\hat{C} = \hat{B}_D^T = B_D^T (Q_D^T)^{-1} = C (Q_D^T)^{-1} = \begin{bmatrix} B_{D_1}^T & \emptyset \end{bmatrix}$

$(A_{D_1}^T, B_{D_1}^T) =$ παρατηρήσιμο

Παράδειγμα:

$$A = \begin{pmatrix} \emptyset & 1 & \emptyset \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \emptyset & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A_D = A^T, \quad B_D = C^T \to$$

- - - - - - - -

(συμπληρώστε το...)

(2ος Τρόπος): πίνακας παρατηρησιμότητας $\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$

Έστω τάξη $\mathcal{O} = n_o < n$ (μη-παρατηρήσιμο)

υπόχωρος μη-παρατηρησιμότητας $R_{\bar{o}} = \mathrm{Ker}(\mathcal{O})$

$$\Rightarrow \boxed{\dim R_{\bar{o}} = n - n_o}$$

(<u>συμβολισμός</u>
$\bar{o}$ = μη- ...
$\bar{*}$ = μη- ...)

$\overline{*}$ = μη - ...

$$\Rightarrow \boxed{\dim R_{\bar{o}} = n - n_o}$$

μια βάση $R_{\bar{o}} = \{ v_1, v_2 \ \dots \ v_{n-n_o} \}$

n_o γραμμ. ανεξ. του O

Ορίζουμε: $Q \triangleq [\, Q_{n_o}, v_1, v_2, \dots v_{n-n_o} \,]$

$Q_{n_o} \equiv n_o$ γραμμ. ανεξ. : $\det Q \neq \emptyset$

Πρόταση:

Για (A, C) μη-παρατηρήσιμο $\Rightarrow \exists\ Q\ (\det Q \neq \emptyset)$

$$\hat{A} = Q^{-1} A Q = \begin{bmatrix} A_1 & \emptyset \\ A_{21} & A_2 \end{bmatrix}, \quad A_1 \in \mathbb{R}^{n_o \times n_o}$$

$\Rightarrow$ (A_1, C_1) παρατηρήσιμο

$$\hat{C} = C Q = [\, C_1 \quad \emptyset \,], \quad C_1 \in \mathbb{R}^{p \times n_o}$$

– $(\hat{A}, \hat{C}) \equiv$ ειδική μορφή μη-παρατηρήσιμων συστημάτων

Πίνακας Παρατηρησιμότητας
$$\hat{O} = \begin{bmatrix} \hat{C} \\ \hat{C}\hat{A} \\ \vdots \\ \hat{C}\hat{A}^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & \emptyset \\ C_1 A_1 & \emptyset \\ \vdots & \vdots \\ C_1 A_1^{n-1} & \emptyset \end{bmatrix}$$

$$\text{τάξη } \hat{O} = \text{τάξη} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_1 A_1 \\ \vdots \\ C_1 A_1^{n-1} \end{bmatrix} = n_o$$

Επίσης ισχύει: $\boxed{\hat{O} = O Q}$

$\Rightarrow \ker \hat{O}$ ($\equiv$ μη-παρατηρήσιμος υπόχωρος) $= \{ x : \hat{O} x = \emptyset \}$

$$\Rightarrow \boxed{[\, \emptyset, \alpha^T \,]^T \in \ker \hat{O}}$$

Τότε,

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_1 \\ \dot{\hat{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & \emptyset \\ A_{21} & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u \qquad \hat{x} = \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

$$\hat{x}_1 \in \mathbb{R}^{n_o}$$

$$y = [\, C_1 \quad \emptyset \,] \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} + D u$$

(A_1, C_1) παρατηρήσιμο $\Rightarrow$ n_o ιδιοτιμές A_1 = παρατηρήσιμες

$n - n_o$ –//– A_2 = μη-παρατηρήσιμες

- οι μη-παρατηρήσιμες ιδιοτιμές δεν εμφανίζονται στην έξοδο

(<u>Άσκηση</u>: $y(t) = C e^{At} x(0) + \int_0^t C e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau$

νά δειχθεί η απαίτηση παρατήρησης)

Παράδειγμα:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}, \quad C = (1 \quad 1)$$

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}, \quad \text{τάξη } \mathcal{O} = 1 (\equiv n_o) < 2$$

άρα $\dim R_{\bar{o}} = \dim(\ker \mathcal{O}) = n - n_o = 1$ όπου $v_1 = (1, -1)^T =$ βάση $R_{\bar{o}}$

ορίζουμε $Q = [Q_1 \ \ v_1] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

$\hookrightarrow \det Q \neq 0$

$$\hat{A} = Q^{-1} A Q = \dots = \left[\begin{array}{c|c} -2 & 0 \\ \hline 1 & -1 \end{array}\right] \equiv \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ A_{21} & A_2 \end{bmatrix}$$

$$\hat{C} = CQ = \dots = (1 \quad 0) \equiv (C_1 \quad 0)$$

$\Rightarrow$ (A_1, C_1) = παρατηρήσιμο

Θεώρημα Διάσπασης Kalman:

- $n_r = \dim(R_r) = \dim(\operatorname{Im} \mathcal{C}) =$ τάξη $\mathcal{C}$
- $n_{\bar{o}} = \dim(R_{\bar{o}}) = \dim(\ker \mathcal{O}) = n -$ τάξη $\mathcal{O} = n - n_o$
- : $R_{\bar{o}} \cap R_r \overset{\text{ορ}}{=} R_{r\bar{o}}$ (ελέγξιμος + μη-παρατηρήσιμος)

  τότε έστω $n_{r\bar{o}} \equiv \dim R_{r\bar{o}}$

Επιλέγουμε $Q \overset{\text{ορ}}{=} [v_1, \dots \underbrace{v_{n_r - n_{r\bar{o}}+1} \dots v_{n_r}}, Q_N, \underbrace{\hat{v}_1 \dots \hat{v}_{n_{\bar{o}} - n_{r\bar{o}}}}]$

- τα n_r διανύσματα $\{v_1, \dots v_{n_r}\}$
- τα τελευταία $n_{r\bar{o}}$ διανύσματα $\{v_{n_r - n_{r\bar{o}}+1} \dots v_{n_r}\}$ της βάσης R_r

  επιλέγονται ώστε να είναι και $\}$ βάση $R_{r\bar{o}} = R_r \cap R_{\bar{o}}$

- $n_{\bar{o}} - n_{r\bar{o}} = (n - n_o - n_{r\bar{o}})$ διανύσματα $\{\hat{v}_1, \dots \hat{v}_{n_{\bar{o}} - n_{r\bar{o}}}\}$

  επιλέγονται έτσι ώστε: μαζί με τα διανύσματα ($n_{r\bar{o}}$) $\{v_{n_r - n_{r\bar{o}}+1}, \dots v_{n_r}\}$ να αποτελούν βάση για το $R_{\bar{o}}$

- οι τελευταίες στήλες $N = (n - (n_r + n_{\bar{o}} - n_{r\bar{o}}))$, επιλέγονται ώστε $Q \equiv$ μη-ιδιάζων

Θεώρημα Διάσπασης (Kalman)

Αν (A, B) μη-ελέγξιμο & (A, C) μη-παρατηρήσιμο, $\exists$ Q $(\det Q \neq 0)$:

Άν (A,B) μη-ελέγξιμο & (A,C) μη-παρατηρήσιμο, $\exists\ Q\ (\det Q \neq 0)$:

$$\hat{A} = Q^{-1} A Q = \left[\begin{array}{cc|cc} A_{11} & 0 & A_{13} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ \hline 0 & 0 & A_{33} & 0 \\ 0 & 0 & A_{43} & A_{44} \end{array}\right]$$

$$\hat{B} = Q^{-1} B = \left[\begin{array}{c} B_1 \\ B_2 \\ \hline 0 \\ 0 \end{array}\right], \quad \hat{C} = CQ = [\,C_1,\ 0,\ C_3,\ 0\,]$$

όπου i) $\boxed{(A_c, B_c) = \text{ελέγξιμο}}$, $(A_c \in \mathbb{R}^{n_r \times n_r},\ B_c \in \mathbb{R}^{n_r \times m})$

$$A_c \triangleq \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \qquad B_c \triangleq \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$$

ii) $(A_o, C_o) =$ παρατηρήσιμο $\quad (A_o \in \mathbb{R}^{n_o \times n_o},\ C_o \in \mathbb{R}^{p \times n_o})$

$$A_o \triangleq \begin{bmatrix} A_{11} & A_{13} \\ 0 & A_{33} \end{bmatrix}, \quad C_o \triangleq [\,C_1 \quad C_3\,]$$

iii) (A_{11}, B_1, C_1): (A_{11}, B_1) ελέγξιμο +
(A_{11}, C_1) παρατηρήσιμο

Παρατήρηση: $A_{11} \ni$ ιδιοτιμές ελέγξιμες + παρατηρήσιμες
$A_{22} \ni$ -//- -//- + μη-παρατηρήσιμες
$A_{33} \ni$ -//- μη-ελέγξιμες + παρατηρήσιμες
$A_{44} \ni$ -//- -//- + μη-παρατηρήσιμες

Παράδειγμα:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = (0 \quad 1 \quad 0)$$

$\mathcal{C} \equiv$ πραγμ. παρατ.:

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

βάση $R_{\bar{o}} \equiv \dim \operatorname{Ker} \mathcal{O}) = \{(1,\ 0,\ -1)^T\}$, $\quad (\dim \operatorname{Ker} \mathcal{O} = 1)$

$\hookrightarrow \{x : \mathcal{O}x = 0\}$

Έχουμε τότε: $n_r = 2$

$n_{\bar{o}} = 1$

$n_{r\bar{o}} = 1$

$n_{\bar{o}} = 1$

$n_{r\bar{o}} = 1$

"Αρα, $Q = [v_1, v_2, Q_N] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \emptyset \\ 1 & \emptyset & \emptyset \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ $(\det Q \neq 0)$

$$\hat{A} = Q^{-1} A Q = \cdots = \begin{pmatrix} \emptyset & \emptyset & 1 \\ \emptyset & -1 & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & -2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} A_{11} & \emptyset & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ \emptyset & \emptyset & A_{33} \end{pmatrix}$$

$$\hat{B} = Q^{-1} B = \cdots = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \emptyset & -1 \\ \emptyset & \emptyset \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \emptyset \end{pmatrix}$$

$$\hat{C} = C Q = \cdots = (1, \emptyset \ \emptyset) \equiv (C_1 \ \emptyset, \ C_3)$$

Συμπέρασμα: η ιδιοτιμή $\emptyset \in A_{11}$ = ελέγξιμη + παρατηρήσιμη

-//- $-1 \in A_{22}$ = -//- + μη-παρατηρήσιμη

-//- $-2 \in A_{33}$ = μη-ελέγξιμη + παρατηρήσιμη

$\nexists$ ιδιοτιμή : μη-ελέγξιμη + μη-παρατηρήσιμη

Ελέγξιμη (Κανονική) Μορφή :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

(A,B) - ελέγξιμο (πλήρως) $\Rightarrow$ τάξη $\mathcal{C} = n$, $\mathcal{C} = [B, AB, \dots A^{n-1}B]$

έστω τάξη $B = m \leq n$

- Πως υπολογίζεται μετασχ. ομοιότητας ν κανονική μορφή ελεγξιμότητας: $(\hat{A}, \hat{B})$

1. Μια είσοδος $(m=1)$ $\quad \exists \ P$:

$$\hat{A} \overset{\text{ορ}}{=} P A P^{-1}, \quad \hat{B} = PB, \quad \hat{C} = C P^{-1}, \quad \hat{D} = D$$

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} \emptyset & 1 & \cdots & \emptyset \\ & \emptyset & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \cdots & -\alpha_{n-1} \end{pmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{pmatrix} \emptyset \\ \vdots \\ \emptyset \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{C} = \cdots$$

$$\alpha_i : \ \alpha(s) = \det(s\mathbb{I} - A) = s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \cdots + \alpha_1 s + \alpha_0$$

☐ Πως υπολογίζεται ο P ? $\quad (\hat{x} = Px)$

□ Πως υπολογίζεται ο P ? $(\hat{x} = Px)$

Έστω $\mathcal{C} = [B, AB, \dots A^{n-1}B]$, $\Rightarrow \mathcal{C}^{-1} = \begin{bmatrix} \times \\ q \end{bmatrix}$

$\boxed{q \triangleq \text{η-οστή γραμμή του } \mathcal{C}^{-1}}$

Τότε, $P \triangleq \begin{bmatrix} q \\ qA \\ \vdots \\ qA^{n-1} \end{bmatrix}$ Αποδεικνύεται: $PAP^{-1} = \hat{A}$

$PB = \hat{B}$

$\vdots$

Παράδειγμα:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & 1 & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(s\mathbb{1} - A) = (s+1)(s-1)(s+2) = s^3 + 2s^2 - s - 2$$

Εύρεση P:

$$\mathcal{C} = [B \;\; AB \;\; A^2B] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathcal{C}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1/3 & -1/3 \\ -1/2 & -1/2 & \emptyset \\ -1/2 & -\frac{1}{6} & 1/3 \end{bmatrix} \leftarrow q$$

τότε, $q \triangleq (-1/2, -1/6, 1/3)$

Άρα, $P \triangleq \begin{pmatrix} q \\ qA \\ qA^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & -1/6 & 1/3 \\ 1/2 & -1/6 & -2/3 \\ -1/2 & -1/6 & 4/3 \end{pmatrix}$

(Επαλήθευση) $\Rightarrow PAP^{-1} = \begin{pmatrix} \emptyset & 1 & \cdots & 0 \\ \emptyset & & \ddots & \emptyset \\ & & & 1 \\ -2 & -1 & & 2 \end{pmatrix} \equiv \hat{A}$

2. Πολλές έξοδοι $(m>1)$

$\mathcal{C} \in \mathbb{R}^{n \times nm}$ μη-τετραγωνικός

τάξη $\mathcal{C} \overset{?}{=} n$ → n γραμμ. ανεξ. στήλες $\mathcal{C}$ ⤳ πολλές διαφορετικές κανονικές μορφές

$\vdots$ $\vdots$

Κανονική Μορφή Παρατηρησιμότητας

$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$ τάξη $\mathcal{O} = n$, $P = ?$: $A_o = PAP^{-1}$

$B_o = PB$

$C_o = CP^{-1}$

$$A_o = \begin{pmatrix} \emptyset & \cdots & \emptyset & -\alpha_0 \\ 1 & & & -\alpha_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ \emptyset & & 1 & \alpha_{\dots} \end{pmatrix} \qquad C_o = (\emptyset \; \dots \; \emptyset \; 1)$$

$$A_o = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & & \vdots \\ & & \ddots & \vdots \\ \emptyset & & 1 & -\alpha_{n-1} \end{pmatrix} \qquad C_o = (\emptyset \ \cdots \ \emptyset \ 1)$$

$$\alpha_i : \alpha(s) = \det(sI - A) = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \cdots$$

1. Μια έξοδος ($p=1$)

$$P^{-1} = Q \overset{o\rho}{=} [\tilde{q}, A\tilde{q}, \ldots A^{n-1}\tilde{q}]$$

$$\boxed{\tilde{q} \overset{o\rho}{=} \text{η-οστή } \underline{\underline{\text{στήλη}}} \text{ του } \mathcal{O}^{-1}}$$

Παράδειγμα:

$$A = (\ \cdots\ ), \quad C = (1, -1, 1)$$

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathcal{O}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & -1/2 \\ -1/3 & -1/2 & -1/6 \\ -1/3 & \emptyset & 1/3 \end{pmatrix}$$

άρα, $\tilde{q} \overset{o\rho}{=} (-1/2, -1/6, 1/3)^T$

$$Q \equiv P^{-1} = [\tilde{q}, A\tilde{q}, A^2\tilde{q}] = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/6 & -1/6 & -1/6 \\ 1/3 & -2/3 & 4/3 \end{pmatrix}$$

(επαλήθευση) $$PAP^{-1} \to A_o = \begin{pmatrix} \emptyset & \emptyset & 2 \\ 1 & \emptyset & 1 \\ \emptyset & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

<u>Άσκηση</u>: Ξανα-λύστε το παράδειγμα χρησιμοποιώντας την δυαδικότητα ελεγξιμότητας - παρατηρησιμότητας