Συστηματα Συνεχους Χρονου

□ Χρονικά Μεταβαλλόμενα Συστήματα

$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$, $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B(t) \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$

(λύση) : $x(t, t_0, x_0) \overset{\text{ορ.}}{=} \Phi(t, t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau$ $\quad t \in (\alpha, b)$

Σκοπός να βρούμε $u(t)$ πού νά μεταφέρει την $x_0|_{t_0} \to x_1|_{t_1}$, $t_1 > t_0$

$$x_1 \equiv \Phi(t_1, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau$$

Θά πρέπει νά :

$\exists\, u(t)_{[t_0, t_1]}$: $x_1 - \Phi(t_1, t_0)x_0 = \int_{t_0}^{t} \Phi(t_1, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau$

$$\tilde{x}_1 \overset{\text{ορ}}{=} x_1 - \Phi(t_1, t_0)x_0$$

$?\; u(t) : x(t_0)|_{t_0} \to \tilde{x}_1 | t_1$

ορισμός: x_1 προσιτή $|_{t_1}$ άν $t_0 < t_1$, $\exists\, u(t) : x(t)|_{t_0} \to x_1 |_{t_1}$

$$\Rightarrow \exists u : x_1 = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau$$

οι χρόνοι t_0, t_1 σημαντικοί $\rightsquigarrow$ χρον. μεταβαλλόμενα

ορισμός: Υπόχωρος Προσιτότητας

$$R_r^{t_1} \overset{\text{ορ}}{=} \{ x_1 : x_1 = \text{προσιτό στο χρόνο } t_1 \}$$

(Σ) = πλήρως προσιτό όταν όλες οι καταστάσεις ≡ προσιτές $|\, t_1$

δηλ. $\forall\, x_1 \in \mathbb{R}^n \approx$ προσιτό $|\, t_1$

$$\Rightarrow \boxed{R_r^{t_1} \equiv \mathbb{R}^n}$$

Παρόμοια,

ορισμός. Ελέγξιμη (-στην-αρχή) κατάσταση x_0 , άν $t_1 > t_0$, $\exists\, u(t)$, $t \in [t_0, t_1]$

πού νά μεταφέρει $x(t)$, $x(t_0) = x_0 \longrightarrow x(t_1) \equiv \emptyset$

τότε, θά πρέπει να $\exists\, u(t)$:

(λύση) : $\emptyset - \Phi(t_1, t_0)x_0 = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau$, ή άλλιώς

$(\times\, \Phi^{-1}(t_1, t_0))$

$$\Rightarrow -x_0 = \int_{t_1}^{t_0} \Phi(t_0, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau$$

από την ιδιότητα:

$$\left(\Phi(t_0, t_1)\Phi(t_1, \tau) = \Phi(t_0, \tau)\right)$$

ορισμός: Υπόχωρος Ελεγξιμότητας

ορισμός: Υποχώρος Ελεγξιμότητας

$$R_c^{t_0} \overset{\text{ορ}}{=} \{ x_0 : x_0 \equiv \text{ελεγξιμο} \,/\, t_0 \}$$

-"- . $(\Sigma) =$ πλήρως ελεγξιμο αν $\forall x_0 =$ ελέγξιμο

$$\boxed{R_c^{t_0} \equiv \mathbb{R}^n}$$

Παρατηρησεις:

1. Αν θεωρήσουμε την παρακάτω απεικόνιση, γιά κάποιο t_1:

$$L : u \longmapsto x_1 \quad , \quad L : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\boxed{L \overset{\text{ορ}}{=} \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1,\tau) B(\tau) u(\tau) d\tau} \equiv L(u, t_0, t_1)$$

προκύπτει (από τις παραπάνω σχέσεις) ότι, η $\boxed{Im(L) = R_r^{t_1}}$, καθώς το $x_1 =$ προσιτό $/\, t_1$

αν $\exists\, t_0, u \;:\; x_1 \in Im(L)$

◦ επίσης $(\Sigma) \equiv$ προσιτό (πλήρως) όταν $Im(L) = \mathbb{R}^n$

Ειδικότερα,

– $x =$ προσιτο $|\, t_1$, αν $\exists\, t_0, u(t)$:

$$\boxed{x \in Im(L)} \qquad \left(x = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1,\tau) B(\tau) u(\tau) d\tau \right)$$

– $x =$ ελεγξιμο $|\, t_0$, αν $u(t)$.

$$\boxed{\Phi(t_1,t_0)\, x \in Im(L)} \qquad \left(-\Phi(t_1,t_0)\, x = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1,\tau) B(\tau) u(\tau) d\tau \right)$$

Άρα,

◦ $\boxed{(\Sigma) \equiv \text{(πλήρως) προσιτό} \iff \text{(πλήρως) ελέγξιμο}}$

Όμως, ΠΡΟΣΟΧΗ:

◦ Στα Διακριτά Χρόνου Συστήματα: προσιτότητα $\Rightarrow$ ελεγξιμότητα

αλλά η ελεγξιμότητα συνεπάγεται την προσιτότητα

ΜΟΝΟ όταν $\boxed{\text{τάξη } \Phi(k,k_0) = n}$ (πού δεν ισχύει πάντοτε!)

(στά συστήματα συνεχούς χρόνου, η $\Phi(t,\tau)$ είναι πάντοτε μή-ιδιάζουσα)

Σημείωση: η απεικόνιση L έχει πεδίο τιμών, άπειρης διάστασης!!

Γιά νά μελετήσουμε τήν $Im(L)$ πιό εύκολα, χρησιμοποιούμε τόν πίνακα

<u>ορισμός</u> Πίνακας Gramian προσιτότητας:

$$\boxed{W_r(t_0,t_1) \stackrel{\text{ορ}}{=} \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1,\tau)B(\tau)B^T(\tau)\Phi^T(t_1,\tau)\,d\tau}$$

$$W_r = W_r^T \geq 0$$

Ισχύει: $Im(L) \equiv Im(W_r(t_0,t_1))$ (γιά νά προσδιορίσουμε τήν $Im(L)$)

<u>Πρόταση</u>: $(\Sigma) \equiv$ προσιτό $|\, t_1 \iff \exists\, t_0 < t_1$: $\boxed{\text{τάξη } W_r(t_0,t_1) = n}$

<u>Π.χ.</u> $A(t) = \begin{pmatrix} -1 & e^{2t} \\ \emptyset & -1 \end{pmatrix}$, $B(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ \emptyset \end{pmatrix}$

έπειτα υπολογισμό $\Phi(t,\tau) = \begin{bmatrix} e^{-(t-\tau)} & \frac{1}{2}\left[e^{t+\tau} - e^{-t+3\tau}\right] \\ \emptyset & e^{-(t-\tau)} \end{bmatrix}$

$$\Phi(t,\tau)B(\tau) = \begin{bmatrix} e^{-t} \\ \emptyset \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow W_r(t_0,t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \begin{pmatrix} e^{-2t_1} & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset \end{pmatrix} d\tau = \begin{pmatrix} (t_1-t_0)\,e^{-2t_1} & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset \end{pmatrix}$$

$$\text{τάξη } W_r(t_0,t_1) < 2 \quad \Rightarrow \quad (\Sigma) \neq \text{προσιτό} \,|\, t_1$$

Από τά ανωτέρω καί χρησιμοποιώντας τόν Gramian πίνακα, μπορούμε νά αποδείξουμε:

<u>Θεώρημα</u>: (Σ) = ελέγξιμο $t_0 \iff \exists\ t^* > t_0$: η <u>γραμμές</u> τού $\Phi(t_0,\cdot)B(\cdot)$ ≡ γραμμ. ανεξάρτητες $[t_0, t^*]$

<u>Ορισμός</u>: Gramian Ελεγξιμότητας

$$W_c(t_0,t_1) \stackrel{\Delta}{=} \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0,\tau)B(\tau)B^T(\tau)\Phi^T(t_0,\tau)\,d\tau$$

$$\boxed{(\Sigma) \equiv \text{ελέγξιμο} \,|\, t_0 \iff \text{τάξη } W_c(t_0,t_1) = n}$$

(από τους ορισμούς) προκύπτει: $\boxed{W_r(t_0,t_1) = \Phi(t_1,t_0)\,W_c(t_0,t_1)\,\Phi^T(t_1,t_0)}$

Καί από τήν σχέση αυτή, μεταξύ Gramian προσιτότητας καί Gramian ελεγξιμότητας προκύπτει ότι:

$$\boxed{(\Sigma) \equiv \text{προσιτό} \iff (\Sigma)\ \text{ελέγξιμο}}$$

Συστήματα Χρονικά Αμετάβλητα

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad , \quad \Phi(t - t_0) = e^{A(t-t_0)} \quad , \quad t - t_0 = T$$

Θεωρώ $\begin{cases} t_0 = \emptyset \\ t = T \end{cases} \rightarrow$ Γ. Χ. Α

Ορισμός:

Gramian Προσιτότητας $W_r(\emptyset, T) \overset{\text{ορ}}{=} \int_0^T e^{A(T-\tau)} B B^T e^{A^T(T-\tau)} d\tau$

Έστω ο $n \times nm$ πίνακας ελεγξιμότητας (πίνακας προσιτότητας) πού ορίσαμε ως:

$$\mathcal{C} \overset{\text{ορ}}{=} [B \ AB \ .. \ A^{n-1}B]$$

Αποδεικνύεται ότι: $\boxed{\mathrm{Im}(W_r(\emptyset, T)) \equiv \mathrm{Im}(\mathcal{C})}$

Π.χ. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$e^{At} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad e^{At}B = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$W_r(\emptyset, T) = \int_0^T \begin{bmatrix} T-\tau \\ 1 \end{bmatrix} [T-\tau \ , \ 1] \, d\tau = \dots = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}T^3 & \frac{1}{2}T^2 \\ \frac{1}{2}T^2 & T \end{bmatrix}$$

$$\det W_r(\emptyset, T) = \frac{1}{12} T^4 \neq 0 \Rightarrow \text{τάξη } W_r(\emptyset, T) = n$$

Επιπρόσθετα,

$$\mathcal{C} = [B \ AB] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{τάξη } \mathcal{C} = n$$

$$\mathrm{Im}(W_r(\emptyset, T)) = \mathrm{Im}(\mathcal{C}) = \mathbb{R}^2$$

- αν έχω $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \dots$

Σχέση Προσιτότητας - Ελεγξιμότητας

Από την σχέση:

$$-\Phi(t_1, t_0)x_0 = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, \tau) B(\tau) u(\tau) d\tau$$

γνωρίζουμε ότι $x_0 \equiv$ ελέγξιμο (-στην αρχή) αν $\exists\, u(t),\ t \in [0, T]$:

Γ. Χ. Α. : $\quad -e^{AT} x_0 = \int^T e^{A(T-\tau)} B u(\tau) d\tau \equiv L(u, \emptyset, T)$

Γ.Χ.Α.:
$$-e^{AT}x_0 = \int_0^T e^{A(T-\tau)} B u(\tau)\, d\tau \equiv L(u, \emptyset, T)$$

ή, αν $\exists\ u(t)_{[\emptyset,T]}$:
$$\boxed{\begin{array}{l} e^{AT}x_0 \in Im(W_r(\emptyset,T)) \\ e^{AT}x_0 \in Im(C) \end{array}}$$

Πρόταση:

Αν $x \in Im(C)$ τότε $Ax \in Im(C)$ σημαίνει: υπόχωρος $R_r \equiv Im(C) \equiv$

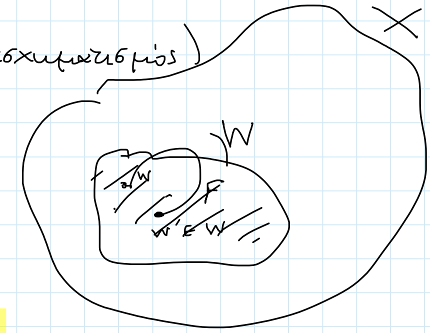
$\equiv$ A-αμετάβλητος υπόχωρος

Αμετάβλητος Υπόχωρος:

Έστω απεικόνιση $F : X \longrightarrow Y$ (γραμμ. μετασχηματισμός)

Έστω $W \subset X \equiv$ F-αμετάβλητος όταν

$$FW \subset W$$
$$(\forall w \in W \Rightarrow Fw \in W)$$



i) $W \equiv$ F-αμετάβλητο $\Rightarrow \{0\} \equiv$ F-αμετάβλητο

ii) -//- $\Rightarrow Im F \equiv$ -//-

$\Rightarrow Ker F \equiv$ -//-

στην δική μας περίπτωση: $\begin{cases} F \approx A \\ W \approx \mathbb{R}^n \end{cases}$

Απόδειξη:

Αν $x \in Im(C) \Rightarrow \exists$ διάνυσμα α : $[B, AB, \dots A^{n-1}B]\alpha = x$

$\Rightarrow Ax = [AB, A^2B, \dots A^nB]\alpha$

(Θ. Cayley-Hamilton): A^n μπορεί να εκφραστεί σαν γραμμ. συνδυασμός των $A^{n-1}, \dots A, \mathbb{I}$

που σημαίνει $Ax = C\beta$, για κατάλληλο β

Άρα, $\boxed{Ax \in Im(C)}$ ■

Θεώρημα

i) $x \equiv$ προσιτή $\Longleftrightarrow x \equiv$ ελέγξιμη

ii) $R_r = R_c$

iii) $(A,B) \equiv$ προσιτό $\Longleftrightarrow (A,B)$ ελέγξιμο

Γ.Χ.Α.

Θεώρημα: το (A,B) ≡ προσιτό (ελεγξ.-από-την αρχή) αν και μόνο αν: i) τάξη $W_r(\emptyset,T)=n$

ii) η γραμμές του $e^{At}B$ = γραμμ. ανεξάρτητες

iii) τάξη$(C) = n$

iv) τάξη $[s_i \mathbb{1} - A,\ B] = n$, s_i = ιδιοτιμές A, $i=1,\dots,n$

v) όλες οι ιδιοτιμές είναι ελέγξιμες

Παράδειγμα

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

i) (A,B) ≡ ελέγξιμο διότι: ο $W_r(\emptyset,T) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}T^3 & \frac{1}{2}T^2 \\ \frac{1}{2}T^2 & T \end{pmatrix} \Rightarrow$ τάξη $W_r(\emptyset,T) = 2 = n$

ii) ο $e^{At}B = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$ 2 γραμμές ≡ γραμμ. ανεξάρτητες

διότι: $(\alpha_1 t + \alpha_2 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0)$

iii) τάξη C = τάξη $[B \ \ AB]$ = τάξη $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 2 = n$

iv) τάξη $[s_i \mathbb{1} - A,\ B]$ = τάξη $\begin{bmatrix} s_i & -1 & 0 \\ 0 & s_i & 1 \end{bmatrix} = 2 = n$, $s_i = \emptyset$, $i=1,2$ → ιδιοτιμές A

(παρόμοια, οι γραμμές του $(s\mathbb{1}-A)^{-1}B = \begin{pmatrix} 1/s^2 \\ 1/s \end{pmatrix}$ είναι γραμμ. ανεξάρτητες)

Σχέση με την ιδιο-δομή του (Σ)

Ορισμός: μια ιδιοτιμή ≡ ελέγξιμη αν το αντίστοιχο αριστερό ιδιοδιάνυσμα v_i ικανοποιεί την σχέση: $\boxed{v_i^T B \neq 0}$ $\quad (v_i^T A = \lambda_i v_i^T)$

Θεώρημα: (Σ) ≡ ελέγξιμο $\Longleftrightarrow$ όλες οι ιδιοτιμές είναι ελέγξιμες

Υπενθύμιση: (Γραμμ. Αλγεβρα) λ = ιδιοτιμή, αν $\exists\ v \neq 0$: $Av = \lambda v$ (v = ιδιοδιάνυσμα)

ισχύει. $(A - \lambda \mathbb{1})v = 0 \Rightarrow (A - \lambda \mathbb{1})$ ≡ ιδιάζων

$\left((A-\lambda \mathbb{1})^{-1}(A-\lambda\mathbb{1})v = (A-\lambda\mathbb{1})^{-1}0 \Rightarrow v = 0\right)$

$\det(A-\lambda\mathbb{1}) = p(\lambda)$ = χαρακτ. πολ. A
(φυσική ερμηνεία)

Υπολογισμός ιδιοδιανυσμάτων πού αντιστοιχούν σέ ιδιοτιμές (Γραμμ. Αλγεβρα)

Π.χ. $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $p(\lambda) = \det(\quad) = (\lambda-3)(\lambda+2) \to \begin{cases}\lambda_1 = 3\\ \lambda_2=-2\end{cases}$

Να βρούμε ιδιοδιανύσματα $|_{\lambda_i}$:

$$(A-\lambda \mathbb{1})v = 0$$

Ιδιοδιάνυσμα της ιδιοτιμής $\lambda_1 = 3$: έστω $v = \begin{pmatrix} v_1\\v_2\end{pmatrix}$

$$(A-3\mathbb{1})v=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2-3 & -4 \\ -1 & -1-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -v_1 - 4v_2 = 0 \\ -v_1-4v_2=0\end{cases}$$ άν $v_2=t \Rightarrow v_1=-4t$

Κάθε ιδιοδιάνυσμα $|_{\lambda_1=3}$, της μορφής: $\begin{bmatrix}-4\\1\end{bmatrix}$ ≡ βάση ~ παράγει τον χώρο $\left\{\begin{bmatrix}-4\\1\end{bmatrix}\right\}$
(ιδιοχώρο της ιδιοτιμής λ_1)

Ιδιοδιάνυσμα της $\lambda_2=-2$:

Βρίσκουμε: $4v_1 - 4v_2 = 0$ άν $v_2=t$, $v_1 = t$ $\Rightarrow$
$-v_1+v_2=0$

άρα κάθε ιδιοδιάνυσμα $|_{\lambda_2=-2} \approx \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$

άρα $\left\{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right\}$ είναι βάση του ιδιοχώρου πού αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_2=-2$.

Άσκηση: Υπολογίστε τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές του πίνακα:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 16 \\ 4 & 1 & 8 \\ -4 & -4 & -11 \end{bmatrix}$$

Τι συμβαίνει όταν τάξη $\mathcal{C} < n$

- τάξη $\mathcal{C} = \emptyset \Rightarrow B=\emptyset \Rightarrow x(t,x_0) = e^{At}x_0 + \emptyset$

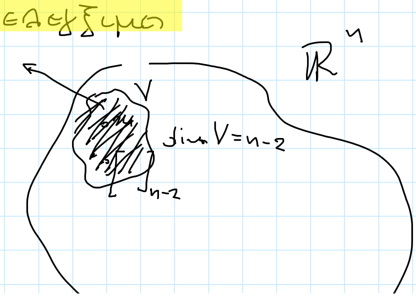
  $\Rightarrow u(\cdot)$ δεν επηρεάζει την συμπεριφορά όλων των ιδιοτιμών

- $0 <$ τάξη $\mathcal{C} < n$ ~ "μερικώς ελέγξιμο"

∃ ιδιοτιμές ελέγξιμες ⊕ ιδιοτιμές μη-ελέγξιμες

$\lambda_i \rightsquigarrow e^{\lambda_i t}x_0 + \int$ $\cancel{u(t)}$

$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \lambda_i \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix}x_1\\ \vdots \\ x_{n-1}\end{bmatrix}$



$\rightarrow \left[x_1 \right] \rightsquigarrow \left[\vdots \; x_{n-1} \right]$

$\circ\, x_0$

"διάστασ ελεγξιμότητας" = διάσταση υπόχωρου ελεγξιμότητας

(η - αρ. σύστημα μη-ελεγξιμο) $\exists\, u(t)$:

□ Για το $V \subset \mathbb{R}^n$: $\nexists\, u(t)$: $x_0 \rightsquigarrow x_1 \in V$

□ Διάκριτου Χρόνου Συστήματα . . .

Παρατηρησιμότητα - (Ανακατασκευασιμότητα) - Χρονικά Μεταβαλλόμενα

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t) \end{cases}$$

* να προσδιορίσεις ή αρχ. κατάσταση από μετρήσεις εισόδου + εξόδου

$$y(t) = C(t)\underline{\Phi(t,t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^{t} C(t)\Phi(t,\tau)B(\tau)u(\tau)\,d\tau + D(t)u(t)$$

$$\tilde{y}(t) \overset{\text{op}}{=} y(t) - \left[\int_{t_0}^{t} C(t) \cdots \; d\tau + D(t)u(t) \right]$$

<u>ορισμός</u>: x = μη-παρατηρήσιμη $\Big|_{t_0}$ αν ή απόκριση μηδ. διέγερσης $\tilde{y}(t) = \emptyset$

δηλ. αν $\boxed{C(t)\Phi(t,t_0)x = 0}$

<u>ορισμός</u>: Μη-παρατηρήσιμος υπόχωρος $\subset \mathbb{R}^n$

$$R_0^{(t_1)} \overset{\text{op}}{=} \left\{ x : C(t)\Phi(t,t_0)x = 0 \right\}$$

($\mathrm{Ker}(\;)$ ≡ Αμετάβλητο)

(Σ) = παρατηρήσιμο $\Big|_{t_0}$ (ή (A,C) παρατηρήσιμο)

όταν ή μοναδική κατάσταση $x \in \mathbb{R}^n$ ≈ μη-παρατηρήσιμη είναι

ή $x(t) = 0$

$$\Rightarrow \boxed{R_0^{(t_1)} = \{\emptyset\}}$$

□ Αν ορίσουμε παρόμοια : $\tilde{L}(x, t_0, t_1) \Rightarrow x \longmapsto C(t)\Phi(t,t_0)x \approx \tilde{y}_0$, τότε $\mathrm{Ker}\tilde{L} = \cdots$

Γ.Χ.Α. : $\tilde{L}(\;) : x \longmapsto Ce^{At}x \Rightarrow \mathrm{Ker}\tilde{L} = \{x : Ce^{At}x = \emptyset\} = \{0\}$ (πλ. παρατηρήσιμο)

$\Leftrightarrow$ τάξη $O = n$

• <u>Gramian παρατηρησιμότητας</u> :

$$W_0(t_0,t_1) \overset{\text{op}}{=} \int_{t_0}^{t_1} \Phi^T(t,t_0)C^T(\tau)C(\tau)\Phi(\tau,t_0)\,d\tau$$

$$\left(W_0 = W_0^T ,\ \geq 0 \quad , \ \forall\, t_1 > t_0 \right)$$

$$\boxed{\text{Θεώρημα: } x \approx \text{μη-παρατηρήσιμη} \iff x \in \operatorname{Ker}\left(W_0(t_0,t_1)\right)}$$

Παράδειγμα:

$$A(t) = \begin{pmatrix} -1 & e^{t+2t} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad C(t) = \begin{pmatrix} 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$\Phi(t,\tau) = \begin{pmatrix} & \cdot & \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow C(\tau)\Phi(\tau,t_0) = \begin{bmatrix} 0 & e^{-2\tau+t_0} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow W_0(t_0,t_1) = \int_{t_0}^{t_1} e^{2t_0} \begin{bmatrix} 0 \\ e^{-2\tau} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & e^{-2\tau} \end{bmatrix} d\tau = \cdots = -\frac{1}{4} e^{2t_0} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^{-4t_1} - e^{-4t_0} \end{bmatrix}$$

$$\text{τάξη } W_0(t_0,t_1) = 1 < 2 \Rightarrow (A,C) \equiv \text{μη-παρατηρήσιμο (πλήρως)}$$

Θεώρημα

$(\Sigma) = \text{παρατηρήσιμο}\big|_{t_0} \iff \exists\, t^* > t_0$.

η στήλες $C(\cdot)\Phi(\cdot,t_0) \equiv$ γραμμ.-ανεξάρτητες

$$\text{Θεώρημα: } (A,C) \equiv \text{(πλήρως) παρατηρήσιμο}\big|_{t_0} \iff \boxed{\text{τάξη } W_0(t_0,t_1) = n}$$

Συστήματα Χρονικά Αμετάβλητα

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Du$$

$$y(t) = Ce^{At}x(0) + \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + D\,u(t)$$

$$\Phi(t,\tau) = \Phi(t-\tau,\emptyset) = e^{A(t-\tau)}$$

$$t_0 = \emptyset$$

Μη-παρατηρήσιμη κατάσταση x : $\forall\, t \geq 0$, $Ce^{At}x = \emptyset$

Μη - παρατηρήσιμος υπόχωρος R_o ≈ $R_o \triangleq \{x : Ce^{At}x = 0\}$

- $\boxed{(\Sigma) = \text{παρατηρήσιμο} \iff R_o = \{\emptyset\}}$

Γραμμιανή παρατηρησιμότητας.

$$W_o(\emptyset, T) \triangleq \int_0^T (e^{A\tau})^T C^T C e^{A\tau} d\tau$$

Θεώρημα:

(A, C) παρατηρήσιμο $\iff$ η στήλες του Ce^{At} = γραμμ. ανεξάρτητες

Πρόταση: $\operatorname{Ker}(W_o(\emptyset, T)) = \operatorname{Ker}(\mathcal{O})$, $\forall T > 0$

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

Θεώρημα: x = μη - παρατηρήσιμη $\iff$ $\boxed{x \in \operatorname{Ker}(\mathcal{O})}$

Πρόταση: (A, C) = παρατηρήσιμο $\iff$ $\boxed{\text{τάξη}(\mathcal{O}) = n}$

Παράδειγμα:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = (1 \quad 0)$$

$$e^{At} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Ce^{At} = (1 \quad t)$$

- $W_o(\emptyset, T) = \int_0^T \begin{bmatrix} 1 \\ t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & t \end{bmatrix} d\tau = \begin{bmatrix} T & \frac{1}{2}T^2 \\ \frac{1}{2}T^2 & \frac{1}{3}T^3 \end{bmatrix}$

$\det(W_o(\emptyset, T)) = \frac{1}{12}T^4 \neq 0 \Rightarrow$ τάξη $W_o(\emptyset, T) = n \Rightarrow$ (A, C) παρατηρήσιμο

- $\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$ τάξη $\mathcal{O} = n \Rightarrow$ (A, C) παρατηρήσιμο

$$\left(\operatorname{Ker}\mathcal{O} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \operatorname{Ker}(W_o(\emptyset, T)) \right)$$

Σχέση με ιδιοτιμή A

<u>ορισμός</u>: λ_i ιδιοτιμή A = παρατηρήσιμη, αν το αντίστοιχο δεξιό ιδιοδιάνυσμα v_i: $\boxed{C v_i \neq 0}$

Θεώρημα: (A, C) = παρατηρήσιμο $\Longleftrightarrow$ όλες οι ιδιοτιμές A = παρατηρήσιμες

Δυαδικότητα Ελεγξιμότητας – Παρατηρησιμότητας

Έστω Γραμμ. (Συνεχούς Χρόνου)

$$(\Sigma): \begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)\,x(t) + B(t)\,u(t) \\ y(t) = C(t)\,x(t) + D(t)\,u(t) \end{cases}$$

<u>ορισμός</u>:

Το σύστημα:
$$(\Sigma'): \begin{cases} \dot{x}_d(t) = A^T(t)\,x_d(t) + C^T(t)\,u_d(t) \\ y_d(t) = B^T x_d(t) + D(t)\,u_d(t) \end{cases}$$

ονομάζεται <u>δυαδικό</u> του (Σ)

Θεώρημα: αν (Σ) = ελέγξιμο (ή παρατηρήσιμο) $\Longleftrightarrow$ (Σ') = παρατηρήσιμο (ελέγξιμο)

δυαδικότητα ~ χώρο κατάστασης $\mathbb{R}^n$

$$\left(\begin{array}{ccc} R_r & \text{δυαδικός} & R_o \\ Im(\mathcal{C}) & & Ker(\mathcal{O}) \end{array} \right)$$

<u>Παράδειγμα</u>:

Έστω
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Να υπολογισθούν οι ελέγξιμες και παρατηρήσιμες ιδιοτιμές

- ιδιοτιμές A: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = -2$

Τότε, δεξιά ιδιοδιανύσματα (παρατηρησιμότητας):
$$v_1 = (1 \ \ 1 \ \ 1)^T$$
$$v_2 = (1 \ \ 0 \ \ -1)^T$$
$$v_3 = (1 \ \ 1 \ \ -1)^T$$

αριστερά ιδιοδιανύσματα (ελεγξιμότητας):
$$\hat{v}_1 = (1/2 \ \ 0 \ \ 1/2)^T$$
$$\hat{v}_2 = (1 \ \ -1 \ \ 0)^T$$
$$\hat{v}_3 = (-1/2 \ \ 1 \ \ -1/2)^T$$

$\hat{v}_2 = (1 \quad -1 \quad 0)^T$

$\hat{v}_3 = (-\frac{1}{2} \quad 1 \quad -\frac{1}{2})^T$

Αρα, επειδή : □ $\hat{v}_1 B = [1 \quad 1] \neq \phi \Rightarrow \lambda_1 = 0 \equiv$ ελέγξιμη

παρόμοια $C v_1 = 1 \neq \phi \Rightarrow \lambda_1 = 0 \equiv$ παρατηρήσιμη

□ $\hat{v}_2 B = [0 \quad -1] \neq \phi \Rightarrow \lambda_2 = -1 \equiv$ ελέγξιμη

$C v_2 = \phi \Rightarrow \lambda_2 = -1 \equiv$ μή-παρατηρήσιμη

□ $\hat{v}_3 B = [0 \ , \ 0] = 0 \Rightarrow \lambda_3 = -2 \equiv$ μή-ελέγξιμη

$C v_3 = 1 \neq \phi \Rightarrow \lambda_3 = -2 \equiv$ παρατηρήσιμη

□