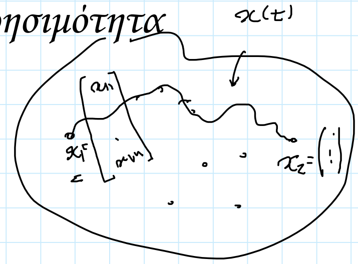
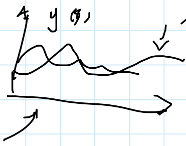
# Ελεγξιμότητα-Παρατηρησιμότητα

## Εισαγωγη




"σήματα"

διανύσματα

$x(t) = \Phi(\ )x(0) + \int --- u(\tau)d\tau$

τροχιές (λύσεις)

"δορυφόρος" $x_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix}$ $\longrightarrow$ $x_2 = \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}$

(θέση, ταχύτητα, προσανατολισμός)

$y(t) = Cx(t) = --$

{ Ελεγξιμότητα

{ Παρατηρησιμότητα ⇝ $\hat{x}(t) = \dots$

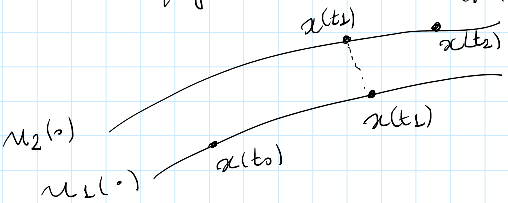
→ Ελεγκτές μέ ανάδραση { κατάστασης / -"- εξόδου }

□ Πώς γίνεται ή μεταφορά από κατάσταση σε κατάσταση;

Κίνηση στόν χ.κ. : $x(\cdot)/_{t_0=0}$ : $x(t_1) = \Phi(t_0,t_1)x(t_0) + \int_{t_0}^{t_1}\Phi(t_0,\tau)u_1(\tau)B(\tau)d\tau$

$t_1$ = πεπερασμένο

⇝ παράγει τήν λύση – ολοκληρωτική γραμμή




$x(t_2) = \Phi(t_1,t_2)x(t_1) + \int_{t_1}^{t_2}\Phi(t_1,\tau)B(\tau)u_2(\tau)d\tau$

## Εισαγωγή

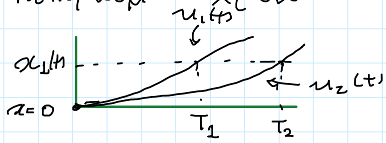
2 έννοιες: { προσιτότητα (reachability) [accessibility] = ελεγξιμότητα-από-τήν-αρχή

ελεγξιμότητα (controllability) = ελεγξιμότητα-στήν-αρχή

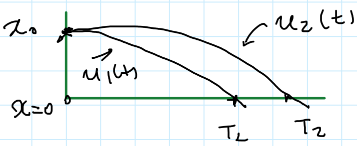
ορισμός: $x_1$ = προσιτό-από-τήν-αρχή άν ∃ $u(t)$ : μεταφέρει $x(t)$ από τό μηδέν

$x=0 \longrightarrow x_1$, σε πεπερασμένο χρόνο $T$

- δεν προσδιορίζει τον χρόνο $T$
- -"- τήν τροχιά που ακολουθείται }




ορισμός $x_1$ = ελέγξιμη-στήν-αρχή, άν ∃ $u(t)$ : μεταφέρει τό $x(t)$ από τό σημείο $x_0$ στο $x=0$, σέ πεπερασμένο χρόνο $T$




{ προσιτότης : $x=0 \longrightarrow x_1$

ελεγξιμότης : $x_1 \longrightarrow x=0$

Σημείωση: θά αποδείξουμε ότι η προσιτότητα συνεπάγεται πάντα τήν ελεγξιμότητα, αλλά ή ελεγξιμότητα συνεπάγεται τήν προσιτότητα μόνο όταν ή μήτρα μετάβασης $\Phi(\cdot;\cdot)$ είναι μή-ιδιάζουσα!

## □ ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΙΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΕΛΕΓΞΙΜΟΤΗΤΑΣ – ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΜΟΤΗΤΑΣ

με χρήση του Π.Κ.Ε. σε διάκριτο χρόνο (ευκολότερα μαθηματικά)

**Συστήματα Διάκριτου Χρόνου (Χ.Α.)**

$(\Sigma)$ : $x(k+1) = A x(k) + B u(k)$

(λύση) $x(k) = A^k x(0) + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-(i+1)} B u(i)$, $k \geq 0$

? $x(0) = x_0 \rightsquigarrow x_1$ σε $n$ βήματα, $x_1 \equiv x(n)$

αν $\exists \{u(0), u(1) \ldots u(n-1)\}$ : $\boxed{x_1 - A^n x_0 = \mathcal{C}_n U_n}$

διότι :

$k=0$ : $x(1) = \mathbb{I}\, x(0) + B u(0)$

$k=1$ : $x(2) = A x(1) + B u(1) = A x(0) + AB u(0) + B u(1)$

$k=2$ : $x(3) = A x(2) + B u(2) = A^2 x(0) + A^2 B u(0) + AB u(1) + B u(2)$

$\vdots$

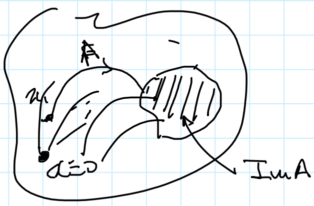
$x(n) = \ldots = A^n x(0) + \ldots$

μήτρα ελεγξιμότητας : $\mathcal{C}_n \triangleq [B \; AB \; \ldots \; A^{n-1}B]$

(Γεωμετρικά) : $U_n = [u^T(n-1), u^T(n-2) \ldots u^T(0)]^T$

Άρα, $\exists$ λύση αν και μόνο αν : $\boxed{x_1 - A^n x_0 \in \operatorname{Im} \mathcal{C}}$ $\equiv R(\mathcal{C})$ (range)
($\exists U_n$)

$\left( F : X \to Y \quad Y \supset \operatorname{Im} F \triangleq \{ y \in Y : Fx = y, \; \forall x \in X \} \right)$




$F \equiv A \rightsquigarrow$ μήτρα μετάβασης
$X = Y = \mathbb{R}^n$

$\forall x \in \mathbb{R}^n$ : ισχύει $x_1 \equiv$ προσιτό (ελέγξιμο από την αρχή) $(\Rightarrow \exists U_n : x=0 \rightsquigarrow x_1)$

$\boxed{\operatorname{Im} \mathcal{C} = \mathbb{R}^n}$ $= R(C) = \mathbb{R}^n$

∘ $x_1$ = προσιτό από το $x=0$ : όλα τα $x_1 \in \operatorname{Im} C = R(C)$ = υπόχωρος προσιτότητας

άρα $\operatorname{Im} \mathcal{C} \ni$ όλες τις καταστάσεις $x_1$ που είναι προσιτές από το $x=\emptyset$.

□ Άρα το $(\Sigma)$ είναι προσιτό (ελεγξ.-από-την αρχή), $\forall x \in \mathbb{R}^n$ όταν $\operatorname{Im} \mathcal{C} = \mathbb{R}^n$

αλλά $\operatorname{Im} \mathcal{C} = \mathbb{R}^n \Leftrightarrow$ τάξη $\mathcal{C} = n$

Άσκηση : Αποδείξτε ότι για $F : X \to Y$, ισχύει $\operatorname{Im} F = \mathbb{R}^n \Leftrightarrow$ τάξη $F = n$

Π.χ. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

μήτρα ελεγξιμότητας: $\mathcal{C} = [B \quad AB] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\underline{\text{τάξη } \mathcal{C} = 2 \iff \mathrm{Im}\,\mathcal{C} \equiv \mathbb{R}^n}$

άρα $(A,B)$ προσιτό: $\underline{\forall x_1 \in \mathbb{R}^n}$ : $x=0 \rightsquigarrow x_1$, σε $n$ βήματα το πολύ

– $x_1 = \begin{pmatrix} \alpha \\ b \end{pmatrix}$, $x=0=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow x_1 = \begin{pmatrix} \alpha \\ b \end{pmatrix}$, πρέπει $\exists\, U_n : x_1 - \cancel{A^n x_0}^{\,0} = \mathcal{C}_n U_n$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(1) \\ u(0) \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} u(1) \\ u(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ b \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} b-\alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$$

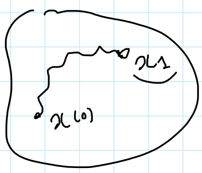
άρα, $\left.\begin{array}{l} u(0) = \alpha \\ u(1) = b-\alpha \end{array}\right\}$ $\quad x=0 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \alpha \\ b \end{pmatrix}\Big|_{\underline{k=2}}$

Επαλήθευση:

$$x(1) = A\,\cancel{x(0)}^{\,0} + B u(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \end{pmatrix}$$

$$x(2) = A\,x(1) + B\,u(1) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} (b-\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha \\ b \end{pmatrix}$$

□ $x_1$ = προσιτό από $\underline{x=0}$ σε το πολύ 2 βήματα, ισχύει $\forall x_0$




π.χ. $x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$x_1 - A^2 x(0) = \mathcal{C}_n U_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(1) \\ u(0) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(1) \\ u(0) \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} u(1) \\ u(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b-\alpha-1 \\ \alpha-2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$ μεταφέρει το $x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\Big|_{k=0} \rightsquigarrow x_1 = \begin{pmatrix} \alpha \\ b \end{pmatrix}\Big|_{k=2}$ σε $\underline{2 \text{ βήματα}}$

□ γενικά $U_n = \{ \cdots \}$ = μη-μοναδική

Παρόμοια, το σύστημα $(A,B) \equiv$ ελέγξιμο-στην-αρχή: $\forall x_0 \xrightarrow[\text{σε } n \text{ βήματα}]{\exists\, U_n} x=0$

$$\left( x_1 - A^n x_0 = \mathcal{C}_n U_n \right) \rightsquigarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 \equiv 0 \\ x_0 \equiv x(0) \end{array} \right.$$

$$\downarrow \quad 0 - A^n x_0 = \mathcal{C}_n U_n \Rightarrow -A^n x_0 = \mathcal{C}_n U_n \rightsquigarrow \left( U_n \; A^{-n} \mathcal{C} \right) \leftarrow$$

$$\boxed{A^n x_0 \in \mathrm{Im}\,\mathcal{C} \equiv R(\mathcal{C}), \quad \forall x_0}$$

" Αν $\underline{\text{τάξη} A = n}$ $\Rightarrow$ υπάρχει $U_n$. $(A,B) \equiv$ ελέγξιμο-στην-αρχή, όταν $\boxed{\text{τάξη } \mathcal{C} = n}$ (όταν ικανοποιείται η συνθήκη προσιτότητας)

$\downarrow$

τότε $A^{-n}\mathcal{C} = [A^{-n}B, \ldots \; A^{-1}B]$

Άρα, $\boxed{(\Sigma) = \text{ελέγξιμο (στην-αρχή)} \iff \text{τάξη}\,(A^{-n}\mathcal{C}) = \text{τάξη}\,\mathcal{C} = n}$

o όταν τάξη $A < n \Rightarrow$ η ελεγξιμότητα $\not\Rightarrow$ προσιτότητα

Πχ. "προηγούμενο σύστημα" ⇝ (ελέγξιμο-στην-αρχή) ?

Για $x_1 = \emptyset \Rightarrow -A^2 x_0 = -\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ b \end{pmatrix} = [B \;\; AB]\begin{pmatrix} u(1) \\ u(0) \end{pmatrix} =$

$x_0 = \begin{pmatrix} \alpha \\ b \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u(1) \\ u(0) \end{pmatrix}$

Άρα, $\begin{pmatrix} u(1) \\ u(0) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b \\ -\alpha - b \end{pmatrix}$

$\left.\begin{array}{l} u(1) = -b \\ u(0) = -\alpha - b \end{array}\right\}$ μεταφέρει την κατάσταση από το

$\begin{pmatrix} \alpha \\ b \end{pmatrix}\Big|_{k=0} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\Big|_{k=2}$


Ελεγξιμότητα: αν γίνεται $x_1 \longrightarrow x_2$

(δορυφόρος): $x_1 \longrightarrow x_2$

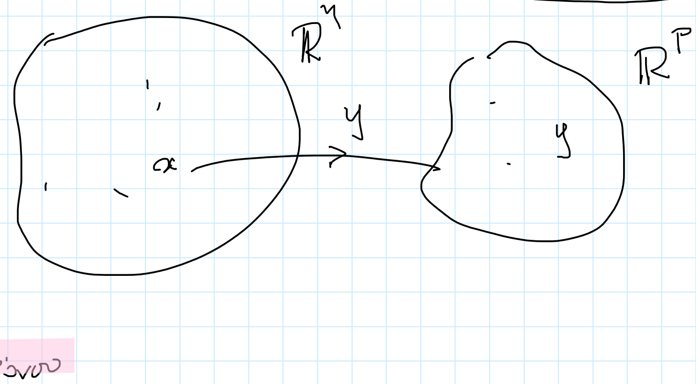
Ερώτημα: Πώς παραμένει το σύστημα στην κατάσταση που έφτασε;

Πώς υπολογίζω $U_n$.

Παρατηρησιμότητα → παρατηρησιμότητα
→ "ανακατασκευασιμότητα"

Παρατηρησιμότητα ≡ (Σ): προσδιορίζεται η (παρούσα) κατάσταση από τις εισόδου + εξόδου παρούσες + μελλοντικές τιμές

ανακατασκευασιμότητα ≡ (Σ): προσδιορίζεται -″- παρούσες + παρελθοντικές τιμές εισόδου + εξόδου




Συστ. Διακριτού Χρόνου

$x(k+1) = A\,x(k) + B\,u(k)$ , δεδομένα: $u(k)$, $y(k)$

$y(k) = C\,x(k) + D\,u(k)$

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$
$$y(k) = Cx(k) + Du(k)$$
, δεδομένα: $u(k)$, $y(k)$

Τότε, $y(k) = CA^k x(0) + \sum_{i=0}^{k-1} CA^{k-(i+1)} B u(i) + D u(k)$ , $k \geq 0$

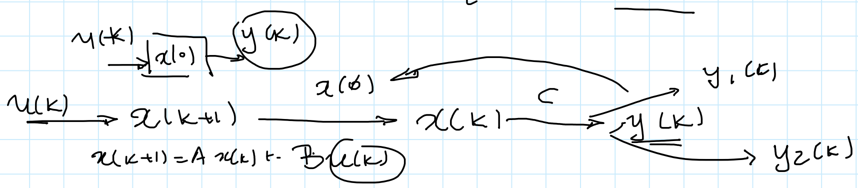
$\rightsquigarrow x(0) \longrightarrow$ $\boxed{\tilde{y}(k) \overset{\text{ορ}}{=} CA^k x(0) \ , \ k \geq 0}$ (απ μηδ. διεγ.)

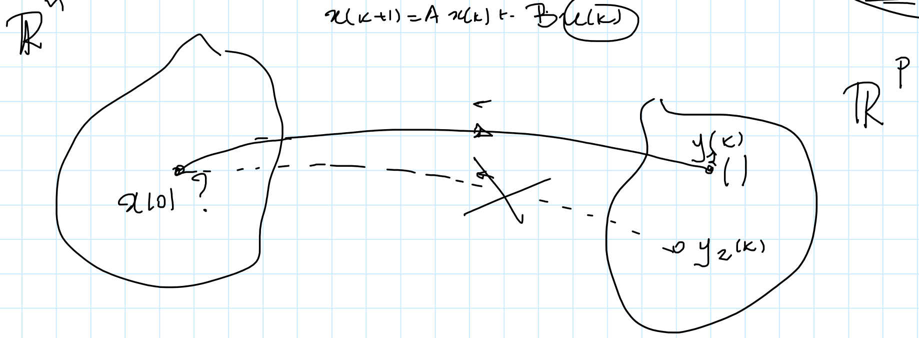
τότε ισχύει: $\tilde{y}(k) \overset{\text{ορ}}{=} y(k) - \left[ \sum_{i=0}^{k-1} CA^{k-(i+1)} B u(i) + D u(k) \right]$

για $k>0$ και $\begin{cases} \tilde{y}(0) \overset{\text{ορ}}{=} y(0) - D u(0) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$

- Θέλουμε να μπορούμε να προσδιορίσουμε το $x_0$ από τον $\tilde{y}(k) = CA^k x_0$, όταν γνωρίζουμε τις εισόδους + εξόδους

- $u(k) = 0$ , $k \geq 0$ $\Rightarrow$ $\tilde{y}(k) \equiv y(k)$
  $\hookrightarrow$ προκύπτει από το $x_0$




- Αν $x(0) = x_0$ υπολογίζεται $\Rightarrow$ $\forall\, x(k)$ , $k \geq 0$

- Υπολογισμός $x(0)$: $\tilde{y}(k) = CA^k x(0)$ , $k = 0, 1, \ldots, n-1$

$k=0$: $\tilde{y}(0) = C\mathbb{1}\, x(0)$

$k=1$: $\tilde{y}(1) = CA\, x(0)$

$$\begin{pmatrix} \tilde{y}(0) \\ \tilde{y}(1) \\ \vdots \\ \tilde{y}(n-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} x(0) \longrightarrow \mathcal{O}_n = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{pn \times n}$$

$\equiv$ πίνακας παρατηρησιμότητας (observability)

$\tilde{Y}_{0,n-1} \overset{\text{ορ}}{=} \left[ \tilde{y}^T(0) \ \ldots \ \tilde{y}^T(n-1) \right]^T$

$\boxed{\tilde{Y}_{0,n-1} = \mathcal{O}_n x_0}$ $\Rightarrow$ έχει πάντα λύση

Όμως, $(\Sigma)$ ≡ παρατηρήσιμο αν η λύση $x_0$ ≡ μοναδική

$\Rightarrow$ $x_0$ ≡ μοναδικό $\iff$ $\ker \mathcal{O} = \{0\}$ $\left( \begin{array}{c} F: X \to Y \\ X \supset \ker F \overset{\text{ορ}}{=} \{ x \in X : Fx = \emptyset \} \end{array} \right)$

$\Rightarrow$ $x_0$ = μοναδικό $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{Ker}\,\mathcal{O} = \{0\}$ $\left( X \supset \mathrm{Ker}F \triangleq \{x \in X : Fx = \emptyset\} \right)$ ($F: X \to Y$)

$\{\mathcal{O}x = \emptyset\}$ $\left( \begin{array}{l} \mathrm{Im}\,F \subset Y \\ \mathrm{Ker}\,F \subset X \end{array} \right)$

$\Rightarrow$ $\boxed{\mathrm{Ker}\,\mathcal{O} = \{0\} \Longleftrightarrow \text{τάξη}\,\mathcal{O} = n}$

<u>Άσκηση</u>: Αποδείξτε ότι για $F: X \to Y$ ισχύει $\mathrm{Ker}F = \{\emptyset\} \Longleftrightarrow$ τάξη $F = n$

Άρα, $\boxed{\text{το } (\Sigma) \text{ παρατηρήσιμο} \Longleftrightarrow \text{τάξη } \mathcal{O} = n}$

τάξη $\mathcal{O} < n$. ο $\mathrm{Ker}\,\mathcal{O} = \{ x : \mathcal{O}x = \emptyset \}$ = μη-παρατηρήσιμες καταστάσεις $\equiv N(\mathcal{O})$

"μη-παρατηρήσιμος υπόχωρος"

ο) ελεγξιμότητας-(προσιτότητας) $\to$ $R(\mathcal{C}) = \mathrm{Im}\,\mathcal{C}$

παρατηρησιμότητας $\to$ $N(\mathcal{O}) = \mathrm{Ker}\,\mathcal{O}$

τότε: $\{CA^k x = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1\}$

Π.χ.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{O} \triangleq \begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{τάξη}\,\mathcal{O} = 2 \Rightarrow (\Sigma) = (A, C) \equiv \text{παρατηρήσιμο}$$

δηλ. $x(0)$ προσδιορίζεται <u>μοναδικά</u> $n = 2$ μετρήσεις εξόδου

Πράγματι,

$$\begin{pmatrix} y(0) \\ y(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(0) \\ y(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(1) - y(0) \\ y(0) \end{pmatrix}$$

<u>Π.χ. 2</u>.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{\text{τάξη}\,\mathcal{O} = 1} \Rightarrow (A, C) \equiv \underline{\text{μη-παρατηρήσιμο}}$$

αλλά, $\mathrm{Ker}\,\mathcal{O} = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x = \emptyset \right\}$, $\boxed{\dim(\mathrm{Ker}\,\mathcal{O}) = 1}$

τότε <u>μία βάση $\mathrm{Ker}\,\mathcal{O}$</u> $= \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ (1-διάστασης υπόχωρος) $\equiv$ 1 ιδιοδιάνυσμα

Από την $\mathcal{O}x = \emptyset \Rightarrow$ όλα τα διανύσματα $\begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix}$, $c \in \mathbb{R}$ $\equiv$ μη-παρατηρήσιμα

η σχέση $\tilde{Y}_{0,n-1} = \mathcal{O}_n x_0$ γίνεται: $\begin{pmatrix} y(0) \\ y(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix}$

$$y(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x_2(0)$$

Για να υπάρχει λύση $x(0)$ πρέπει $y(0) \equiv y(1) = \alpha$

"παράγεται η ίδια έξοδος"

$$\forall\, x(0): \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ c \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{R}$$

σημαίνει: η έξοδος δεν μπορεί να διαχωρίσει τις αρχ. καταστάσεις

## Δυϊκά Συστήματα

∘ Ελεγξιμότητα - παρατηρησιμότητα ≡ δυϊκές έννοιες,

( $R(C)$, $N(O)$ ≡ δυϊκοί υπόχωροι (γραμμική άλγεβρα)

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned}\right\}(\Sigma) \quad , \quad A \in \mathbb{R}^{n\times n},\ B \in \mathbb{R}^{n\times m},\ C \in \mathbb{R}^{p\times n},\ D \in \mathbb{R}^{p\times m}$$

ορίζουμε το δυϊκό σύστημα $(\tilde{\Sigma})$: 
$$\begin{aligned} \dot{x}_D &= A_D x_D + B_D u_D \\ y_D &= C_D x_D + D_D u_D \end{aligned}$$

όπου: 
$$\boxed{\begin{aligned} A_D &= A^T, & B_D &= C^T \\ C_D &= B^T, & D_D &= D^T \end{aligned}}$$

**Πρόταση:** Αν $(\Sigma)$ ≡ ελέγξιμο $\Longleftrightarrow$ $(\tilde{\Sigma})$ ≡ παρατηρήσιμο