Επίλυση Καταστατικων εξισωσεων

-Χρονικα μεταβαλλομενα συστηματα (ιδιότητες των λύσεων)

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$

$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t)$$

$x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$y \in \mathbb{R}^p$

- Αποκριση μηδενικης εισοδου

$u(t) = 0$ (ομογενής Δ.Ε.)

(ορίζουμε): $x(t, t_0, x_0)$ ⇝ 1 + μοναδική λύση

⇝ λύση της $\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ (1)

⇒ απόκριση: $y(t) = C(t)x(t, t_0, x_0)$

Θεώρημα 1: (4.1)
Το σύνολο των λύσεων της εξ. αποτελεί ένα διανυσματικό χώρο n-διαστάσεων

Θεώρημα 2: (4.2)
Οι λύσεις $x_i(t)$, $i = 1, 2, \dots n$ της εξ. (1) με

αρχ. συνθήκες τα σημεία: $x_1(t_0) = [1 \; 0 \dots 0]^T$

$x_2(t_0) = [0 \; 1 \dots 0]^T$

$\vdots$

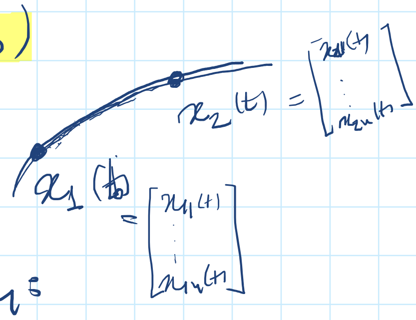
$x_n(t_0) = [0, \dots 1]^T$

αποτελούν Βάση του διανυσματικού χώρου των λύσεων της Δ. Εξίσωσης

Ορισμός (4.1):

Ορισμός (4.1):

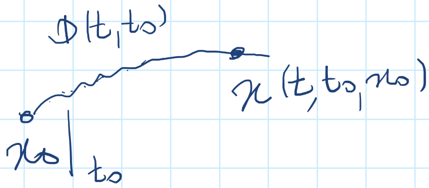
- Η μήτρα $\Phi(t,\tau)$ με στήλες τις λύσεις $x_i(t,\tau,x_i(t_0))$ με αρχ. συνθήκες τα $x_i(\tau)$ ονομάζεται **Μήτρα Μετάβασης (Διέλευσης)**



Θεώρημα 3 : (4.3)

Οι λύσεις της εξ. (1), δίνονται από την σχέση:

$$x(t,t_0,x_0) = \Phi(t,t_0)\,x_0$$



Παράδειγμα : (4.1) // $A(t)$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -1 & e^{2t} \\ 0 & -2 \end{pmatrix} x(t) \quad , \quad x_0 = \begin{bmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{bmatrix}$$

$$y(t) = x(t)$$

Γράφεται: $\dot{x}_1(t) = -x_1(t) + e^{2t} x_2(t)$ (α)

$$\dot{x}_2(t) = -2x_2(t) \quad (\beta)$$

$(\beta) \Rightarrow \boxed{x_2(t,t_0,x_{01},x_{02}) = e^{-2(t-t_0)} x_{02}}$

$\overset{(\alpha)}{\Rightarrow}$ $\dot{x}_1(t) = -x_1(t) + e^{2t_0} x_{02}$

(λύση) $\Rightarrow$ $\boxed{x_1(t,t_0,x_{01},x_{02}) = e^{-(t-t_0)} x_{01} + \left(1-e^{-(t-t_0)}\right) e^{2t_0} x_{02}}$

Τότε, η μήτρα μετάβασης:

$$\Phi(t,t_0) = \left[\begin{array}{c|c} x_1(t,t_0,1,0) & x_1(t,t_0,0,1) \\ x_2(t,t_0,1,0) & x_2(t,t_0,0,1) \end{array}\right]$$

άρα $\Phi(t, t_0) = \begin{bmatrix} e^{-(t-t_0)} & 1-e^{-(t-t_0)}e^{2t_0} \\ 0 & e^{-2(t-t_0)} \end{bmatrix}$

<u>Ορισμός</u> : Μία μήτρα

$$\psi(t) = [\psi_1(t), \psi_2(t), \dots \psi_n(t)]$$

με στήλες $\psi_i(t)$, $i = 1, 2, \dots n$, όπου $\psi_i(t)$ είναι

n - γραμμ. ανεξάρτητες λύσεις της εξ. (1)

ονομάζεται θεμελιώδης μήτρα της εξ. (1)

<u>Παράδειγμα</u> :

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -1 & e^{2t} \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Υπολογίζω τις λύσεις, θέτω στην

$$\begin{cases} x_1(t, t_0, x_{01}, x_{02}) = e^{-(t-t_0)} x_{01} + \\ \qquad + (1-e^{-(t-t_0)}e^{2t_0}) x_{02} \\ x_2(t, t_0, x_{01}, x_{02}) = e^{-2(t-t_0)} x_{02} \end{cases}$$

τις τιμές : $\boxed{t_0 = 0, \quad x_{01} = 1, \quad x_{02} = 1}$

τότε $\psi_1(t) = [1 \quad e^{-2t}]^T$

στη συνέχεια, τις τιμές: $\boxed{t_0 = 1, \quad x_{01} = 0, \quad x_{02} = -1}$

τότε $\psi_2(t) = [-(1-e^{-(t-1)}e^2 \quad -e^{-2(t-1)}]^T$

Τέλος,

$$\psi(t) = \begin{bmatrix} 1 & -(1-e^{-(t-1)}e^2 \\ e^{-2t} & -e^{-2(t-1)} \end{bmatrix} \equiv \text{θεμελ. μήτρα}$$

$\left[\, e^{\cdots} \qquad -e \qquad \right]$

☐ Παρατήρηση: η εξ. (1) έχει άπειρες θεμελιώδεις μήτρες, αλλά μία μοναδική μήτρα μετάβασης

Θεώρημα (4.4):

"Αν $\Psi(t)$ = θεμελιώδης μήτρα της (1) τότε

$$\det \Psi(t) \neq 0, \quad \forall\, t_0 \in (-\infty, +\infty)$$

$\Rightarrow$ $\exists$ πάντα $\Psi(t)^{-1}$

και τότε

Θεώρημα (4.5):

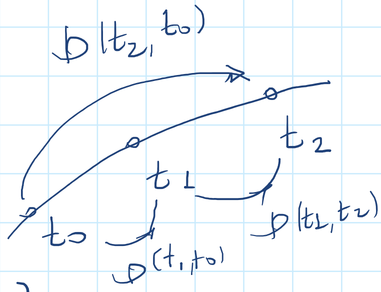
"Αν $\Psi(t)$ μία θεμελιώδης μήτρα και $\Phi(t, t_0)$ η μήτρα μετάβασης της εξ. (1), ισχύει:

$$\Phi(t, t_0) = \Psi(t)\,\Psi^{-1}(t_0), \quad \forall\, t_0 \in (-\infty, +\infty)$$

(τρόπος υπολογισμού της μήτρας μετάβασης χρον. μεταβ. συστημάτων)

Ιδιότητες της $\Phi(t, t_0)$

1. $\Phi(t_0, t_0) = \mathbb{1}$
2. $\Phi^{-1}(t, t_0) = \Phi(t_0, t)$
3. $\Phi(t_2, t_0) = \Phi(t_2, t_1)\,\Phi(t_1, t_0)$



$\forall\, t_1, t_2 \in (-\infty, +\infty)$: $x(t_1, t_0, x_0) = \Phi(t_1, t_0)\, x_0$

$\mathcal{D}\quad x(t_2,t_0,x_0) = \Phi(t_2,t_0)x_0 = \Phi(t_2,t_1)\Phi(t_1,t_0)x_0$

άρα $\quad x(t_2,t_0,x_0) = \Phi(t_2,t_1)\,x(t_1,t_0,x_0)$

□ Αποκριση μηδενικης καταστασης (Χρον. Μεταβλ. Συστ.)

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$

$$\wedge \quad x(t_0) = 0$$

Θεώρημα 4:

Αν $x(t_0)=0$ τότε η λύση της Δ.Ε. είναι:

$$x(t,t_0,0,u) = \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)B(\tau)u(\tau)\,d\tau$$

Τότε, η απόκριση (έξοδος) δίνεται από την:

$$y(t) = C(t)\int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)B(\tau)u(\tau)\,d\tau + D(t)u(t)$$

Παράδειγμα: (4.4)

$$\dot{x}(t) = \overset{A}{\begin{bmatrix} -1 & e^{2t} \\ 0 & -2 \end{bmatrix}} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} x(t) + 3u(t)$$

σε ηρεμία $t=t_0$ και

Έστω είσοδος $u(t) = 2\delta(t-t_0)$ (βηματική)

$$y(t) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \int^{t} \begin{bmatrix} e^{-(t-\tau)} & (1-e^{-(t-\tau)})e^{2\tau} \\ & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \end{bmatrix} \cdot$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \int_{t_0}^{t} \begin{bmatrix} e^{-(t-\tau)} & (1-e^{-(t-\tau)})e^{2\tau} \\ 0 & e^{-2(t-\tau)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot$$

$$\cdot 2\delta(\tau - t_0)\, d\tau + 6\delta(t-t_0)$$

$$= \left[2\begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \int_{t_0}^{t} \begin{bmatrix} (1-e^{-(t-\tau)})e^{2\tau} \\ e^{-2(t-\tau)} \end{bmatrix} d\tau + 6 \right] \delta(t-t_0)$$

$$= \left[2\begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{6}e^{2t} - \frac{1}{2}e^{2t} + \frac{1}{3}e^{-(t-3t_0)} \\ \frac{1}{2}(1 - e^{-2(t-t_0)}) \end{bmatrix} + 6 \right] \delta(t-t_0)$$

$$y(t) = \left[-\frac{1}{3}e^{2t} + e^{2t_0} - \frac{2}{3}e^{-(t-3t_0)} - e^{-2(t-t_0)} + 7 \right] \delta(t-t_0)$$

Πληρης Αποκριση (Χρον. Μεταβλ. Συστ.)

Θεώρημα :

Η λύση της Δ. Εξ., $x(t, t_0, x_0, u)$ δίνεται ως:

$$x(t, t_0, x_0, u) = \underbrace{\Phi(t, t_0)\, x(t_0)}_{(\text{Α.Μ.Ε.})} + \underbrace{\int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau) B(\tau) u(\tau)\, d\tau}_{(\text{Α.Μ.Κ.})}$$

Η (πλήρης) απόκριση, υπολογίζεται ως:

$$y(t) = C(t)\Phi(t,t_0)x(t_0) + C(t)\int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)B(\tau)u(\tau)\, d\tau +$$

$$+ D(t)\, u(t)$$