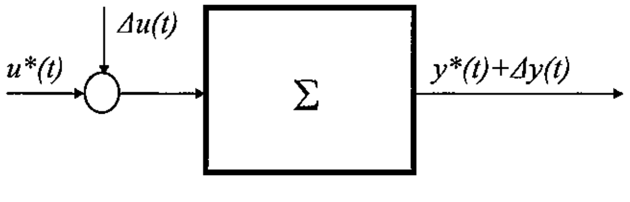
7
Ευστάθεια

Οπως έχει ήδη αναφερθεί, το πρόβλημα του ελέγχου ενός συστήματος συνίσταται στον προσδιορισμό ενός κατάλληλου νόμου ελέγχου ώστε η έξοδος ή η κατάσταση του συστήματος να έχει μία επιθυμητή συμπεριφορά. Συγκεκριμένα, στην περίπτωση ελέγχου της εξόδου, αν πρέπει η έξοδος του συστήματος να ακολουθεί μία τροχιά $y^*(t)$, τότε μία πρώτη προσέγγιση του προβλήματος ελέγχου είναι η κατάσκευή μιάς διάταξης η οποία θα έχει σαν έξοδό της μία κυματομορφή $u^*(t)$ τέτοια. ώστε αν εφαρμοσθεί σαν είσοδος στο προς έλεγχο σύστημα, η έξοδος του τελευταίου να ακολουθεί την τροχιά $y^*(t)$. Ομως το όλο πρόβλημα ελέγχου είναι περισσότερο πολύπλοκο γιατί στην πράξη το σύστημα υφίσταται εξωτερικές διαταραχές, έτσι ώστε αντί της θεωρητικά προσδιορισθείσης εισόδου $u^*(t)$ να επιβάλλεται στο σύστημα μία άλλη είσοδος $u^*(t)+ \Delta u(t)$. Σαν αποτέλεσμα αυτού του γεγονότος η έξοδος του συστήματος δεν θα είναι η επιθυμητή $y^*(t)$ αλλά μία άλλη της μορφής $y^*(t)+\Delta y(t)$ όπως φαίνεται στο σχήμα 7.1.



Σχήμα 7.1: Σύστημα υπό την επίδραση εξωτερικών διαταραχών

Είναι λοιπόν σημαντικό για την λειτουργία του συστήματος να ξέρουμε τι θα συμβεί ακριβώς αν μια επιμένουσα ή στιγμιαία διαταραχή απομακρύνει το σύστημα μας απο την προβλεπόμενη τροχιά *y*(t)*. Στην περίπτωση μίας επιμένουσας διαταραχής το ερώτημα είναι αν μία φραγμένη διαταραχή στην είσοδο του συστήματος θα έχει ή όχι σαν συνέπεια μία φραγμένη επίσης διαταραχή στην προβλεπόμενη έξοδό του. Στην περίπτωση στιγμιαίας διαταραχής που απομακρύνει το σύστημα από την προβλεπόμενη τροχιά του τα ερωτήματα είναι τα ακόλουθα: Θα επιστρέψει το σύστημα στην τροχιά *y*(t)* και με ποιά ταχύτητα; Αν δεν επιστρέψει πόσο "κοντά" θα βρίσκεται η νέα τροχιά στην προβλεπόμενη; Ακόμη, πόσο μεγάλη επιτρέπεται να είναι η διαταραχή ώστε το σύστημα να επανέλθει ή να ξαναπλησιάσει την αρχική τροχιά; Τα ερωτήματα αυτά σχετίζονται με τις ιδιότητες ευσταθείας του συστήματος ή πιό συγκεκριμένα, με τις ιδιότητες ευσταθείας μίας τροχιάς *y*(t)*. Αντίστοιχα ερωτήματα εγείρονται και στην περίπτωση ελέγχου της καταστάσεως του συστήματος.

Στο κεφάλαιο αυτό που είναι αφιερωμένο στην ανάλυση ευστάθειας θα θεωρήσουμε κυρίως μή γραμμικά συστήματα επειδή πολλές από τις πλέον ενδιαφέρουσες ιδιότητες ευστάθειας εκφυλίζονται στην περίπτωση γραμμικών συστημάτων. Ενα άλλο χαρακτηριστικό της ανάπτυξης του κεφαλαίου είναι ότι οι ιδιότητες ευστάθειας καθώς και οι μέθοδοι ανάλυσής τους θα αφορούν το διάνυσμα καταστάσεως και όχι την έξοδο του συστήματος. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι για ένα σύστημα που περιγράφεται από καταστατικές εξισώσεις της μορφής

$$\dot{x}(t) = f[t, x(t), u(t)]$$
$$y(t) = g[t, x(t), u(t)]$$

και για το οποίο ισχύει η συνήθης υπόθεση ότι η συνάρτηση *g* είναι συνεχής, η ευστάθεια ως προς τις μεταβλητές καταστάσεως συνεπάγεται την ευστάθεια και ως πρός την έξοδο, χωρίς όμως να αληθεύει και το αντίστροφο. Συνεπώς μόνο η ευστάθεια ως πρός τις μεταβλητές καταστάσεως εξασφαλίζει μία ασφαλή λειτουργία του συστήματος.

7.1 Ευστάθεια σε επιμένουσες διαταραχές

Εστω ένα δυναμικό σύστημα που περιγράφεται απο τις εξισώσεις καταστάσεως

$$\dot{x}(t) = f[t, x(t), u(t)]$$
$$y(t) = g[t, x(t), u(t)]$$

όπου $x\in\Re^n$, $y\in\Re^p$, $u\in\Re^m$ $t\in T^m$, $f{:}Tx\Re^n x\Re^m \rightarrow \Re^n$, $g{:}Tx\Re^n x\Re^m \rightarrow \Re^p$ και η συνάρτηση f ικανοποιεί συνθήκες που εξασφαλίζουν την ύπαρξη μιας μόνο λύσεως $x(t,t_0,x_0)$ για κάθε $x_0 \in R^n$, $t_0\in T$, $t>t_0$ και κάθε είσοδο $u(t)$ που ανήκει στο σύνολο των επιτρεπομένων εισόδων Ω.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι έχουμε προσδιορίσει μία κατάλληλη είισοδο ελέγχου $u^*(t)\in\Omega$ ώστε η κατάσταση του συστήματος (6.1) να διαγράφει μία επιθυμητή τροχιά $x^*(t)$. Η έννοια της ευστάθειας της τροχιάς $x^*(t)$ σε επιμένουσες διαταραχές $\Delta u(t)$ της εισόδου $u^*(t)$ δίνεται στον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 7.1
Η τροχιά $x^*(t)$ είναι ευσταθής κατά Langrange, αν για κάθε $t_0 \in T$ και $a>0$ υπάρχει $b>0$ τέτοιο ώστε για κάθε είσοδο $u(t)=u^*(t)+\Delta u(t)$ με $||\Delta u(t)|| \le a$ $\forall t \ge t_0$ για την προκύπτουσα τροχιά $x(t)=x^*(t)+\Delta x(t)$ αληθεύει η ανισότητα $||\Delta x(t)|| \le b$ $\forall t \ge t_0$.

Με άλλα λόγια μία τροχιά των μεταβλητών καταστάσεως του συστήματος (7.1) είναι ευσταθής κατά Langrange αν μία φραγμένη διαταραχή στην είσοδο του συστήματος συνεπάγεται μία επίσης φραγμένη διαταραχή στην τροχιά που διαγράφει η μεταβλητή καταστάσεως. Πρέπει να τονισθεί ότι η ευστάθεια κατά Langrange αναφέρεται σε μία συγκεκριμένη τροχιά και όχι στο σύστημα. Σχετική με την έννοια της ευστάθειας κατά Langrange είναι η παρακάτω ιδιότητα ενός συστήματος:

BIBS

Ορισμός 7.2
Το σύστημα (7.1) είναι ευσταθές Φραγμένης Εισόδου - Φραγμένης Καταστάσεως (Bounded Input - Bounded State stable) αν όλες οι τροχιές του $x(t)$ για $u(t)\in\Omega$ είναι ευσταθείς κατά Langrange.

Ανάλογοι ορισμοί μπορούν να δοθούν για την ευστάθεια της εξόδου σε επιμένουσες διαταραχές:

Ορισμός 7.3
Η τροχιά $y^*(t)$ είναι ευσταθής κατά Langrange, αν για κάθε $t_0 \in T$ και $a>0$ υπάρχει $b>0$ τέτοιο ώστε για κάθε είσοδο $u(t)=u^*(t)+\Delta u(t)$ με $||\Delta u(t)|| \le a$ $\forall t \ge t_0$ για την προκύπτουσα τροχιά $y(t)=y^*(t)+\Delta y(t)$ αληθεύει η ανισότητα $||\Delta y(t)|| \le b$ $\forall t \ge t_0$.

BIBO

Ορισμός 7.4
Το σύστημα (7.1) είναι ευσταθές Φραγμένης Εισόδου - Φραγμένης Εξόδου (Bounded Input - Bounded Output stable) αν όλες οι τροχιές του $y(t)$ για $u(t)\in\Omega$ είναι ευσταθείς κατά Langrange.

7.1.1 Ευστάθεια Φραγμένης Εισόδου - Φραγμένης Καταστάσεως γραμμικών συστημάτων

Ας θεωρησουμε τώρα ένα γραμμικό χρονικά αμετάβλητο σύστημα που περιγράφεται από την εξίσωση

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t) \tag{7.2}$$

Εστω $x^*(t)$ η τροχιά που διαγράφει η μεταβλητή κατάστασης του συστήματος σε μία είσοδο $u^*(t)$. Τότε θα αληθεύει η σχέση

$$\dot{x}^*(t)=Ax^*(t)=Bu^*(t)$$

Αν τώρα στην είσοδο του συστήματος επιβληθεί η διαταραχή $\Delta u(t)$ τότε η μεταβλητή καταστάσεως θα διαγράψει μία τροχιά $x^*(t)+\Delta\, x(t)$ έτσι ώστε

$$\dot{x}^*(t)+\Delta\dot{x}(t)=A[x^*(t)+\Delta x(t)]+B[u^*(t)+\Delta u(t)]$$

Συνεπώς θα ισχύει

$$\Delta\dot{x}(t)=A\Delta x(t)+B\Delta u(t)$$

απ'όπου προκύπτει ότι

$$\Delta x(t)=exp[A(t-t_0)]\ \Delta x(t_0)+\int_{t_0}^{t}\exp[A(t-\tau)]B\Delta u(\tau)d\tau$$

Ομως (βλέπε Κεφάλαιο 4)

$$expA(t-\tau)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{r_i}t^{j-1}Z_{ij}e^{s_i(t-\tau)}$$

όπου s_i $i=1,2,..m$ είναι οι ιδιοτιμές της μήτρας A, r_i η πολλαπλότητα της ιδιοτιμής s_i και Z_{ij} μήτρες με μιγαδικά στοιχεία Αρα

$$\Delta x(t)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{r_i}t^{j-1}Z_{ij}e^{s_i(t-\tau)}\ \Delta x(t_0)+$$

$$+\int_{t_0}^{t}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{r_i} t^{j-1} Z_{ij} e^{s_i(t-\tau)}\, B\Delta u(\tau)d\tau=$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{r_i} t^{j-1} Z_{ij} e^{s_i(t-\tau)}\quad \Delta x(t_0)+$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{r_i}\int_{t_0}^{t} t^{j-1} Z_{ij} e^{s_i(t-\tau)}\, B\Delta u(\tau)d\tau$$

Από την σχέση αυτή προκύπτει ότι αν $||\Delta u(t)|| \leq a \quad \forall t \geq t_0$ τότε υπάρχει $b>0$ τέτοιο ώστε $||\Delta x(t)|| \leq b \quad \forall t \geq t_0$ μόνο υπό την προϋπόθεση ότι οι ιδιοτιμές της μήτρας A έχουν πραγματικά μέρη αρνητικά. Πρέπει να σημειωθεί ότι η αυτή συνθήκη ευστάθειας κατά Langrange είναι ανεξάρτητη της τροχιάς που διαγράφουν οι μεταβλητές καταστάσεως. Συνεπώς

Θεώρημα 7.1
Ενα γραμμικό χρονικώς αμετάβλητο σύστημα είναι ευσταθές Φραγμένης Εισόδου - Φραγμένης Καταστάσεως, αν τα πραγματικά μέρη των ιδιοτιμών της μήτρας A είναι αρνητικά.

6.2 Ευστάθεια σε στιγμιαίες διαταραχές

Ας θεωρήσουμε ένα δυναμικό σύστημα που περιγράφεται απο τις εξισώσεις καταστάσεως

$$\dot{x}(t)=\bar{f}\;[t,x(t),\, u(t)] \tag{7.3}$$

όπου $x\in\Re^n$, $t\in T$, $u\in\Re^m$, $\bar{f}:Tx\Re^n x\Re^m \rightarrow \Re^n$ και η συνάρτηση $\bar{f}$ ικανοποιεί συνθήκες που εξασφαλίζουν την ύπαρξη μιας μόνο λύσεως $x(t,t_0,x_0)$ για κάθε $x_0 \in R^n$, $t_0\in T$, $t>t_0$ και κάθε είσοδο $u(t)$ που ανήκει στο σύνολο των επιτρεπομένων εισόδων Ω.

Κατά τον σχεδιασμό του συστήματος έχει υπολογισθεί μια είσοδος $u^*(t)\in \Omega$ τέτοια ώστε αν εφαρμοσθεί στο σύστημα η κατάσταση του συστήματος να διαγράφει μια καθορισμένη τροχιά $x^*(t)$. Είναι σημαντικό για την λειτουργία του συστήματος να ξέρουμε τι θα συμβεί αν μια στιγμιαία διαταραχή απομακρύνει το σύστημα μας απο την προβλεπόμενη τροχιά $x^*(t)$. Θα επιστρέψει σ'αυτήν και με ποιά ταχύτητα; Αν δεν επιστρέψει πόσο "κοντά" θα βρίσκεται η νέα τροχιά στην προβλεπόμενη; Ακόμη, πόσο μεγάλη επιτρέπεται να είναι η διαταραχή ώστε το σύστημα να επανέλθει ή να ξαναπλησιάσει την αρχική τροχιά; Τα ερωτήματα αυτά σχετίζονται με τις ιδιότητες ευσταθείας του συστήματος ή πιό συγκεκριμένα, με τις ιδιότητες ευσταθείας της ονομαστικής τροχιάς $x^*(t)$. Στην παράγραφο αυτή θα δώσουμε τους ορισμούς των εννοιών ευσταθείας με τις οποίες θα ασχοληθούμε στην συνέχεια. Θα ξεκινήσουμε με τους ορισμούς της ευστάθειας τροχιών. Στην συνέχεια θα ορίσουμε τις έννοιες ευσταθείας καταστάσεων ισορροπίας και θα δείξουμε ότι η μελέτη ευστάθειας μιας τροχιάς ή μιας καταστάσεως ισορροπίας μπορεί πάντοτε να αναχθεί στην μελέτη ευστάθειας ενός συστήματος με κατάσταση ισορροπίας $x_e=0$.

7.2.1 Οι έννοιες ευστάθειας τροχιάς

Ας υποθέσουμε ότι οι μεταβλητές καταστάσεως του συστήματος διαγράφουν μία τροχιά $x^*(t)$ όταν η είσοδος ελέγχου είναι $u^*(t)$. Η συμπεριφορά του συστήματος θα περιγράφεται από την εξίσωση

$$\dot{x}(t)=\bar{f}[t,x,(t),u^*(t)] \tag{7.4}$$

Προφανώς η συνάρτηση $x^*(t)$ θα ικανοποιεί την εξίσωση αυτή γιατί έχουμε υποθέσει ότι $x^*(t)$ είναι τροχιά του συστήματος:

$$\dot{x}^*(t)=\bar{f}[t,x^*(t),u^*(t)]$$

Η κατάσταση του συστήματος διαγράφει την τροχιά $x^*(t)$ έως την χρονική στιγμή t_0 που επιβάλλεται στην είσοδο μία στιγμιαία διαταραχή. Είναι φανερό ότι λόγω του στιγμιαίου χαρακτήρα της διαταραχής το σύστημα θα περιγράφεται από την σχέση (7.4) και για $t>t_0$. Το μόνο που θα έχει αλλάξει είναι ότι ενώ την χρονική στιγμή t_{0-} οι μεταβλητές καταστάσεως επαλήθευαν την σχέση $x(t_{0-})=x^*(t_{0-})$, την χρονική στιγμή t_{0+} θα ισχύει $x(t_{0+})=x_0$ όπου $x_0\neq x^*(t_{0+})$. Συνεπώς το πρόβλημα της ευστάθειας μιας τροχιάς $x^*(t)$ λόγω στιγμιαίων διαταραχών συνίσταται στην μελέτη της συμπεριφοράς του συστήματος όταν μία χρονική στιγμή αυτό απομακρύνεται από την τροχιά $x^*(t)$ χωρίς όμως να έχει αλλάξει η είσοδός του. Θέτοντας δε $f[t,x,(t)]=\bar{f}[t,x,(t),u^*(t)]$, μπορούμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, να υποθέσουμε ότι το σύστημα περιγράφεται από την σχέση

$$\Sigma: \quad \dot{x}(t)=f[t,x,(t)]$$

και ότι η αναλυση της ευστάθειας του αφορά την συμπεριφορά της απόκλισης των τροχιών του $x(t,t_0,x_0)$ από την $x^*(t)$. Στην συνέχεια θα υποθέσουμε ότι η συνάρτηση f ικανοποιεί συνθήκες που εξασφαλίζουν την ύπαρξη μιας μόνο λύσεως $x(t,t_0,x_0)$ για κάθε $x_0\in\Re^n$, $t_0\in T$ και $t\geq t_0$

Ορισμός 7.5

Η τροχιά $x^*(t)$ του συστήματος Σ είναι *ευσταθής κατά Lyapunov* αν δοθέντων ενός $\varepsilon>0$ και ενός $t_0 \in T$ υπάρχει ένα $\delta(t_0,\varepsilon)>0$ τέτοιο ώστε

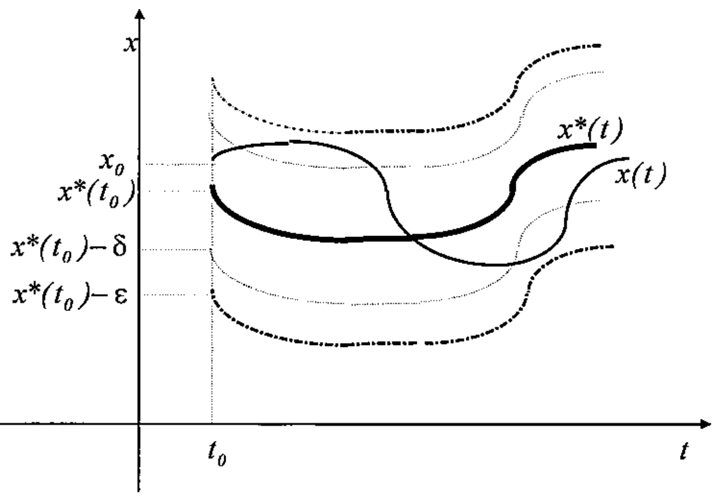
$$||x_0-x^*(t_0)||<\delta(t_0,\varepsilon) \Rightarrow ||x(t,t_0,x_0)-x^*(t)||<\varepsilon \quad \forall t \geq t_0$$

Παρατήρηση 1: Αν στον ορισμό 7.5 το δ δεν εξαρτάται απο το t_0, τότε η $x^*(t)$ είναι *ομοιομόρφως ευσταθής*. Στην γενική περίπτωση η ευστάθεια κατά Lyapunov δεν συνεπάγεται την ομοιόμορφη ευστάθεια. Είναι φανερό όμως ότι στα χρονικά αμετάβλητα συστήματα η ευστάθεια κατά ταυτίζεται με την ομοιόμορφη ευστάθεια (γιατί;)

Παρατήρηση 2: Σύμφωνα με τον Ορισμό 7.5 , για να είναι μια τροχιά $x^*(t)$ ευσταθής κατά Lyapunov δεν είναι απαραίτητο η νέα τροχιά να ταυτισθεί με την $x^*(t)$ μετά από ορισμένο χρονικό διάστημα. Πρέπει απλώς να μην ξεπερνά τα όρια της περιοχής ακτίνας ε γύρω απο την $x^*(t)$.

Παράδειγμα 7.1

Εστω το μονοδιάστατο δυναμικό σύστημα $\dot{x}=f(x)$ και έστω $x^*(t)$ μια τροχιά του όπως φαίνεται στο Σχήμα 1. Σύμφωνα με τον Ορισμό 7.5, η $x^*(t)$ είναι ευσταθής κατα Lyapunov αν δοθέντων ενός $\varepsilon>0$ και $t_o>0$, υπάρχει ένα $\delta(t_0,\varepsilon)>0$ τέτοιο ώστε αν η κατάσταση δεν "απομακρυνθεί" (λόγω μια στιγμιαίας διαταραχής) από την τροχιά περισσότερο απο δ την χρονική στιγμή στο t_0, δηλαδή αν $||x_0-x^*(t_0)||<\delta$, τότε η νέα τροχιά $x(t,t_0,x_0)$ δεν απομακρύνεται απο την $x^*(t)$ περισσότερο απο ε, δηλαδή $||x(t,t_0,x_0)-x^*(t)||<\varepsilon$ για κάθε $t \geq t_0$. Η ευστάθεια κατά Lyapunov φαίνεται παραστατικά στο σχήμα 7.2



Σχήμα 7.2: Ευστάθεια κατά Lyapunov της τροχιάς $x^*(t)$

Ορισμός 7.6

Η τροχιά $x^*(t)$ είναι *ελκτική* (*ομοιομόρφως ελκτική*) αν για κάθε $t_0 \in T$ υπάρχει $\eta(t_0)>0$ ($\eta>0$) τέτοιο ώστε

$$\|x_0-x^*(t_0)\|<\eta(t_0) \implies \lim_{t\to\infty} \|x(t,t_0,x_0)-x^*(t)\|=0.$$

Οσο κι αν, με μια πρώτη ματιά, φαίνεται να συμβαίνει το αντίθετο, εντούτοις η ελκτικότητα δεν εξασφαλίζει και την ευστάθεια κατά Lyapunov. Οι τροχιές $x(t,t_0,x_0)$ και $x^*(t)$ μπορεί να τείνουν να ταυτισθούν καθώς το t τείνει στο άπειρο, αλλά η μετά την διαταραχή νέα τροχιά μπορεί σε κάποιο σημείο να παίρνει πολυ μεγάλη τιμή (μεγαλύτερη απο ορισμένα $\varepsilon>0$ για οποιοδήποτε $\eta(t_0)>0$).

Ορισμός 7.7

Η τροχιά $x^*(t)$ ειναι *ασυμπτωτικώς ευσταθής* (*ομοιομόρφως ασυμπτωτικώς ευσταθής*) άν

1. Είναι ευσταθής κατά Lyapunov (*ομοιομόρφως ευσταθής κατά Lyapunov*)
2. Είναι *ελκτική* (*ομοιομόρφως ελκτική*).

Ορισμός 7.8

Η τροχιά $x^*(t)$ είναι *εκθετικώς ευσταθής* άν υπάρχουν τρείς πραγματικοί αριθμοί $\alpha>0, \beta>0$ και $\eta>0$ τέτοιο ώστε

$$\|x_0-x^*(t_0)\|<\eta \implies \|x(t,t_0,x_0)-x^*(t)\|<\alpha\|x_0-x^*(t_0)\|exp[-\beta(t-t_0)]$$

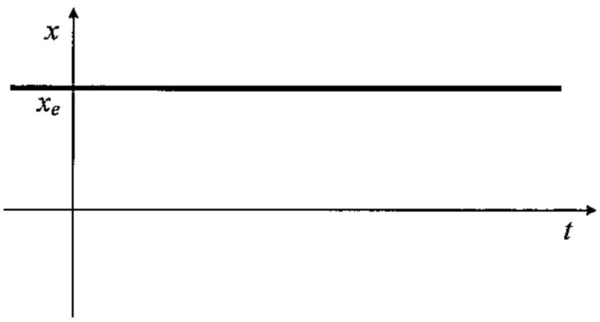
για κάθε $t_0 \in T$ και $t \geq t_0$.

Ασκηση 7.1

Διατάξτε ιεραρχικά τις ιδιότητες ευσταθείας έτσι ώστε μια ιδιότητα που ανήκει σε κάποιο επίπεδο να συνεπάγεται τις ιδιότητες που βρίσκονται στα κατώτερα ιεραρχικά επίπεδα. Να γίνουν οι σχετικές αποδείξεις που δικαιολογούν την διάταξη αυτή.

7.2.2 Ευστάθεια καταστάσεως ισορροπίας

Ας θεωρήσουμε το σύστημα Σ. Μία εκφυλισμένη μορφή τροχιάς είναι η κατάσταση ισορροπίας. Μία κατάσταση $x_e \in \Re^n$ είναι κατάσταση ισορροπίας του συστήματος Σ αν $x(t,t_0,x_e)=x_e$ για κάθε $t_0 \in T$ και $t>t_0$. Η μορφή της τροχιάς $x(t,t_0,x_e)$ ενός μονοδιάστατου συστήματος που ξεκινάει απο την κατάσταση ισορροπίας x_e θα είναι όπως στο σχήμα 7.3. Είναι προφανές ότι μία κατάσταση x_e είναι κατάσταση ισορροπίας του συστήματος S αν και μόνο αν $f(t,x_e)=0$ για κάθε $t \in T$.



Σχήμα 7.3: Κατάσταση ισορροπίας

Οι έννοιες της ευσταθείας καταστάσεως ισορροπίας προκύπτουν απο τις αντίστοιχες έννοιες ευσταθείας τροχιάς άν στους ορισμούς 7.5-7.8 αντικαταστήσουμε το $x^*(t)$ με το x_e. Ετσι, για παράδειγμα, η ευστάθεια κατά Lyapunov μιας καταστάσεως ισορροπίας x_e ορίζεται ως εξής.

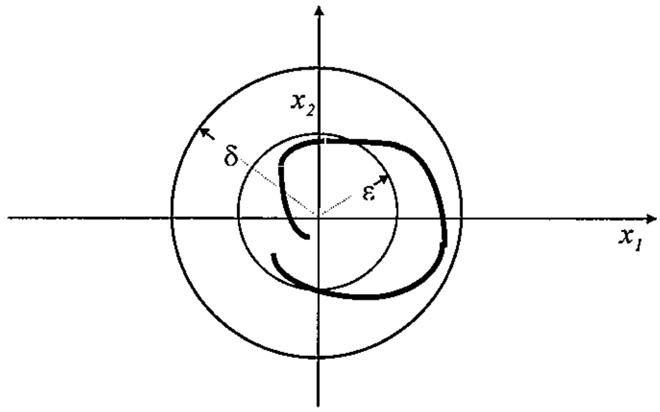
Ορισμός 7.9

Η κατάσταση ισορροπίας x_e του συστήματος Σ είναι ευσταθής κατα Lyapunov αν δοθέντων ενός $\varepsilon>0$ και ενός $t_0 \in T$, υπάρχει $\delta(t_0,\varepsilon)>0$ τέτοιο ώστε

$$\|x_0-x_e\|<\delta(t_0,\varepsilon) \;\Rightarrow\; \|x(t,t_0,x_0)-x_e\|<\varepsilon \quad \forall t>t_0.$$

Παράδειγμα 7.2

Ας θεωρήσουμε ένα διδιάστατο σύστημα $\dot{x}(t)=f(x(t))$ με κατάσταση ισορροπίας x_e, δηλαδή $f(x_e)=0$. Αν η x_e είναι ευσταθής κατα Lyapunov τότε αν μας δοθεί ένα $\varepsilon>0$ μπορούμε να βρούμε ένα $\delta>0$ τέτοιο ώστε οποιαδήποτε τροχιά που ξεκινάει απο τον κύκλο ακτίνας δ και κέντρου x_e του διαγράμματος φάσεως δεν βγαίνει έξω απο το κύκλο ακτίνας ε και κέντρου x_e όπως φαίνεται στο σχήμα 7.4.



Σχήμα 7.4: Ευστάθεια κατά Lyapunov καταστάσεως ισορροπίας $x_e=0$

Ασκηση 7.2

Διατυπώστε τους ορισμούς ελκτικότητας, ομοιόμορφης ελκτικότητας, ασυμπτωτικής ευστάθειας, ομοιόμορφης ασυμπτωτικής ευστάθειας και εκθετικής ευστάθειας μιας καταστάσεως ισορροπίας.

Παράδειγμα 7.3

Εστω το σύστημα δευτέρας τάξεως που περιγράφεται από τις εξισώσεις

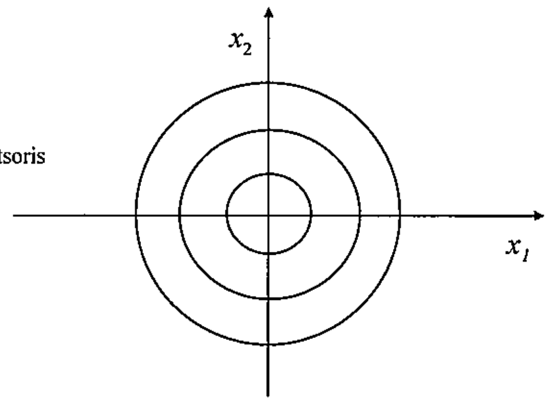
$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= 4x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -x_1(t) \end{aligned} \tag{7.5}$$

Το σύστημα έχει μία μόνο κατάσταση ισορροπίας, την $x_e=0$. Οι τροχιές του συστήματος δίνονται από τις σχέσεις

$$x_1(t;t_0,x_0)=x_{01}\cos 2(t-t_0)+2x_{02}\sin 2(t-t_0)$$

$$x_2(t;t_0,x_0)= -0.5x_{02}\sin 2(t-t_0)+x_{02}\cos 2(t-t_0)$$

Οι τροχιές αυτές είναι περιοδικές με περίοδο $T=\pi$. Από την γραφική παράσταση του σχήματος 7.4 γίνεται φανερό ότι η κατάσταση ισορροπίας $x_e=0$ είναι ομοιόμορφα ευσταθής χωρίς να είναι ελκτική. Συνεπώς η $x_e=0$ δεν είναι ασυμπτωτικώς ευσταθής.



Σχήμα 7.5: Οι τροχιές του συστήματος (7.5)

7.2.3 Περιοχές ευσταθείας

Στην παρουσίαση των εννοιών που σχετίζονται με την ελκτικότητα είδαμε ότι υπάρχει μια περιοχή γύρω απο την κατάσταση ισορροπίας τέτοια ώστε κάθε τροχιά που ξεκινάει απο την περιοχή αυτή συγκλίνει προς την κατάσταση ισορροπίας. Η περιοχή αυτή, που δεν είναι απαραίτητα κυκλική, δίνει τις επιτρεπόμενες αποκλίσεις απο την κατάσταση ισορροπίας (και εμμέσως την επιτρεπόμενη ισχύ των παραγόντων που προκαλούν την απόκλιση) ώστε το σύστημα να μην μετατεθεί σε άλλη κατάσταση ισορροπίας. Πρακτικά ενδιαφέρουσες είναι οι περιοχές που συνεπάγονται την ομοιόμορφη ελκτικότητα (γιατί;)

Ορισμός 7.10

Το ανοικτό συνεκτικό σύνολο $\Delta\in\Re^n$ *λέγεται περιοχή ελκτικότητας* της καταστάσεως ισορροπίας x_e του συστήματος Σ αν για κάθε $x_0\in\Re^n$ και $t_0\in T$ ισχύει

$$\lim_{t\to\infty} x(t,t_0,x_0)=x_e$$

Αν επι πλέον η x_e είναι και ασυμπτωτικώς ή εκθετικά ευσταθής τότε η Δ λέγεται *περιοχή ασυμπτωτικής ευσταθείας* ή *εκθετικής ευσταθείας αντίστοιχα.*

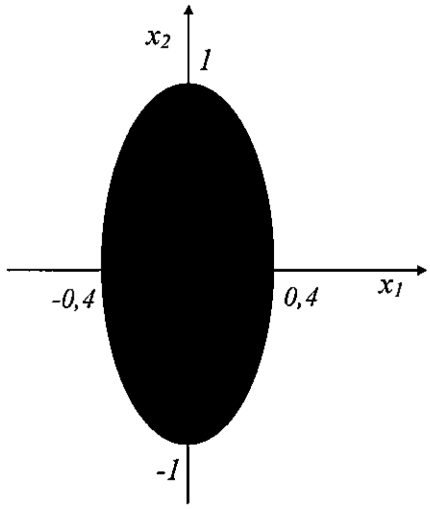
Παράδειγμα 7.4

Εστω το σύστημα που περιγράφεται απο τις εξισώσεις

$$\begin{aligned}\dot x_1 &= -2x_1+2x_1x_2^2+5x_1^3\\ \dot x_2 &= -2x_2+5x_1^2x_2+2x_2^3\end{aligned} \qquad (7.6)$$

του οποίου η $x_e=0$ είναι μια κατάσταση ισορροπίας. Αποδεικνύεται (σε επόμενη παράγραφο) ότι η περιοχή

$$\Delta=\{x_1\in\Re, x_2\in\Re: 5x_1^2+2x_2^2<2\}$$



Σχήμα 7.6: Η περιοχή ελκτικότητας της ισορροπίας $x_e=0$ του συστήματος (7.6)

είναι περιοχή ομοιόμορφης ασυμπτωτικής ευστάθειας της $x_e=0$. Η περιοχή αυτή φαίνεται στο παρακάτω σχήμα 7.6. Κάθε τροχιά που ξεκινάει απο σημείο της σκιασμένης περιοχής συγκλίνει στο μηδέν. Οι τροχιές που ξεκινούν από σημεία εκτός της περιοχής αυτής τείνουν στο άπειρο.

7.2.4 Αναγωγή ευστάθειας τροχιάς σε ευστάθεια καταστάσεως ισορροπίας

Εστω το σύστημα

$$\dot{x}(t)=f[t,x(t)] \qquad (7.7)$$

και η τροχιά του $x^*(t)$. Θέλουμε να εξετάσουμε αν η $x^*(t)$ είναι ευσταθής κατά Lyapunov. Σύμφωνα με τον ορισμό 7.3 η $x^*(t)$ είναι ευσταθής κατά Lyapunov αν, δοθέντων $\varepsilon>0$ και $t_o\in \hat{O}$, υπάρχει $\delta(t_o,\varepsilon)>0$ τέτοιο ώστε

$$\|x_0 - x^*(t_0)\| < \delta(t_0,\varepsilon) \;\Rightarrow\; \|x(t,t_0,x_0) - x^*(t)\| < \varepsilon \quad \forall t \geq t_0 \tag{7.8}$$

ή ισοδύναμα

$$\|y_0\| < \delta(t_0,\varepsilon) \;\Rightarrow\; \|y(t,t_0,y_0)\| < \varepsilon \quad \forall t \geq t_0 \tag{7.9}$$

όπου θέσαμε $y_0 = x_0 - x^*(t_0)$ και $y(t,t_0,y_0) = x(t,t_0,x_0) - x^*(t)$. Αλλά

$$\dot{y}(t,t_0,y_0) = x(t,t_0,x_0) - \dot{x}^*(t)$$

$$= f[t,x(t,t_0,x_0)] - \dot{x}^*(t)$$

$$= f[t,y(t,t_0,y_0) + x^*(t)] - \dot{x}^*(t)$$

Αν θέσουμε

$$g(t,y) = f[t,y + x^*(t)] - \dot{x}^*(t)$$

τότε η $y(t,t_0,y_0)$ είναι λύση του συστήματος.

$$\dot{y}(t) = g(t,y) \tag{7.10}$$

Το σύστημα (7.8) έχει σαν κατάσταση ισορροπίας την $y=0$. Πράγματι

$$g(t,0) = f[t,0 + x^*(t)] - \dot{x}^*(t) =$$

$$= f[t,x^*(t)] - \dot{x}^*(t) = 0$$

γιατί η $x^*(t)$ ικανοποιεί την σχέση $\dot{x}^*(t) = f[t,x^*(t)]$. Ετσι η σχέση (7.9) μας λέει ότι η κατάσταση ισορροπίας $y=0$ του συστήματος (7.10) είναι ευσταθής κατά Lyapunov. Επειδή η (7.8) είναι ισοδύναμη με την (7.9) συμπεραίνουμε ότι η τροχιά $x^*(t)$ του συστήματος (7.7) είναι ευσταθής κατά Lyapunov αν και μόνο αν η κατάσταση ισορροπίας $y=0$ του συστήματος (7.10) είναι ευσταθής κατά Lyapunov.

Ασκηση 7.3

Αποδείξτε ότι ανάλογες προτάσεις ισχύουν και για τα άλλα είδη ευσταθείας. Οι προτάσεις αυτές είναι σημαντικές για την ανάλυση ευσταθείας γιατί το πρόβλημα μελέτης ευσταθείας μίας τροχιάς $x^*(t)$ η μίας καταστάσεως ισορροπίας x_e ενός συστήματος $\dot{x} = f(t,x)$ ανάγεται σε ένα ανάλογο πρόβλημα μελέτης ευσταθείας της καταστάσεως ισορροπίας $y=0$ του συστήματος $\dot{y} = g(t,y)$ όπου

$$g(t,y)=f[t,y+x^*(t)]-\dot{x}^*(t)$$

ή

$$g(t,y)=f[t,y+x_e]$$

αντίστοιχα.

Λόγω της προηγούμενης ανάλυσης, στο εξής σε όλα τα συστήματα που θα εξετάσουμε θα θεωρούμε σαν κατάσταση ισορροπίας την $x_e=0$ υποθέτοντας ότι έχει γίνει η αναγωγή.

7.3 Ανάλυση ευσταθείας σε στιγμιαίες διαταραχές

Οπως και στην περίπτωση της ανάλυσης ευσταθείας συστημάτων που υφίστανται επιμένουσες διαταραχές, έτσι και στην περίπτωση των στιγμιαίων διαταραχών, σκοπός είναι η μελέτη της ευστάθειας να μην απαιτεί την επίλυση των διαφορικών εξισώσεων. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί με εφαρμογή των δύο μεθόδων του Lyapunov. Η πρώτη ή έμμεση μέθοδος δίνει ένα απλό κριτήριο ασυμπτωτικής ευστάθειας. Η δεύτερη ή άμεση μέθοδος επιτρέπει όχι μόνο την μελέτη της ευστάθειας, αλλά και την εκτίμηση της περιοχής ελκτικότητας στην περίπτωση όπου η ισορροπία είναι ασυμπτωτικά ευσταθής.

7.3.1 Η δεύτερη μέθοδος Lyapunov

Οπως αναφέραμε ήδη, η μέθοδος αυτή δίνει πληροφορίες για την ευστάθεια του υπο μελέτη συστήματος, χωρίς να απαιτεί την επίλυση των εξισώσεων καταστασεως. Ετσι η μέθοδος αυτή είναι ιδιαίτερα χρήσιμη στην μελέτη ευσταθείας μη γραμμικών συστημάτων. Η βασική ιδέα της μεθόδου στηρίχτηκε στην διαπίστωση ότι σε ένα φυσικό σύστημα χωρίς διέγερση, η δυναμική ενέργεια φθίνει με τον χρόνο και γίνεται ελάχιστη όταν το σύστημα φθάσει στην κατάσταση ισορροπίας. Θεωρώντας ότι η ελάχιστη αυτή τιμή είναι μηδέν, η δυναμική ενέργεια είναι μια θετική συνάρτηση της καταστάσεως του. Όμως για την κατανόηση της δεύτερης μεθόδου του Lyapunov είναι προτιμώτερη η γεωμετρική παρά η φυσική ερμηνεία, δεδομένου μάλιστα ότι η έννοια της ενεργείας δεν επεκτείνεται πάντοτε και σε μή φυσικά συστήματα. Ξεκινάμε με μερικούς ορισμούς.

Ορισμός 7.11
Η συνάρτηση $v(x)$, $v:\Re^n \rightarrow \Re$ λέγεται *θετικά ορισμένη* στην γειτονιά N του σημείου $x=0$ αν $v(0)=0$ και $v(x)>0$ για κάθε $x \in N-\{0\}$.

Ορισμός 7.12

Η συνάρτηση $v(t,x)$, $v{:}T\text{x}\Re^n \to \Re$ λέγεται *θετικά ορισμένη* στην γειτονιά N του σημείου $x=0$ αν $v(t,0)\equiv 0$ και υπάρχει θετική ορισμένη συνάρτηση $v^*(x)$, $v^*{:}R^n \to R$ τέτοια ώστε $v^*(x) \leq v(t,x)$ για κάθε $t \in T$ και $x \in N$.

Αν στους ορισμούς 7.11 και 7.12 η γειτονιά N συμπίπτει με τον χώρο $\Re^n$ τότε η συνάρτηση λέγεται *ολικά θετικά ορισμένη*

Οι θετικά ορισμένες συναρτήσεις συνδέονται στενά με την έννοια της απόστασης. Αυτό φαίνεται στο παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 7.2

Αν η συνάρτηση $v(x)$, $v{:}\ \Re^n \to \Re_+$ είναι θετικά ορισμένη στον $\Re^n$, τότε η συνάρτηση $d(x,y)$, $d{:}\ \Re^n\text{x}\Re^n \to \Re_+$ που ορίζεται απο την σχέση

$$d(x,y)=\begin{cases} v(x)+v(y) & \alpha\nu \quad x \neq y \\ 0 \quad \alpha\nu & x=y \end{cases} \qquad (7.11)$$

αποτελεί μια απόσταση στον χώρο $\Re^n$.

Ασκηση 7.4

Να αποδειχθεί το Θεώρημα 7.2

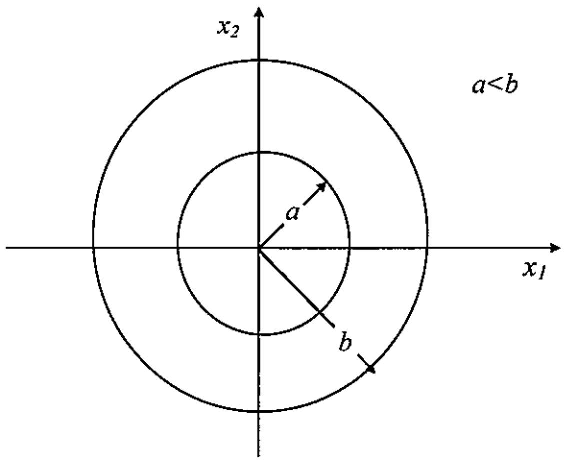
Σύμφωνα με τον Θεώρημα 7.2, αν η απόσταση μεταξύ δύο σημείων x και y στον $\Re^n$ μετριέται με την $d(x,y)$ όπως αυτή ορίζεται στο προηγούμενο θεώρημα , τότε η απόσταση του x απο το 0, δηλαδή η $d(x,0)$, είναι ίση με $v(x)$. Συνεπώς μια ολικά θετικά ορισμένη συνάρτηση $v(x)$, $v{:}\ \Re^n \to \Re$ εκφράζει την απόσταση του x απο το 0 στον χώρο $\Re^n$ που είναι εφοδιασμένος με την απόσταση $d(x,y)$ που ορίζεται απο την σχέση (7.11).

Παράδειγμα 7.5

Εστω η συνάρτηση $v(x)$, $v{:}\ \Re^2 \to \Re$, όπου $v(x)=\sqrt{x_1^2+x_2^2}$ τότε η

$$d(x,y)=\begin{cases} \sqrt{x_1^2+x_2^2}+\sqrt{y_1^2+y_2^2} & \gamma\iota\alpha \quad x \neq y \\ 0 \quad \gamma\iota\alpha & x=y \end{cases} \qquad (7.12)$$

είναι μία απόσταση στον χώρο $\Re^2$. Η απόσταση ενός σημείου x από το 0 δίδεται απο την σχέση $d(x,0)=v(x)=\sqrt{x_1^2+x_2^2}$, που συμπίπτει με την ευκλείδια απόσταση παρόλο που η $d(x,y)$ δεν είναι η ευκλείδια απόσταση στον $\Re^2$. Ας προσδιορίσουμε τώρα τον γεωμετρικό τόπου των σημείων $x \in \Re^2$ που απέχουν απο το μηδέν απόσταση ίση με a, $a>0$. Προφανώς για τα σημεία αυτά θα ισχύει $\sqrt{x_1^2 + x_2^2} = a$, άρα ο γεωμετρικός τόπος των σημείων αυτών είναι η περιφέρεια με ακτίνα a και κέντρο την αρχή των αξόνων, όπως φαίνεται στο σχήμα 7.7.



Σχήμα 7.7: Γεωμετρικοί τόποι των σημείων που ισαπέχουν από το x=0 όταν η απόσταση ορίζεται από την σχέση (7.12)

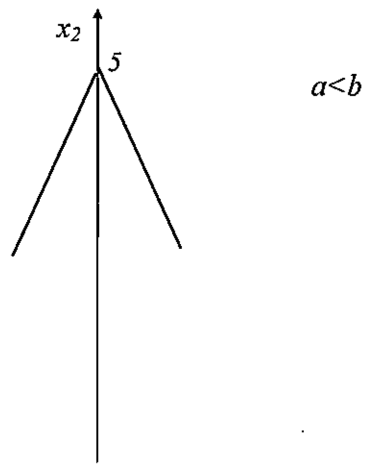
Παράδειγμα 7.6

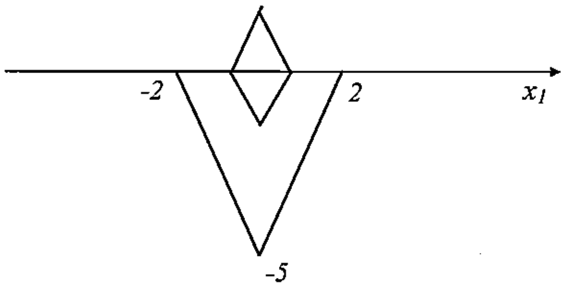
Εστω η ολικά θετικά ορισμένη συνάρτηση $v(x)=5|x_1|+2|x_2|$. Ορίζοντας την απόσταση $d(x,y)$ όπως στην (7.11) δηλαδή

$$d(x,y)=\begin{cases} 5|x_1|+2|x_2|+5|y_1|+2|y_2| & \text{για} \quad x \neq y \\ 0 \quad \text{για} \quad x=y \end{cases} \tag{7.13}$$

βρίσκουμε ότι τα σημεία που απέχουν εξ ίσου απο το $x=0$ κείνται στις πλευρές ρόμβων όπως φαίνεται στο σχήμα 7.8. □

Εστω τώρα ένα σύστημα $\dot{x}=f(t,x)$ με κατάσταση ισορροπίας την $x_e=0$. Αν $v(x)$ είναι μια θετικά ορισμένη συνάρτηση τότε η $v[x(t)]$, εκφράζει την απόσταση της καταστάσεως $x(t)$ του συστήματος την χρονική στιγμή t απο το 0, στον χώρο καταστάσεως του συστήματος, που είναι εφοδιασμένος με την απόσταση $d(x,y)$ όπως ορίζεται απο την (7.11). Συνεπώς η μελέτη της συμπεριφοράς της $v[x(t)]$ καθώς το t μεταβάλλεται μπορεί να μας δώσει





Σχήμα 7.8: Γεωμετρικοί τόποι των σημείων που ισαπέχουν από το x=0 όταν η απόσταση ορίζεται από την σχέση (7.13)

πληροφορίες για την ευστάθεια του συστήματος. Αν, για παράδειγμα, η *v(x)* είναι επι πλέον συνεχής και

$$\lim_{t\to\infty} v[x(t)]=0$$

τότε

$$\lim_{t\to\infty} x(t)=0$$

Είναι όμως δυνατόν να αποφανθούμε για την συμπεριφορά της *v[x(t)]* χωρίς να γνωρίζουμε την λύση *x(t);* Η απάντηση σε μερικές περιπτώσεις είναι θετική.

Ας θεωρήσουμε την χρονική παράγωγο της *v[x(t)]* ως προς *t*:

$$\frac{dv[x(t)]}{dt}=\frac{\partial v(x)}{\partial x_1}\Big|_{x=x(t)}\cdot\frac{dx_1(t)}{dt}+\frac{\partial v(x)}{\partial x_2}\Big|_{x=x(t)}\cdot\frac{dx_2(t)}{dt}+\dots$$

$$+\frac{\partial v(x)}{\partial x_n}\Big|_{x=x(t)}\frac{dx_n(t)}{dt}=$$

$$=[grad\, v(x)]^T\big|_{x=x(t)}\frac{dx(t)}{dt}=$$

$$=[[grad\, v(x)]^T f(x)]\big|_{x=x(t)}$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι η συνάρτηση $[grad\ v(x)]^T f(x)$ παίρνει αρνητικές τιμές για κάθε $x \neq 0$ (για $x=0$ μηδενίζεται επειδή $f(0)=0$). Τότε για οποιοδήποτε $x(t) \neq 0$ η $\frac{dv[x(t)]}{dt}$ είναι αρνητική, άρα η απόσταση $v[x(t)]$ του $x(t)$ απο το 0 μειώνεται μονότονα μέχρις ότου $\frac{dv[x(t)}{dt} = 0$, δηλαδή μέχρις ότου $x(t)=0$. Συνεπώς, στην περίπτωση αυτή, η ισορροπία $x=0$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθής (πάντως γιαυτό χρειάζεται μια αυστηρότερη απόδειξη).

Είμαστε τώρα σε θέση να "κατανοήσουμε" την ιδέα που κρύβεται πίσω απο τα παρακάτω θεωρήματα του Lyapunov.

Ορισμός 7.13

Η συνάρτηση $v(x)$ ($v(t,x)$) λέγεται *αρνητικά ορισμένη* αν η $-v(x)$ ($-v(t,x)$) είναι θετικά ορισμένη.

Ορισμός 7.14

Η συνάρτηση $v(x)$ ($v(t,x)$) λέγεται *αρνητικά ημιορισμένη* αν $v(x)<0$ ($v(t,x)<0$) για $x \neq 0$ και $v(0)=0$ ($v(t,0)=0$)

Θεώρημα 7.3 (Lyapunov)

Αν υπάρχει μία συνεχής και παραγωγίσιμη θετικά ορισμένη συνάρτηση $v(t,x)$, $v: T x \Re^n \to \Re_+$ σε μία γειτονιά της ισορροπίας $x_e=0$ τέτοια ώστε η συνάρτηση

$$\frac{\partial v[x(t)]}{\partial t} + [grad_x v(t,x)]^T f(t,x) \qquad (7.14)$$

να είναι αρνητικά ημιορισμένη σε μία γειτονιά του $x_e=0$, τότε η κατάσταση ισορροπίας $x_e=0$ του συστήματος Σ είναι ευσταθής κατά Lyapunov.

<u>Σημείωση</u>: Είναι φανερό ότι αν στην έκφραση (7.14) θέσουμε όπου x το $x(t)$ τότε αυτή ισούται με την $\frac{dv[x(t)]}{dt}$. Στην συνέχεια θα συμβολίζουμε την έκφραση (7.14) με το σύμβολο $\dot{v}(t,x)_{(\Sigma)}$, δηλαδή

$$\dot{v}(t,x)_{(\Sigma)} = \frac{\partial v[x(t)]}{\partial t} + [grad_x v(t,x)]^T f(t,x)$$

το οποίο είναι γνωστό με το όνομα "*ολική παράγωγος της $v(t,x)$ ως πρός το σύστημα Σ*"

Ορισμός 7.15

Η συνάρτηση $v(t,x)$, $v{:}Tx\Re^n \to \Re$ δέχεται ένα απείρως μικρό άνω φράγμα αν υπάρχει μια συνεχής και αυστηρά μονοτόνως αύξουσα συνάρτηση $\varphi(r)$, φ: $\Re_+ \to \Re_+$, $\varphi(0)=0$ τέτοια ώστε

$$|v(t,x)| \le \varphi(\|x\|)$$

για κάθε $t \in T$ και $x \in N$ όπου N μια γειτονιά του $x=0$.

Σύμφωνα με τον ορισμό αυτό, αν μια θετικά ορισμένη συνάρτηση $v(t,x)$ δέχεται ένα απείρως μικρό άνω φράγμα τότε απο την ανισότητα $v(t,x) \ge \varepsilon$ για κάθε $t \in T$ έπεται ότι $\|x\| \ge \varphi^{-1}(\varepsilon)$. Προφανώς άν η v δεν εξαρτάται απο το t και είναι συνεχής τότε δέχεται ένα απείρως μικρό άνω φράγμα.

Θεώρημα 7.4 (Lyapunov)
Αν υπάρχει μια συνεχής και παραγωγίσιμη θετικά ορισμένη συνάρτηση $v(t,x)$, $v{:}Tx\Re^n \to \Re_+$ που δέχεται ένα απείρως μικρό άνω φράγμα και της οποίας η ολική παράγωγος ως προς το Σ είναι αρνητικά ορισμένη, τότε η ισορροπία $x=0$ του συστήματος Σ είναι ασυμπτωτικά ευσταθής.

Σύμφωνα με το θεώρημα 7.3 οι υποθέσεις του θεωρήματος 7.4 συνεπάγονται κατ' αρχήν την ευστάθεια κατά Lyapunov της ισορροπίας $x=0$ Εξ' άλλου επειδή η $\dot{v}(t,x)_{(\Sigma)}$ είναι αρνητικά ορισμένη, συμπεραίνουμε ότι η $v[t,x(t)]$ είναι μονοτόνως φθίνουσα., Επί πλέον $v(t,x)) \ge 0$. Αρα καθώς το t τείνει στο άπειρο η $v[t,x(t)]$ συγκλίνει σε κάποιο μη αρνητικό αριθμό v_o:

$$\lim_{t\to\infty} v[t,x(t)]=v_o$$

Για να είναι $v_o=0$ οπότε και $\lim\limits_{t\to\infty} x(t)=0$, θα πρέπει επί πλέον να θεωρήσουμε ότι η $v(t,x)$, δέχεται ένα απείρως μικρό άνω φράγμα. Στην περίπτωση αυτή

$$v[t,x)] \ge v_o \qquad \forall t \in T$$

και επειδή

$$v[t,x(t)] \le \varphi(\|x(t)\|)$$

θα έχουμε

$$\varphi(\|x(t)\|) \ge v_o$$

δηλαδή

$$||x(t)||\geq\varphi^{-1}(v_o)>0$$

Τότε όμως απο την

$$\dot{v}[t,x(t)]_{(S)}<-\psi^*(||x(t)||)$$

όπου $\psi^*(x)$ είναι μια θετική ορισμένη και μονοτόνως αύξουσα συνάρτηση, θα προέκυπτε ότι

$$\dot{v}[t,x(t)]_{(S)}\leq-\psi^*[\varphi^{-1}(v_o)]$$

Αρα

$$v(t,x(t))-v(t_o,x_o)=\int_{t_0}^{t}\dot{v}[\tau,x(\tau)]_{(S)}d\tau$$

$$\leq-\int_{t_0}^{t}\psi^*[\varphi^{-1}(v_0)]dt$$

$$\leq-(t-t_o)\,\psi^*[\varphi^{-1}(v_o)]$$

Αν v_o ήταν θετικό τότε για ένα πολύ μεγάλο t θα είχαμε

$$v[t,x(t)]<0$$

πράγμα άτοπον. Αρα δεν μπορεί παρά να είναι $v_o=0$. Να γιατί είναι απαραίτητο να υποθέσουμε ότι η $v(t,x)$ δέχεται ένα απείρως μικρό άνω φράγμα!

Στην συνέχεια θα ονομάζουμε *συνάρτηση Lyapunov* μια συνάρτηση $v(t,x)$ που ικανοποιεί κάποιο απο τα θεωρήματα 7.3 ή 7.4.

Παράδειγμα 7.7

Ας μελετήσουμε την ευστάθεια της ισορροπίας $x_e=0$ του συστήματος του παραδείγματος 7.4. Εστω $v(x)=5x_1^2+2x_2^2$. Τότε

$$[grad_x v(x)]^T=[10x_1 \quad 4x_2]^T$$

και

$$\dot{v}(x)_{(6.6)}=[grad_x v(x)]^T f(x)=$$

$$=\begin{bmatrix}10x_1 & 4x_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2x_1+2x_1x_2^2+5x_1^3\\ -2x_2+5x_1^2x_2+2x_2^3\end{bmatrix}=$$

$$=-20x_1^2+20x_1^2x_2^2+50x_1^4-8x_2^2+20x_1^2x_2^2+8x_2^4=$$

$$=10x_1^2(2x_2^2+5x_1^2-2)+4x_2^2(2x_2^2+5x_1^2-2)=$$

$$=(5x_1^2+2x_2^2-2)(10x_1^2+4x_2^2)$$

μικρό

Η θετικά ορισμένη συνάρτηση $v(x)$ είναι συνεχής, άρα δέχεται ένα απείρως άνω φράγμα. Εξ' άλλου η $\dot{v}_{(6.6)}$ είναι αρνητικά ορισμένη στην γειτονιά $\{x\in\Re^2: 5x_1^2+2x_2^2<2\}$. Αρα η ισορροπία $x=0$ του συστήματος (7.6) είναι ασυμπτωτικά ευσταθής.

7.3.1.1 Γραμμικά συστήματα

Ας θεωρήσουμε το γραμμικό χρονικά αμετάβλητο σύστημα

$$\dot{x}=Ax \tag{7.15}$$

όπου $x\in\Re^n$ και $A\in\Re^{n\times n}$.

Εστω $P\in\Re^{n\times n}$ μια συμμετρική θετικά ορισμένη μήτρα, δηλαδή μία μήτρα τέτοια ώστε η συνάρτηση $v(x)=x^TPx$ να είναι ολικά θετικά ορισμένη. Τότε

$$\dot{v}_{(7.15)}=\dot{x}^TPx+x^TP\dot{x}=$$

$$=x^TA^TPx+x^TPAx=$$

$$=x^T(A^TP+PA)x$$

Αν η συμμετρική μήτρα A^TP+PA είναι αρνητικά ορισμένη τότε η $\dot{v}_{(7.15)}$ είναι αρνητικά ορισμένη συνεπώς η ισορροπία $x=0$ του συστήματος (7.15) είναι ασυμπτωτικά ευσταθής. Το ερώτημα που τίθεται είναι πότε υπάρχει μια τέτοια μήτρα P. Απάντηση στο ερώτημα αυτό δίνει το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 7.4
Η ισορροπία $x=0$ του συστήματος $\dot{x}=Ax$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθής αν και μόνο άν δοθείσης μιας συμμετρικής θετικά ορισμένης μήτρας Q υπάρχει μια συμμετρική θετικά ορισμένη μήτρα P τέτοια ώστε

$$A^TP+PA=-Q$$

Παράδειγμα 7.8
Εστω το γραμμικό δυναμικό σύστημα .

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 3 & -4\end{bmatrix}x \tag{7.16}$$

Διαλέγοντας

$$Q=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

τότε για την μήτρα

$$P=\begin{bmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{12} & p_{22}\end{bmatrix}$$

που ικανοποιεί την εξίσωση $A^TP+PA=-Q$ έχουμε

T

$$\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 3 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{12} & p_{22}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{12} & p_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 3 & -4\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

απ' όπου προκύπτει ότι

$$-4p_{11}+6p_{12}=-1$$

$$-2p_{12}-p_{22}=0$$

$$-8p_{22}=-1$$

Συνεπώς

$$p_{11}=\frac{5}{32},\quad p_{22}=\frac{1}{8}\ \text{και}\ p_{12}=-\frac{1}{16}$$

Αρα

$$P=\begin{bmatrix} \frac{5}{32} & -\frac{1}{16} \\ -\frac{1}{16} & \frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

Η P είναι θετικά ορισμένη γιατί (Θεώρημα Sylvester)

$$p_{11}=\frac{5}{32}>0 \quad \text{και} \quad det\,P=\frac{5}{162}-\frac{1}{162}>0$$

Αρα η ισορροπία $x=0$ του συστήματος (7.16) είναι ασυμπτωτικά ευσταθής και η συνάρτηση

$$v(x)=x^T Px=\frac{5}{32}x_1^2-\frac{1}{8}x_1x_2+\frac{1}{8}x_2^2$$

είναι μια συνάρτηση Lyapunov για το σύστημα (7.16)

7.3.1.2 Εκτίμηση περιοχών ευσταθείας

Οπως έχουμε προαναφέρει, η ευθεία μέθοδος του Lyapunov μας δίνει την δυνατότητα όχι μόνο να αποφανθούμε για το είδος της ευστάθειας της ισορροπίας $x=0$, αλλά και να προσδιορίσουμε μια περιοχή ελκτικότητας. Αυτό επιυγχάνεται με το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 7.5

Ας υποθέσουμε ότι η συνάρτηση $v(t,x)$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος 7.3. Εστω η παραμετρική οικογένεια συνόλων Δ_a

$$\Delta_a=\{x\in\Re^n:\ v(t,x)<a \quad \forall t\in T\}$$

όπου a είναι κάποιος θετικός αριθμός. Τότε η περιοχή

$$\Delta=\{x\in\Delta_{a^*}:\ (\dot{v}\,(t,x)_{(S)}<0 \quad \forall t\in T,\ x\in\Delta_{a^*}-\{0\})\}$$

όπου $a^*>0$, είναι περιοχή ασυμπτωτικής ευσταθείας της ισορροπίας $x=0$ του συστήματος S.

Σύμφωνα με το θεώρημα αυτό, για να έχουμε μία εκτίμηση της περιοχής ασυμπτωτικής ευσταθείας προσδιορίζουμε ένα θετικό αριθμό a^* για τον οποίο η

$\dot{v}(t,x)_{(\Sigma)}$ είναι αρνητικά ορισμένη στην περιοχή Δa^*. Τότε η Δa^* είναι περιοχή ασυμπτωτικής ευσταθείας της ισορροπίας $x=0$ του συστήματος Σ.

Παράδειγμα 7.9
Εστω το δυναμικό σύστημα

$$\begin{aligned}\dot{x}_1&=-2x_1+3x_1^3+x_1x_2^2\\ \dot{x}_2&=-3x_2+3x_1^3x_2+x_2^3\end{aligned}\tag{7.17}$$

Θεωρούμε την θετικά ορισμένη συνάρτηση $v(x)=x_1^2+x_2^2$. Τότε

$$\dot{v}(x)_{(6.17)}=[grad_x v(x)]^T f(x)=$$

$$=\begin{bmatrix}2x_1 & 2x_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2x_1+3x_1^3+x_1x_2^3\\ -3x_2+3x_1^2x_2+x_2^3\end{bmatrix}=$$

$$=2x_1(-2x_1+3x_1^3+x_1x_2^2)+2x_2(-3x_2+3x_1^3x_2+x_2^3)=$$

$$=2x_1^2(-2+3x_1^2+x_2^2)+2x_2^2(-2+3x_1^2+x_2^2)=$$

$$=2(x_1^2+x_2^2)(-2+3x_1^2+x_2^2)$$

Η $\dot{v}(x)_{(7.17)}$ είναι αρνητικά ορισμένη στην περιοχή

$$\Delta^*=\{x\in R^2 : 3x_1^2+x_2^2<2\}$$

Εστω η περιοχή

$$\Delta_a=\{x\in R^2: x_1^2+x_2^2<a\}\qquad a>0$$

Για την εκτίμηση της περιοχής ευσταθείας θα υπολογίσουμε την μέγιστη τιμή a^* της a για την οποία ισχύει $3x_1^2+x_2^2<2$ για κάθε $x\in\Delta_{a^*}$. Οι περιοχές Δ_a είναι κύκλοι η δε περιοχή Δ^* είναι το εσωτερικό μιας έλλειψης. Θα υπολογίσουμε την τιμήν a^* για την οποία η περιφέρεια του κύκλου Δa^* εφάπτεται στην έλλειψη που ορίζεται απο την Δ^*. Η περιφέρεια του Δa^* ορίζεται απο την εξίσωση

$$x_1^2+x_2^2=a$$

της δε έλλειψης απο την εξίσωση

$$3x_1^2+x_2^2=2$$

Αρα

$$2x_1dx_1+2x_2dx_2=0$$

και

$$6x_1dx_1+2x_2dx_2=0$$

Στο σημείο επαφής θα ισχύει

$$\frac{dx_2}{dx_1}=-\frac{x_1}{x_2}=-\frac{6x_1}{2x_2}$$

σχέση που ισχύει για $x_1=0$. Με $x_1^*=x_1=0$ προκύπτει ότι

$$x_2^{*2}=a \quad \text{και} \quad x_2^2=2$$

Αρα $a=2$. Ας εξετάσουμε τώρα αν η καμπύλη

$$x_1^{*2}+x_2^{*2}=2 \qquad (7.18)$$

εφάπτεται εσωτερικά ή εξωτερικά της ελλείψεως

$$3x_1^2+x_2^2=2$$

Εστω το σημείο $(\sqrt{2},0)$. Τότε ικανοποιείται η (7.18) αλλά

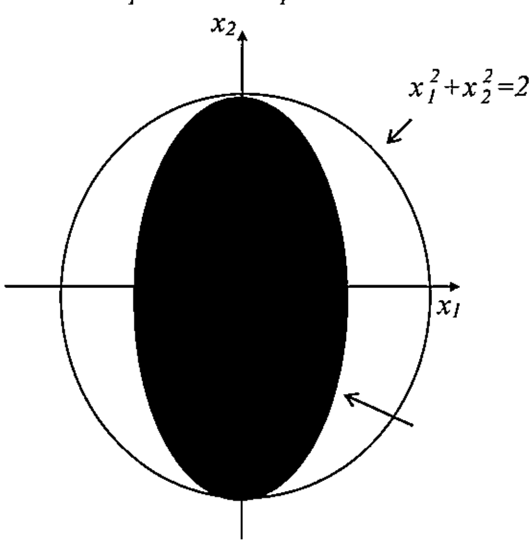
$$3\sqrt{2}+0>2,$$

άτοπο. Υποθέτουμε τώρα ότι $x_2=0$. Τότε θα πρέπει

$$\frac{dx_2}{dx_1}=-\frac{x_1}{x_2}=-\frac{6x_1}{2x_2}$$

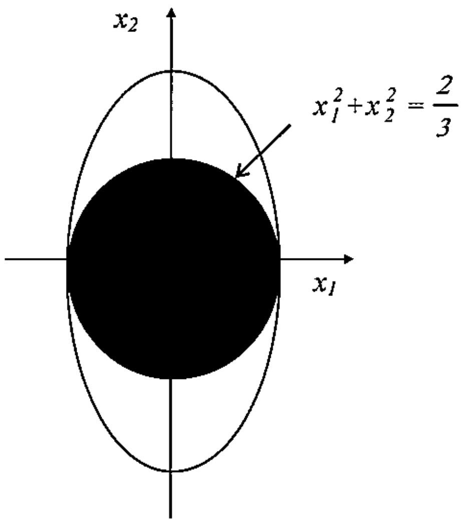
σχέση που ικανοποιείται για $x_2=0$. Με $x_2^*=x_2=0$ προκύπτει ότι

$$x_1^{*2}=a \qquad 3x_1^2=2$$



$$3x_1^2+x_2^2=2$$

Πρώτη περίπτωση



Δεύτερη περίπτωση

Αρα $a=\frac{2}{3}$. Εύκολα μπορεί να αποδειχθεί ότι η περιφέρεια με εξίσωση

$$x_1^2+x_2^2=\frac{2}{3}$$

εφάπτεται εσωτερικά της ελλείψεως με εξίσωση

$$3x_1^2+x_2^2=2$$

στα σημεία $(\sqrt{\frac{2}{3}},0)$ και $(-\sqrt{\frac{2}{3}},0)$. Αρα η περιοχή

$$\Delta_a=\{x\in \Re^n: x_1^2+x_2^2\leq\frac{2}{3}\}$$

είναι περιοχή ελκτικότητας της ισορροπίας $x=0$.

Για την απλή αυτή περίπτωση που θεωρήσαμε, μπορεί να καταλήξουμε στο ίδιο συμπέρασμα χρησιμοποιώντας απλούστερα μαθηματικά: Θέλουμε να προσδιορίσουμε την μέγιστη τιμή a για την οποία τα σημεία που ικανοποιούν την ανισότητα

$$x_1^2+x_2^2<a \tag{7.19}$$

να ικανοποιούν και την

$$3x_1^2+x_2^2<2 \tag{7.20}$$

Η (7.20) γίνεται

$$3(x_1^2+x_2^2)-2x_2^2<2$$

Αρα, αν η (7.19) ικανοποιείται τότε

$$3a-2x_2^2<2$$

Επειδή το x_2 μπορεί να ισούται με 0, αρκεί

Αρα

$$3a<2$$

$$a^*=\frac{2}{3}$$

και η περιοχή

$$\Delta_{a^*}=\{x\in\Re^2:\ x_1^2+x_2^2<\frac{2}{3}\ \}$$

είναι περιοχή ασυμπτωτικής ευστάθειας.

7.3.2. Η πρώτη μέθοδος του Lyapunov

Οπως είδαμε, η δεύτερη ή ευθεία μέθοδος του Lyapunov μας επιτρέπει όχι μόνο να αποφανθούμε άν η ισορροπία $x=0$ του συστήματος είναι ευσταθής αλλά να εκτιμήσουμε και την περιοχή ελκτικότητας. Οι συνθήκες όμως των θεωρημάτων Lyapunov είναι μόνο ικανές. Αν δηλαδή η ολική παράγωγος ως προς το υπό μελέτη σύστημα μίας θετικά ορισμένης συναρτήσεως δεν είναι ορισμένη τότε δεν μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η ισορροπία είναι ασταθής (αυτό γίνεται μόνο αν η ολική παράγωγος είναι θετικά ορισμένη). Πρέπει τότε να δοκιμάσουμε μια άλλη θετικά ορισμένη συνάρτηση. Αν όμως η ισορροπία είναι ασταθής θα αποτυγχάνουμε συνεχώς εκτός άν η ολική παράγωγος προκύψει θετικά ορισμένη.

Για να αποφύγουμε αυτές τις άσκοπες δοκιμές είναι καλύτερο να εξετάσουμε πρώτα άν η ισορροπία είναι ευσταθής με μία απλή μέθοδο και μετά να εφαρμόσουμε την ευθεία μέθοδο του Lyapunov για να προσδιορίσουμε την περιοχή ελκτικότητας. Εδώ πρέπει να σημειώσουμε ότι αν η ισορροπία $x=0$ ενός χρονικά αμετάβλητου συστήματος

$$S:\quad \dot{x}(t)=f(x(t))$$

είναι ευσταθής κατά Lyapunov ή ασυμπτωτικά ευσταθής τότε υπάρχει πάντοτε μια συνάρτηση Lyapunov (αντίστροφα θεωρήματα Lyapunov). Ενας απλός τρόπος για να αποφανθούμε άν η ισορροπία $x=0$ του συστήματος S είναι ασυμπτωτικά ευσταθής (άρα και ευσταθής κατα Lyapunov) δίδεται απο την *πρώτη μέθοδο του Lyapunov.*

Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f(x)$ μπορεί να αναπτυχθεί στην μορφή

$$f(x)=Ax+g(x)$$

όπου η συνάρτηση $g(x)$ ικανοποιεί την σχέση

$$\lim_{\|x\| \to 0} \frac{\| g(x) \|}{\| x \|} = 0 \tag{7.21}$$

Αυτό είναι πάντοτε δυνατό στην περίπτωση που η συνάρτηση $f(x)$ αναπτύσσεται σε σειρά Taylor. Τότε

$$f(x) = f(0) + Ax + g(x) \tag{7.22}$$

και η $g(x)$ ικανοποιεί την σχέση γιατί περιέχει όρους τάξεως μεγαλύτερης του 1. Η μήτρα A είναι η Ιακωβιανή της $f(x)$ στο σημείο $x=0$. Δηλαδή

$$A = \left. \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix} \right|_{x=0}$$

Απο την (7.22) προκύπτει ότι

$$f(x) = Ax + g(x)$$

γιατί, δεδομένου ότι η $x=0$ είναι κατάσταση ισορροπίας του συστήματος S, ισχύει $f(0)=0$. Το σύστημα

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \tag{7.23}$$

λέγεται *γραμμική προσέγγιση* του συστήματος Σ

Με τις προαναφερθείσες υποθέσεις *το πρώτο θεώρημα του Lyapunov* διατυπώνεται ως εξής:

Θεώρημα 7.6

Αν

$$f(x) = Ax + g(x)$$

και η συνάρτηση $g(x)$ ικανοποιεί την σχέση (7.21), τότε η ασυμπτωτική ευστάθεια της ισορροπίας $x=0$ του γραμμικού συστήματος $\dot{x}(t)=Ax(t)$ συνεπάγεται την ασυμπτωτική ευστάθεια της ισορροπίας $x=0$ του συστήματος Σ.

<u>Απόδειξη</u> Απο τις υποθέσεις η ισορροπία $x=0$ του γραμμικού συστήματος (7.23) είναι ασυμπτωτικά ευσταθής. Αρα υπάρχει συμμετρική θετικά ορισμένη συνάρτηση μήτρα P τέτοια ώστε

$$PA+A^TP=-I_n$$

όπου I_n είναι η μοναδιαία μήτρα. Θεωρούμε την θετικα ορισμένη συνάρτηση $v(x)=x^TPx$. Τότε

$$\dot{v}(x)_{(S)}=x^TPx+x^TPx=$$

$$=f(x)^TPx+x^TPf(x)=$$

$$=(x^TA^T+g(x)^T)Px+x^TP(Ax+g(x))=$$

$$=x^TA^TPx+x^TPAx+g(x)^TPx+x^TPg(x)=$$

$$=-x^Tx+g(x)^TPx+x^TPg(x)$$

Επειδή συνάρτηση $g(x)$ ικανοποιεί την συνθήκη (7.21), υπάρχει ένας θετικός αριθμός ε τέτοιος ώστε

$$g(x)^TPx+x^TPg(x)<x^Tx$$

για κάθε $x\in\Re^n$ τέτοιο ώστε $||x||=(x^Tx)<\varepsilon$ και $x\neq 0$. Συνεπώς

$$-x^Tx+g(x)^TPx+x^TPg(x)<0$$

για κάθε $x\in\Re^n$ $||x||<\varepsilon$, $x\neq 0$ και

$$-x^Tx+g(x)^TPx+x^TPg(x)=0$$

για $x=0$, δηλαδή η $\dot{v}(x)_{(S)}$ είναι αρνητικά ορισμένη στην περιοχή

$$\Delta=\{x\in R^n: x^Tx<\varepsilon^2\}$$

Αρα αν ικανοποιούνται οι προαναφερθείσες υποθέσεις η ισορροπία $x=0$ του συστήματος S* είναι ασυμπτωτικά ευσταθής..

Απο την απόδειξη του θεωρήματος προκύπτει ότι αν η γραμμική προσέγγιση $\dot{x}=Ax$ του συστήματος $\dot{x}=f(x)$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθής τότε η θετική ορισμένη συναρτηση P που ικανοποιεί την εξίσωση Lyapunov

$$PA+A^TP=-I_n$$

(η γενικότερα $PA+A^TP=-Q$) είναι συνάρτηση Lyapunov άρα μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την εκτίμηση της περιοχής ασυμπτωτικής ευσταθείας. Εξ' άλλου με όμοιο τρόπο μπορεί να αποδειχθεί ότι αν η μήτρα A είναι ασταθής τότε ότι και η ισορροπία $x=0$ του συστήματος S είναι ασταθής. Τέλος αν κάποια από τις ιδιοτιμές της μήτρας A έχει μηδενικό, πραγματικό μέρος, τότε η ευστάθεια ή αστάθεια του μη γραμμικού συστήματος S εξαρτάται από την μορφή της συνάρτησης $g(x)$.

Παράδειγμα 7.10
Εστω το σύστημα

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -3x_1e^{-x_1}+2x_1x_2+3x_1^2+x_2 \\ \dot{x}_2 &= -2\sin x_2-2x_1+3x_1x_2^2 \end{aligned} \tag{7.24}$$

Προφανώς η κατάσταση $x=0$ είναι κατάσταση ισορροπίας. Θα προσδιορίσουμε την γραμμική προσέγγιση του συστήματος. Είναι

$$A=\left.\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1(x)}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} \end{bmatrix}\right|_{x=0}$$

Αρα

$$A=\left.\begin{bmatrix} -3e^{-x_1}+3x_1e^{-x_1}+2x_2+6x_1 & 2x_1+1 \\ -2+3x_2^2 & -4\cos x_2+6x_1x_2 \end{bmatrix}\right|_{x=0}$$

δηλαδή

$$A=\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$$

Η ισορροπία $x=0$ του συστήματος $\dot{x}=Ax$ ειναι ασυμπτωτικά ευσταθής γιατί οι ιδιοτιμές $\lambda_1(A)=-3,5+7j$ και $\lambda_2(A)=-3,5-7j$ της A έχουν πραγματικά μέρος αρνητικό. Αρα, σύμφωνα με το θεώρημα 7.6, και η ισορροπία $x=0$ του μη γραμμικού συστήματος είναι ασυμπτωτικά ευσταθής.

Τώρα που βεβαιωθήκαμε για την ασυμπτωτική ευστάθεια της ισορροπίας $x=0$ μπορούμε νά έχουμε και μια εκτίμηση της περιοχής ασυμπτωτικής ευσταθείας. Επειδή η μήτρα A είναι ευσταθής, δηλ. $Re[\lambda_i(A)]<0$, υπάρχουν δύο συμμετρικές θετικά ορισμένες μήτρες P και Q τέτοιες ώστε

$$PA+A^TP=-Q$$

Εύκολα μπορεί να επαληθευθεί ότι ένα τέτοιο ζεύγος είναι οι μήτρες

$$P=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και } Q=\begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Θεωρώντας την θετικά ορισμένη συνάρτηση

$$v(x)=x^TPx=x_1^2+x_2^2$$

έχουμε

$$\dot{v}(x)_{(6.24)}=-3x_1^2e^{-x_1}+4x_1^2x_2+6x_1^3+2x_1x_2-$$

$$-4x_2\sin x_2-4x_1x_2+6x_1x_2^3$$

Με την βοήθεια υπολογιστή μπορούμε να βρούμε δύο θετικούς αριθμούς a_1 και a_2 τέτοιους ώστε η $\dot{v}(x)_{(6.24)}$ να είναι αρνητικά ορισμένη στην περιοχή

$$\Delta=\{x\in\Re^2: |x_1|<a_1, |x_2|<a_2\}$$

Τότε η περιοχή

$$\Delta a^*=\{x\in\Re^2: x_1^2+x_2^2<a^*\}$$

όπου $a^*=min(a_1^2,a_2^2)$ είναι μία περιοχή ασυμπτωτικής ευστάθειας της ισορροπίας $x=0$ του συστήματος (7.24)