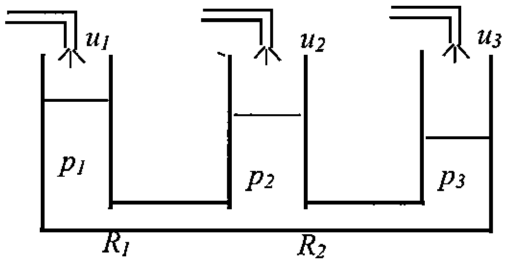
5

Ελεγξιμότητα και παρατηρησιμότητα

Οπως έχει ήδη αναφερθεί, το πρόβλημα του ελέγχου συνίσταται στον προσδιορισμό της κατάλληλης εισόδου ώστε η κατάσταση του συστήματος, κατά συνέπεια και η έξοδός του, να έχει την επιθυμητή συμπεριφορά. Πριν όμως ο μηχανικός ελέγχου αρχίσει να σχεδιάζει την διάταξη που θα παράγει την κατάλληλη είσοδο ελέγχου είναι προτιμότερο να εξετάσει αν είναι δυνατόν να επιτευχθεί η επιθυμητή συμπεριφορά του συστήματος. Μερική απάντηση στο ερώτημα αν υπάρχει ή όχι ο κατάλληλος νόμος ελέγχου δίνει η διερεύνηση αν το σύστημα είναι ελέγξιμο ή όχι. Εξ' άλλου, αν για την υλοποίηση του νόμου ελέγχου είναι απαραίτητη η γνώση των μεταβλητών καταστάσεως θα πρέπει να σχεδιασθεί η κατάλληλη διάταξη που θα προσδιορίζει τις τιμές των μεταβλητών αυτών. Η σχεδίαση μίας τέτοιας διάταξης είναι εφικτή αν το σύστημα είναι παρατηρήσιμο. Η μελέτη των ιδιοτήτων της *ελεγξιμότητας* (controllability) και της *παρατηρησιμότητας* (observability) για γραμμικά συστήματα είναι το αντικείμενο του κεφαλαίου αυτού.

5.1 Ελεγξιμότητα

Στο Σχήμα 5.1 απεικονίζεται ένα σύστημα τριών διασυνδεδεμένων δεξαμενών. Η στάθμη του υγρού των δεξαμενών ρυθμίζεται από τρείς αντλίες οι οποίες έχουν την δυνατότητα όχι μόνο να προσθέτουν αλλά και να αφαιρούν υγρό από τις δεξαμενές.



Σχήμα 5.1: Σύστημα τριών διασυνδεδεμένων δεξαμενων

Το πρόβλημα είναι να εξετάσουμε αν είναι δυνατόν ξεκινώντας από οποιαδήποτε αρχικές τιμές των σταθμών των δεξαμενών να καταλήξουμε σε πεπερασμένο χρόνο σε κάποιες επιθυμητές τελικές τιμές μέσω μίας κατάλληλης πολιτικής στις παροχές των αντλιών. Διαισθητικά αναμένουμε ότι αυτό είναι δυνατόν όταν το σύστημα ελέγχεται και από τις τρείς αντλίες. Η απάντηση όμως δεν είναι τόσο προφανής αν έχουμε στην διάθεσή μας μόνο δύο από τις αντλίες και είναι ακόμη λιγώτερο προφανής αν διαθέτουμε μία μόνο αντλία. Είναι επίσης δυνατόν η επιτευξη των ανωτέρω να ειναι εφικτή για κάποιες αρχικές τιμές σταθμών αλλά να μη είναι για κάποιες άλλες. Ολα αυτά τα ερωτήματα σχετίζονται με τις έννοιες της ελεγξιμότητας οι οποίες αποτελούν το αντικείμενο αυτού του τμήματος του κεφαλαίου.

Εστω ένα δυναμικό σύστημα Σ με είσοδο $u \in \Re^m$, έξοδο $y \in \Re^p$ και κατάσταση $x \in \Re^n$

Ορισμός 5.1

Η κατάσταση $x_0 \in \Re^n$ του συστήματος Σ είναι *ελέγξιμη την χρονική στιγμή* τ_0 αν δοθείσης μίας οποιασδήποτε άλλης κατάστασης $x^* \in \Re^n$ υπάρχει πεπερασμένο $\tau^*>\tau_0$ και μια είσοδος $u_{[\tau_0,\tau^*]}$ που μεταφέρει την $x(\tau_0)=x_0$ στην $x(\tau^*)=x^*$.

Σύμφωνα με τον ορισμό αυτόν, μία κατάσταση είναι ελέγξιμη αν υπάρχει κατάλληλος νόμος ελέγχου ώστε σε πεπερασμένο χρόνο να μπορεί το σύστημα να μεταβεί από την εν λόγω κατάσταση σε οποιαδήποτε άλλη. Επειδή η συμπεριφορά ενός συστήματος μπορεί να αλλάζει με τον χρόνο, είναι δυνατόν μία κατάσταση να είναι ελέγξιμη μία χρονική στιγμή αλλά να μην έχει την ιδιότητα αυτή μία άλλη χρονική στιγμή. Στην περίπτωση που η ελεγξιμότητα μίας κατάστασης δεν εξαρτάται από τον χρόνο τότε η λέμε απλώς ότι η εν λόγω κατάσταση είναι ελέγξιμη:

Ορισμός 5.2

Η κατάσταση $x_0\in\Re^n$ του συστήματος Σ είναι *ελέγξιμη* αν δοθεισών μίας οποιασδήποτε χρονικής στιγμής $\tau_0\in T$ και μίας οποιασδήποτε άλλης κατάστασης $x^*\in\Re^n$ υπάρχει πεπερασμένο $\tau^*>\tau_0$ και μία είσοδος $u_{[\tau_0,\tau^*]}$ που μεταφέρει την $x(\tau_0)=x_0$ στην $x(\tau^*)=x^*$.

Είναι φανερό ότι αν μία κατάσταση ενός χρονικώς αμετάβλητου συστήματος είναι ελέγξιμη μία χρονική στιγμή $\tau_0\in T$, τότε είναι ελέγξιμη και σε κάθε άλλη χρονική στιγμή.

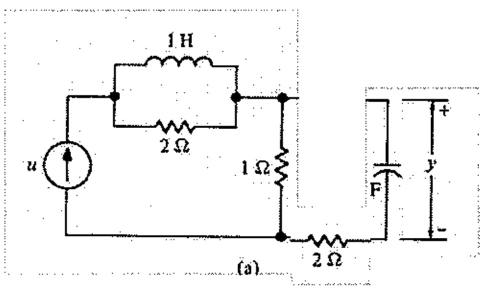
Οι προηγούμενοι ορισμοί αναφέρονται σε ιδιότητες μίας συγκεκριμένης κατάστασης και όχι στο σύστημα. Μπορεί όμως να ορισθεί και ελέγξιμότητα του συστήματος:

Ορισμός 5.3

Το σύστημα Σ είναι *ελέγξιμο ως προς την κατάσταση την χρονική στιγμή* τ_0 (state controllable) αν όλες οι καταστάσεις του είναι ελέγξιμες.

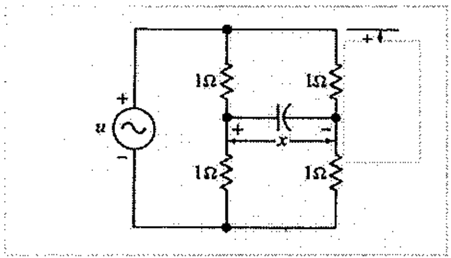
5.2 Συνθήκες ελεγξιμότητας

Στο Σχήμα 5.2 απεικονίζεται ένα γραμμικό κύκλωμα με



Σχήμα 5.2: Ενα λόγω δομής μη ελεξιμο σύστημα

Είναι φανερό ότι *λόγω της δομής* του κυκλώματος η τιμή της τάσεως στον πυκνωτή F δεν επηρεάζεται από την κυματομορφή της πηγής ρεύματος. Συνεπώς καμμία αρχική κατάσταση δεν είναι ελέγξιμη. Ομως η ελεγξιμότητα του συστήματος δεν είναι απλώς μία δομική ιδιότητα του. Αυτό φαίνεται στο κύκλωμα του Σχήματος 5.3 όπου η ελεγξιμότητα εξαρτάται όχι από την δομή του κυκλώματος, αλλά από τις τιμές των παραμέτρων του. Είναι εύκολο να διαπιστωθεί ότι άν ισχύει η σχέση $R_1R_4 = R_2R_3$ τότε μία μηδενική αρχική τιμή της τάσης του πυκνωτή θα παραμείνει μηδενική για οποιαδήποτε κυματομορφή της πηγής γιατί το κύκλωμα αποτελεί μία γέφυρα σε ισορροπία! Συνεπώς, η ελεγξιμότητα είναι κάτι παραπάνω από μία δομική ιδιότητα του συστήματος. Στις επόμενες παραγράφους θα αναπτύξουμε κριτήρια ελεγξιμότητας για γραμμικά συστήματα. Θα προηγηθεί η μελέτη συστημάτων διακριτού χρόνου γιατί είναι ευκολώτερη η ερμηνεία των κριτηρίων. Είναι αξιοσημείωτο το γεγονός οτι τα κριτήρια αυτά έχουν την ίδια μορφή τόσο για τα συστήματα συνεχούς όσο και για τα διακριτού χρόνου.



Σχήμα 5.3: Ενα, λόγω των τιμών των παραμέτρων του, μη ελέγξιμο σύστημα

5.2.1 Συστήματα διακριτού χρόνου

Θεωρούμε κατ'αρχήν γραμμικά χρονικώς αμετάβλητα συστήματα που περιγράφονται από τις καταστατικές εξισώσεις

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \tag{5.1}$$

$$y(k) = Cx(k) + Du(k) \tag{5.2}$$

Θεώρημα 5.1
Το σύστημα (5.1)-(5.2) είναι ελέγξιμο ως προς την κατάσταση αν και μόνο αν ο βαθμός της *μήτρας ελεγξιμότητας* (controllability matrix)

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

είναι ίσος με n.

Απόδειξη:

Επειδή το σύστημα είναι χρονικώς αμετάβλητο αρκεί να μελετήσουμε την ελεγξιμότητά του την χρονική στιγμή $k_0=0$. Για μία αρχική κατάσταση $x(0)=x_0$ η λύση της πρώτης εξισώσεως δίνεται απο την σχέση

$$x(k) = A^k x_0 + \sum_{l=0}^{k-1} A^{k-l-1} Bu(l)$$

για $k>k_0$. Επειδή

$$\sum_{l=0}^{k-1} A^{k-l-1} Bu(l) = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{k-1}B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(k-1) \\ u(k-2) \\ u(k-3) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix}$$

η τελευταία σχέση γράφεται ισοδυνάμως υπό την μορφή

$$x(k) = A^k x_0 + \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{k-1}B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(k-1) \\ u(k-2) \\ u(k-3) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix}$$

Ικανό: Αν

$$rank\begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = n$$

τότε για κάθε $x \in \mathfrak{R}^n$ υπάρχουν $u(0)$, $u(1)$, ... , $u(n-1)$ που αποτελούν λύση της εξισώσεως

$$x = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(n-1) \\ u(n-2) \\ u(n-3) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix} \tag{5.3}$$

Αρα, δοθεισών δύο καταστάσεων x^* και x_0 υπάρχει πάντοτε νόμος ελέγχου *u(0), u(1), ... , u(n-1)* τέτοιος ώστε να επαληθεύεται η σχέση

$$x = x^* - A^n x_0 = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(n-1) \\ u(n-2) \\ u(n-3) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix} \tag{5.4}$$

ή ισοδυνάμως η σχέση

$$x^* = A^n x_0 + \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(n-1) \\ u(n-2) \\ u(n-3) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix} \tag{5.5}$$

Από την τελευταία σχέση όμως προκύπτει ότι αν δοθούν δύο καταστάσεις x^* και x_0 υπάρχει πάντοτε νόμος ελέγχου που σε πεπερασμένο χρονικό διάστημα n βημάτων να μεταφέρει το σύστημα από την κατάσταση x_0 στην x^*. Συνεπώς το σύστημα είναι (πλήρως) ελέγξιμο ως προς την κατάσταση

Αναγκαίο:

Αν

$$rank\begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = n^* < n$$

τότε θα υπήρχε $x \in R^n$ για το οποίο εξίσωση (5.3) δεν θα είχε λύση. Αυτό σημαίνει ότι τότε θα υπήρχαν καταστάσεις x^* τέτοιες ώστε η εξίσωση (5.4) και κατά συνέπεια και η (5.5) δεν θα είχαν λύση ως προς *u(0), u(1), ... , u(n-1)*. Με άλλα λόγια, θα υπήρχαν καταστάσεις x^* για τις οποίες δεν θα υπήρχε έλεγχος που θα μπορούσε να μεταφέρει σε n βήματα το σύστημα από την x_0 στις x^*. Εξ'άλλου επειδή $A \in \Re^{n \times n}$ θα ισχύει η σχέση

$$rank\begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{k-1}B \end{bmatrix} = rank\begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} < n$$

για καάθε k. Συνεπώς η μεταφορά δεν θα ήταν εφικτή ούτε σε περισσότερα ούτε σε λιγώτερα από n βήματα. Αρα η

$$rank\begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = n$$

είναι αναγκαία συνθήκη για την ελεγξιμότητα του συστήματος.

Παράδειγμα 5.1

Εστω το σύστημα διακριτού χρόνου που περιγράφεται από τις καταστατικές εξισώσεις

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(k)$$

Αν

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

τότε

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Συνεπώς η μήτρα ελεγξιμότητας

$$C = [B \; AB]$$

είναι

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Επειδή η ορίζουσα της υπομήτρας

$$C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$detC_1=-2$, δηλαδή είναι διάφορη του μηδενός, το σύστημα είναι πλήρως ελέγξιμο.

Η ελεγξιμότητα ενός χρονικώς αμετάβλητου γραμμικού συστήματος διακριτού χρόνου συνδέεται και με την *ιδιοδομή* (eigenstructure) του συστήματος, δηλαδή με τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα της μήτρας A. Αυτό αποδεικνύεται στο παρακάτω θεώρημα στο οποίο γίνεται χρήση της έννοιας της ελέγξιμης ιδιοτιμής.

Ορισμός 5.4

Μία ιδιοτιμή λ_i της μήτρας A είναι *ελεγξίμη* αν το αντίστοιχο αριστερό ιδιοδιάνυσμα v_i^T ικανοποιεί την σχέση

$$v_i^T B \neq 0 \tag{5.6}$$

Θεώρημα 5.2

Το σύστημα (5.1)-(5.2) είναι ελέγξιμο αν και μόνο αν όλες ιδιοτιμές της μήτρας A είναι ελέγξιμες.

Απόδειξη:

Αναγκαίο: Ας υποθέσουμε ότι το σύστημα είναι ελέγξιμο αλλά υπάρχει ιδιοτιμή λ_i της μήτρας A για την οποία το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα v_i^T δεν ικανοποεί την σχέση *(5.6)*. Τότε θα ισχύουν οι σχέσεις

$$\begin{aligned} v_i^T A &= \lambda_i v_i^T \\ v_i^T B &= 0 \end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζοντας από τα δεξιά την πρώτη σχέση με A^k $k=0,1,..,n-2$ προκύπτουν οι σχέσεις

$$\begin{aligned} v_i^T A &= \lambda_i v_i^T \\ v_i^T A^2 &= \lambda_i v_i^T A = \lambda_i^2 v_i^T \\ &\vdots \\ v_i^T A^{n-1} &= \lambda_i v_i^T A^{n-2} = \lambda_i^{n-1} v_i^T \end{aligned}$$

Τέλος, πολλαπλασιάζοντας τις τελευταίες από τα αριστερά επί την μήτρα B καταλήγουμε στις σχέσεις

$$\begin{aligned} v_i^T AB &= \lambda_i v_i^T B = 0 \\ v_i^T A^2 B &= \lambda_i^2 v_i^T B = 0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$v_i^T A^{n-1} B = \lambda_i^{n-1} v_i^T B = 0$$

από τις οποίες προκύπτει ότι

$$v_i^T \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = 0$$

Αυτό όμως σημαίνει ότι το n-διάστατο μη μηδενικό διάνυσμα v_i είναι ορθογώνιο προς όλες τις στήλες την μήτρας ελεγξιμότητας $\begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$. Συνεπώς $rank\begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} < n$, συνθήκη που αντιφάσκει προς την υπόθεση ότι το σύστημα είναι πλήρως ελέγξιμο. Αρα η σχέση (5.6) ικανοποιείται για κάθε ιδιοτιμή λ_i της μήτρας A και το αντίστοιχο αριστερό ιδιοδιάνυσμα

Ικανό: Ας υποθέσουμε ότι $v_i^T B \neq 0$ $i=1,2,\ldots,n$ αλλά το σύστημα δεν ειναι (πλήρως) ελέγξιμο. Τότε θα υπάρχουν το πολύ n-1 στήλες της μήτρας ελεγξιμότητας

$$\begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

που θα είναι γραμμικώς ανεξάρτητες. Αυτό όμως σημαίνει ότι υπάρχει ένας γραμμικός συνδυασμός

$$z^T = a_1 v_1^T + a_2 v_2^T + \ldots + a_n v_n^T$$

των n γραμμικώς ανεξαρτήτων διανυσμάτων $v_1^T, v_2^T, \ldots v_n^T$ που θα ήταν κάθετος σε όλες τις στήλες της μήτρας ελεγξιμότητας, δηλαδή θα ίσχυε

$$z^T \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = 0$$

Τότε όμως θα έπρεπε οι στήλες της μήτρας B να είναι κάθετες προς όλα τα n γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα $v_1^T, v_2^T, \ldots v_n^T$, γεγονός που αντίκειται προς την υπόθεση ότι $v_i^T B \neq 0$.

Παράδειγμα 5.2

Ας θεωρήσουμε πάλι το σύστημα του παραδείγματος 5.1. Οι ιδιοτιμές της μήτρας A είναι

$$\lambda_1 = -1 + \sqrt{3}$$
$$\lambda_2 = -1 - \sqrt{3}$$

τα δε αντίστοιχα αριστερά ιδιοδιανύσματα

$$v_1^T = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}5 + 0{,}5\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$v_2^T = \begin{bmatrix} -1-\sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}$$

Επειδή

$$v_1^T B = \begin{bmatrix} 1 & 0,5+0,5\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+\sqrt{3} & 1 \end{bmatrix} \neq 0$$

$$v_2^T B = \begin{bmatrix} -1-\sqrt{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1-\sqrt{3} \end{bmatrix} \neq 0$$

το σύστημα είναι πλήρως ελέγξιμο

Ας δούμε τώρα τι συμβαίνει όταν ο βαθμός της μήτρας ελεγξιμότητας είναι μικρότερος του n. Στην ακραία περίπτωση που $rank C=0$, όλα τα στοιχεία της μήτρας ελεγξιμότητας είναι μηδενικά που σημαίνει ότι $B=0$. Τότε θα ισχύει σχέση

$$x(t;x_0) = e^{At}x_0$$

Είναι φανερό ότι στην περίπτωση αυτή ο έλεγχος δεν επηρεάζει την συμπεριφορά του συστήματος και κατά συνέπεια καμμία αρχική κατάσταση δεν είναι ελέγξιμη. Οπως φαίνεται από την αποδείξη του προηγούμενου θεωρήματος, στις ενδιάμεσες περιπτώσεις όπου $0< rank\ \mathbf{C} <n$ υπάρχουν καταστάσεις που είναι ελέγξιμες ενώ άλλες δεν είναι. Λέμε τότε ότι το σύστημα είναι μερικώς ελέγξιμο. Ο βαθμός της μήτρας ελεγξιμότητας ονομάζεται *δείκτης ελεγξιμότητας* (controllability index) του συστήματος και εκφράζει την διάσταση του υπόχωρου του χώρου καταστάσεως του συστήματος στον οποίο ανήκουν οι ελέγξιμες καταστάσεις του συστήματος (βλέπε άσκηση 5.1).

Θεωρούμε τώρα γραμμικά χρονικώς μεταβαλλόμενα συστήματα που περιγράφονται από καταστατικές εξισώσεις της μορφής

$$x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k) \tag{5.7}$$

$$y(k) = C(k)x(k) + D(k)u(k) \tag{5.8}$$

Συνθήκες ελεγξιμότητας τέτοιων συστημάτων δίνονται στο παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 5.3

Το σύστημα (5.7)-(5.8) είναι ελέγξιμο ως προς την κατάσταση την χρονική στιγμή k_0 αν και μόνο αν υπάρχει μια πεπερασμένη στιγμή $k^*>k_0$ τέτοια ώστε οι n γραμμές της μήτρας $\Phi(k_0,.)B(.)$ να είναι γραμμικώς ανεξάρτητες στο διάστημα $[k_0,k^*]$.

Η απόδειξη του θεωρήματος ακολουθεί παρόμοια βήματα με εκείνα του θεωρήματος 5.1

5.2.2 Συστήματα συνεχούς χρόνου

Θεωρούμε χρονικώς μεταβαλλόμενα συστήματα συνεχούς χρόνου που περιγράφονται απο τις εξισώσεις

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \tag{5.9}$$

$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t) \tag{5.10}$$

με $x \in \Re^n$, $y \in \Re^p$, $u \in \Re^{m}$ $t \in T$ και $u(t) \in \Omega$ όπου Ω είναι το σύνολο όλων των συναρτήσεων $u{:}T \to \Re^m$ για τις οποίες οι καταστατικές εξισώσεις έχουν λύση για κάθε αρχική κατάσταση $x(t_0) = x_0 \in \Re^n$.

Η λύση της πρώτης εξισώσεως για μια αρχική συνθήκη $x(t_0)=x_0$ δίνεται απο την σχέση

$$x(t) = \Phi(t,t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau =$$

$$= \Phi(t,t_0)\left[x_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau\right]$$

όπου $\Phi(t,t_0)$ είναι η μήτρα διελεύσεως του συστήματος. Από την σχέση αυτή και λαμβάνοντας υπ'όψιν όσα αναφέρθησαν για την περίπτωση των συστημάτων διακριτού χρόνου, γίνεται φανερό ότι το σύστημα θα είναι πλήρως ελέγξιμο μία χρονική στιγμή t_0 αν και μόνο αν το ολοκλήρωμα

$$\int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau$$

μπορεί να πάρει μία οποιαδήποτε τιμή για κάποια κατάλληλη πεπερασμένη τιμή του t. Αυτό εκφραζεται στο παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 5.4

Το σύστημα Σ είναι ελέγξιμο την χρονική στιγμή t_0 αν και μόνο αν υπάρχει μια πεπερασμένη χρονική στιγμή $t^*>t_0$ τέτοια ώστε οι n γραμμές της μήτρας $\Phi(t_0,.)B(.)$ να είναι γραμμικώς ανεξάρτητες στο διάστημα $[t_0,t^*]$.

Απόδειξη

Ικανό: Θα αποδείξουμε ότι αν οι n γραμμές της μήτρας $\Phi(t_0,.)B(.)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες στο διάστημα $[t_0,t^*]$ τότε δοθεισών δύο καταστάσεων x_0 και x^* υπάρχει έλεγχος $u_{[t_0,t^*]}$ που μεταφέρει την κατάσταση $x(t_0)=x_0$ στην $x(t^*)=x^*$.

Επειδή οι n γραμμές της $\Phi(t_0,.)B(.)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες η ορίζουσα της χρονικώς αμετάβλητης μήτρας

$$W(t_0,t)=\int_{t_0}^{t}\Phi(t_0,\tau)B(\tau)B^T(\tau)\Phi^T(t_0,\tau)d\tau$$

είναι διάφορη του μηδενός (Η ορίζουσα της $W(t_0,t_1)$ ονομάζεται ορίζουσα Gram των n γραμμών της $\Phi(t_0,.)B(.)$. Ας θεωρήσουμε τώρα τον νόμο ελέγχου

$$u(t)=-B^T(t)\Phi^T(t_0,t)W^{-1}(t_0,t^*)[x_0-\Phi(t_0,t^*)x^*]$$

Τότε

$$x(t)=\Phi(t,t_0)[x_0-\int_{t_0}^{t}\Phi\ (t_0,\tau)B(\tau)B^T(\tau)\Phi^T(t_0,\tau)W^{-1}(t_0,t^*)\cdot[x_0-\Phi(t_0,t^*)x^*]\ d\tau\,]$$

Αρα

$$x(t^*)=\Phi(t^*,t_0)[x_0-\int_{t_0}^{t^*}\Phi\ (t_0,\tau)B(\tau)B^T(\tau)\Phi^T(t_0,\tau)W^{-1}(t_0,t^*)\cdot[x_0-\Phi(t_0,t^*)x^*]\ d\tau\,]=$$

$$=\Phi(t^*,t_0)[x_0-W(t_0,t^*)W^{-1}(t_0,t^*)[x_0-\Phi(t_0,t^*)x^*]=$$

$$=\Phi(t^*,t_0)[x_0-x_0+\Phi(t_0,t^*)x^*]=$$

$$=\Phi(t^*,t_0)\Phi(t_0,t^*)x^*=$$

$$=x^*.$$

Αναγκαίο:

Θα αποδείξουμε ότι αν το σύστημα είναι ελέγξιμο την χρονική στιγμή t_0 τότε οι n γραμμές της μήτρας $\Phi(t_0,.)B(.)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες. Ας υποθέσουμε το αντίθετο, δηλαδή ότι το σύστημα είναι ελέγξιμο την χρονική στιγμή t_0 αλλά οι γραμμές της $\Phi(t_0,.)(B.)$ δεν είναι γραμμικώς ανεξάρτητες. Τότε θα υπάρχει ένα μη μηδενικό διάνυσμα $a=[a_1\ a_2 \ldots a_n]^T$ τέτοιο ώστε

$$a^T \Phi(t_0,t)B(t)=0 \qquad \forall t \in [t_0,t^*]$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι, θέλουμε να μεταφέρουμε την κατάσταση $x_0=a$ στην κατάσταση $x^*=0$. Τότε θα υπάρχει χρονική στιγμή $t^*>t_0$ και νόμος ελέγχου $u_{[t_0,t^*]}$ τέτοια ώστε

$$x^*= \Phi(t^*,t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t^*}\Phi\ (t^*,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau$$

Πολλαπλασιάζοντας τηντελευταία σχέση απο αριστερά με την $\Phi^{-1}(t^*,t_0)=\Phi(t_0,t^*)$ έχουμε

$$\Phi(t^*,t_0)x^*=\Phi(t_0,t^*)\Phi(t^*,t_0)a+ \int_{t_0}^{t^*}\Phi\ (t_0,t^*)\Phi(t^*,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau=$$

$$=a+ \int_{t_0}^{t^*}\Phi\ (t_0,\ \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau$$

Πολλαπλασιάζοντας τώρα την τελευταία σχέση απο αριστερά με το a^T έχουμε

$$a^T \Phi(t^*,t_0)x^*=a^Ta+ \int_{t_0}^{t^*}a^T\Phi\ (t_0,\ \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau$$

Επειδή υποθέσαμε ότι $x^*=0$ και $a^T\Phi(t_0,t)=0$ για κάθε $t\in[t_0,t^*]$, από την προηγούμενη ισότητα έπεται ότι

$$0=a^Ta+0$$

σχέση που έρχεται σε αντίθεση με την υπόθεση ότι το διάνυσμα a είναι μη μηδενικό. Συνεπώς αν το σύστημα είναι ελέγξιμο την χρονική στιγμή t_0 δεν υπάρχει $a\in\Re^n$ μη μηδενικό τέτοιο ώστε

$$a^T\Phi(t_0,t)B(t)=0 \qquad \forall t\in [t_0,t^*]$$

άρα οι γραμμές της $\Phi(t_0,.)B(.)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.

□

Ας θεωρήσουμε τώρα ένα γραμμικό χρονικώς αμετάβλητο σύστημα συνεχούς χρόνου Σ^* που περιγράφεται από τις καταστατικές εξισώσεις

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t) \tag{5.11}$$

$$y(t)=Cx(t)+Du(t) \tag{5.12}$$

Σύμφωνα με το Θεώρημα 5.4 το σύστημα είναι ελέγξιμο την χρονική στιγμή t_0 άν οι n γραμμές της μήτρας $\Phi(t_0,.)B(.)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες. Στην περίπτωση ενός χρονικώς αμετάβλητου συστήματος η συνθήκη αυτή ικανοποιείται άν οι n γραμμές της μήτρας

$$e^{A(t^*-t_0)}B$$

είναι γραμμικώς ανεξάρτητες για κάποια πεπερασμένη τιμή της διαφοράς $t=t^*-t_0$ δηλαδή άν οι n γραμμές της μήτρας $e^{At}B$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες. Αλλά

$$e^{At}B=(I_n+At+\frac{A^2t^2}{2!}+\ldots+\frac{A^nt^n}{n!}+\ldots)B$$

$$=B+ABt+\frac{A^2Bt^2}{2!}+\ldots+\frac{A^nBt^n}{n!}+\ldots$$

Επειδή οι μήτρες A^jB για $j>n+1$ είναι γραμμικώς εξαρτημένες απο τις $B, AB, \ldots, A^{n-1}B$ έπεται οτι οι n γραμμές της $e^{At}B$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες άν και μόνο άν

$$rank[B\ AB \ldots A^{n-1}B]=n$$

Συνεπώς:

Θεώρημα 5.5

Το χρονικώς αμετάβλητο σύστημα συνεχούς χρόνου (5.11)-(5.12) είναι ελέγξιμο αν και μόνο αν

$$rank\begin{bmatrix}B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B\end{bmatrix}=n$$

Η μήτρα

$$C=\begin{bmatrix}B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B\end{bmatrix}$$

ονομάζεται *μήτρα ελεγξιμότητας* (controllability matrix) του συστήματος (5.11)-(5.12).

Παράδειγμα 5.3

Εστω το σύστημα που περιγράφεται από την εξίσωση

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 4 \end{bmatrix} u$$

Η μήτρα ελεγξιμότητας του συστήματος είναι η

$$C = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 20 & 10 \\ 8 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Θεωρούμε την ακόλουθη υπομήτρα της μήτρας ελεγξιμότητητας C:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$$

Τότε $\det A_1 = 0$. Αν τώρα θεωρήσουμε την υπομήτρα

$$A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 20 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}$$

τότε $\det A_2 = -156 \neq 0$. Αρα

$$rank\mathbf{C} = rank\begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = 2$$

και συνεπώς το σύστημα είναι πλήρως ελέγξιμο.

Παράδειγμα 5.4

Εστω τώρα το σύστημα που περιγράφεται από την εξίσωση

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 14 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

Η μήτρα ελεγξιμότητας του συστήματος είναι η

$$C = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 10 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

και επειδή $det\mathbf{C}=0$ έπεται ότι $rank\mathbf{C}<2$, συνεπώς το σύστημα δεν είναι ελέγξιμο.

Οπως στην περίπτωση των συστημάτων διακριτού χρόνου, η ελεγξιμότητα των χρονικώς αμετάβλητων συστημάτων συνεχούς χρόνου συνδέεται και με την *ιδιοδομή* (eigenstructure) του συστήματος. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό 5.4 των ελέγξιμων ιδιοτιμών, αποδεικνύεται το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 5.6

Το γραμμικό σύστημα συνεχούς (5.11)-(5.12) είναι ελέγξιμο αν και μόνο αν όλες ιδιοτιμές της μήτρας A είναι ελέγξιμες

5.3 Παρατηρησιμότητα

Η έννοια της παρατηρησιμότητας (observability) ενός συστήματος συνδέεται με την δυνατότητα να προσδιορισθεί η αρχική κατάσταση του συστήματος από μετρήσεις της εισόδου και της εξόδου.

Ορισμός 5.5

Η κατάσταση $x_0 \in \Re^n$ ενός συστήματος είναι *παρατηρήσιμη την χρονική στιγμή* τ_0 αν υπάρχει πεπερασμένο $\tau^* > \tau_0$ τέτοιο ώστε η x_0 να μπορεί να προσδιορισθεί απο τα $y_{[\tau_0,\tau^*]}$ και $u_{[\tau_0,\tau^*]}$.

Ορισμός 5.6

Η κατάσταση $x_0 \in \Re^n$ ενός συστήματος είναι *παρατηρήσιμη* (observable) αν για κάθε $\tau_0 \in T$ υπάρχει πεπερασμένο $\tau^* > \tau_0$ τέτοιο ώστε η x_0 να μπορεί να προσδιορισθεί απο τα $y_{[\tau_0,\tau^*]}$ και $u_{[\tau_0,\tau^*]}$.

Ορισμός 5.6

Ενα σύστημα είναι *παρατηρήσιμο την χρονική στιγμή* τ_0 αν δοθείσης μιας κατάστασης $x(t_0)=x_0$ υπάρχει πεπερασμένο $\tau^* > \tau_0$ τέτοιο ώστε η x_0 να μπορεί να προσδιορισθεί απο τα $y_{[\tau_0,\tau^*]}$ και $u_{[\tau_0,\tau^*]}$.

Στην συνέχεια αναπτύσσουμε συνθήκες που εξασφαλίζουν την παρατηρησιμότητα γραμμικών συστημάτων.

5.3.1 Συστήματα διακριτού χρόνου

Θεωρούμε κατ'αρχήν χρονικώς αμετάβλητα συστήματα που περιγράφονται από τις καταστατικές εξισώσεις

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \quad (5.13)$$

$$y(k) = Cx(k) + Du(k) \quad (5.14)$$

Θεώρημα 5.7

Το σύστημα (5.13)-(5.14) είναι παρατηρήσιμο ως προς την κατάσταση αν και μόνο αν

$$rank\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = n \quad (5.15)$$

Απόδειξη

Εστω ότι θέλουμε να προσδιορίσουμε την κατάσταση $x(t_0)=x_0$ από μετρήσεις της εισόδου και της εξόδου σε ένα χρονικό διάστημα $[0,k^*]$. Από τις καταστατικές εξισώσεις του συστήματος προκύπτει ότι

$$x(k) = A^k x_0 + \sum_{l=0}^{k-1} A^{k-l} Bu(l)$$

και κατά συνέπεια

$$y(k) = CA^k x_0 + C\sum_{l=0}^{k-1} A^{k-l} Bu(l) + Du(k)$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτει ότι

$$CA^k x_0 = y(k) - C\sum_{l=0}^{k-1} A^{k-l} u(l)$$

ή

$$CA^k x_0 = \hat{y}(k)$$

όπου $\hat{y}(k)$ υποδηλώνουν τις γνωστές από μετρήσεις της εισόδου και της εξόδου ποσότητες

$$\hat{y}(k) = y(k) - C\sum_{l=0}^{k-1} A^{k-l} Bu(l) - Du(k)$$

Συνεπώς το πρόβλημα μας είναι να αποδείξουμε ότι υπάρχει k^* τέτοιο ώστε η x_0 να μπορεί να προσδιορισθεί από τις εξισώσεις

$$CA^k x_0 = \hat{y}(k) \quad k = 0,1,\ldots,k^* \tag{5.16}$$

α) Ικανό

Για $k^*=,n-1$ οι σχέσεις (5.16) γράφονται υπό την μορφή

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} x_0 = \begin{bmatrix} \hat{y}(0) \\ \hat{y}(1) \\ \hat{y}(2) \\ \vdots \\ \hat{y}(n-1) \end{bmatrix} \tag{5.17}$$

Αν ισχύει η (5.15) τότε η εξίσωση (5.17) έχει μία και μόνη λύση ως προς x_0. Συνεπώς η αρχική κατάσταση x_0 μπορεί να προσδιορισθεί πάντοτε από n μετρήσεις της εισόδου και της εξόδου.

β)Αναγκαίο: Αν

$$rank\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} < n$$

τότε η εξίσωση (5.17) θα είχε πολλές λύσεις ως προς x_0. Συνεπώς δεν είναι δυνατός ο προσδιορισμός της αρχικής καταστάσεως από n μετρήσεις της εισόδου και της εξόδου. Εξ'άλλου ο προσδιορισμός δεν είναι δυνατός ούτε με περισσότερες ούτε με λιγώτερες μετρήσεις γιατί αν ισχύει η (5.16) τότε θα ισχύει και η σχέση

$$rank\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{k^*} \end{bmatrix} < n$$

για κάθε $k^*<n$ αλλά και για κάθε $k^*<n$ επειδή $A \in \Re^{n\times n}$. Αρα η (5.16) είναι αναγκαία συνθήκη για την παρατηρησιμότητα του συστήματος (5.13)-(5.14).

Παράδειγμα 5.5

Ας θεωρήσουμε πάλι το σύστημα που περιγράφεται από τις καταστατικές

$$x(k+1)=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 2 & 0\end{bmatrix}x(k)+\begin{bmatrix}0\\ 2\end{bmatrix}u(k)$$

$$y(k)=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}x(k)$$

Αν θέσουμε

$$A=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 2 & 0\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0\\ 2\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}$$

τότε

$$CA=\begin{bmatrix}-2 & 1\end{bmatrix}$$

Συνεπώς η μήτρα παρατηρησιμότητας

$$O=\begin{bmatrix}C\\ CA\end{bmatrix}$$

είναι

$$O=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{bmatrix}$$

Επειδή det$O \neq 0$, το σύστημα είναι πλήρως παρατηρήσιμο.

Οπως και στην περίπτωση της ελεγξιμότητας χρονικώς αμετάβλητων συστημάτων η παρατηρησιμότττα συνδέεται με την ιδιοδομή της μήτρας A του συστήματος. Για τον σκοπό αυτό γίνεται χρήση της έννοιας της παρατηρήσιμης ιδιοτιμής:

Ορισμός 5.4

Μία ιδιοτιμή λ_i της μήτρας A είναι *παρατηρήσιμη* αν το αντίστοιχο δεξιό ιδιοδιάνυσμα v_i ικανοποιεί την σχέση

$$Bv_i \neq 0 \tag{5.18}$$

Με τρόπο παρόμοιο εκείνου ης απόδειξης του θεωρήματος.5.2 μπορεί να αποδειχθεί και το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 5.8

Το σύστημα (5.13)-(5.14) είναι παρατηρήσιμο ως προς την κατάσταση αν και μόνο αν όλες ιδιοτιμές της μήτρας A είναι παρατηρήσιμες

Παράδειγμα 5.6

Ας θεωρήσουμε πάλι το σύστημα του παραδείγματος 5.5. Οι ιδιοτιμές της μήτρας A είναι

$$\lambda_1 = -1 + \sqrt{3}$$
$$\lambda_2 = -1 - \sqrt{3}$$

τα δε αντίστοιχα δεξιά ιδιοδιανύσματα

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 + 5\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$v_2 = \begin{bmatrix} -0{,}5 - 0{,}5\sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Επειδή

$$Cv_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 + 5\sqrt{3} \end{bmatrix} = 1 \neq 0$$
$$Cv_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0{,}5 - 0{,}5\sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix} = -0{,}5 - 0{,}5\sqrt{3} \neq 0$$

το σύστημα είναι πλήρως παρατηρήσιμο.

Ας θεωρήσουμε τώρα την περίπτωση χρονικώς μεταβαλλόμενων συστημάτων. Ακολουθώντας την ίδια αποδεικτική μέθοδο με εκείνη του θεωρήματος 5.7 αναπτύσσουμε τις παρακάτω αναγκαίες και ικανές συνθήκες παρατηρησιμότητας.

Θεώρημα 5.8

Το σύστημα Σ^* είναι *παρατηρήσιμο ως προς την κατάσταση* άν και μόνο άν υπάρχει μια πεπερασμένη χρονική στιγμή $k^*>0_0$ τέτοια ώστε οι n στήλες της μήτρας $C(.)\Phi(.,k_0)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες στο διάστημα $[k_0,k^*]$

5.3.2 Συστήματα συνεχούς χρόνου

Θεωρούμε τώρα γραμμικά συστήματα συνεχούς χρόνου που περιγράφονται από τις καταστατικές εξισώσεις.

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \tag{5.18}$$

$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t) \tag{5.19}$$

Θεώρημα 5.9

Το σύστημα Σ είναι *παρατηρήσιμο την χρονική στιγμή* t_0 άν και μόνο άν υπάρχει μια πεπερασμένη χρονική στιγμή $t^*>t_0$ τέτοια ώστε οι n στήλες της μήτρας $C(.)\Phi(.,t_0)$ να είναι γραμμικώς ανεξάρτητες στο διάστημα $[t_0,t^*]$

<u>Απόδειξη</u>

Εστω ότι θέλουμε να προσδιορίσουμε την κατάσταση $x(t_0)=x_0$ από μετρήσεις της εισόδου και εξόδου σε ένα χρονικό διάστημα $[t_0,t^*]$. Από τις καταστατικές εξισώσεις του συστήματος προκύπτει ότι

$$y(t)=C(t)x(t)+D(t)u(t)=$$

$$=C(t)\Phi(t,t_0)x_0+ C(t)\int_{t_0}^{t}\Phi(t,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau+D(t)u(t)$$

Αρα

$$\hat{y}(t) = C(t)\Phi(t,t_0)x_0$$

όπου $\hat{y}(t)$ είναι η γνωστή από μετρήσεις της εισόδου και της εξόδου έκφραση

$$\hat{y}(t) = y(t)- C(t)\int_{t_0}^{t}\Phi(t,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau-D(t)u(t)$$

Συνεπώς το πρόβλημα μας είναι να αποδείξουμε ότι υπάρχει λύση της εξισώσεως

$$\hat{y}(t) = C(t)\Phi(t,t_0)x_0 \tag{5.20}$$

ως προς x_0 για κάποιο $t=t^*$ άν και μόνο άν η μήτρα $C(.)\Phi(.,t_0)$ έχει n στήλες γραμμικώς ανεξάρτητες

<u>α) Ικανό</u>

Πολλαπλασιάζοντας τα δύο μέλη της εξισώσεως (5.20) επί $\Phi^T(t,t_0)C^T(t)$ προκύπτει ότι

$$\Phi^T(t,t_0)C^T(t)\,\hat{y}(t) = \Phi^T(t,t_0)C^T(t)\,C(t)\Phi(t,t_0)x_0$$

και μετά από ολοκλήρωση

$$\int_{t_0}^{t^*}\Phi^T(t,t_0)C^T(t)y(t)dt = \left[\int_{t_0}^{t^*}\Phi^T(t,t_0)C^T(t)C(t)\Phi(t,t_0)dt\right].x_0$$

Η τετραγωνική μήτρα

$$V(t^*,t_0) = \int_{t_0}^{t^*}\Phi^T(t,t_0)C^T(t)C(t)\Phi(t,t_0)dt$$

έχει μη μηδενική ορίζουσα γιατί οι n στήλες της μήτρας $C(.)\Phi.,t_0)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες. Συνεπώς

$$x_0 = V^{-1}(t^*,t_0)\int_{t_0}^{t^*}\Phi^T(t,t_0)C^T(t)y(t)dt$$

δηλαδή η αρχική κατάσταση x_0 μπορεί να προσδιορισθεί από μετρήσεις της εισόδου και της εξόδου στο διάστημα $[t_0,t^*]$.

β) Αναγκαίο

Αν το σύστημα ήταν παρατηρήσιμο χωρίς να είναι οι στήλες της $C(.)\Phi(.,t_0)$ γραμμικώς ανεξάρτητες τότε θα υπήρχε μη μηδενικό διάνυσμα $a\in\Re^n$ τέτοιο ώστε

$$C(t)\Phi(t,t_0)a=0 \qquad \forall\, t>t_0$$

Αν $x_0=a\neq 0$, τότε

$$\hat{y}(t)=C(t)\Phi(t,t_0)a=0 \qquad \forall\, t>t_0$$

απ'όπου προκύπτει ότι δεν θα ήταν δυνατός ο προσδιορισμός μη μηδενικών αρχικών καταστάσεων. □

Ας θεωρήσουμε τώρα το χρονικώς αμετάβλητο σύστημα Σ^*

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \qquad (5.21)$$

(5.22)

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα το σύστημα είναι παρατηρήσιμο αν και μόνο αν οι στήλες της μήτρας Ce^{At} είναι γραμμικώς ανεξάρτητες. Αμεση συνέπεια του θεωρήματος αυτού είναι οι παρακάτω συνθήκες παταηρησιμότητας χρονικώς αμετάβλητων συστημάτων συνεχούς χρόνου.

Θεώρημα 5.7

Το χρονικώς αμετάβλητο σύστημα (5.21)-(5.22) είναι παρατηρήσιμο αν και μόνο αν

$$rank\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = n$$

Κατ' αναλογία προς την μήτρα ελεγξιμότητας , η μήτρα

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

ονομάζεται *μήτρα παρατηρησιμότητας* (observability matrix) του συστήματος (5.21)-(5.22).

5.4 Δυϊκότητα

Από τις προηγούμενες παραγράφους διαφαίνεται μία ομοιότητα των συνθηκών ελεγξιμότητας και παρατηρησιμότητας γραμμικών συστημάτων. Η ομοιότητα εκφράζεται ως *δυϊκότητα* (duality) των εννοιών αυτών.

Ας θεωρήσουμε λοιπόν ένα γραμμικό σύστημα συνεχούς χρόνου που περιγράφεται από τις καταστατικές εξισώσεις

$$\dot{x}(t) = At)x(t) + B(t)u(t) \qquad (5.23)$$

$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t) \qquad (5.24)$$

όπου $x \in \Re^n, u \in \Re^m$ και $y \in \Re^p$.

Ορισμός 5.5

Το σύστημα

$$\dot{x}_d(t) = A^T(t)x_d(t) + C^T(t)u_d(t) \tag{5.25}$$

$$y_d(t) = B^T(t)x_d(t) + D(t)u_d(t) \tag{5.26}$$

όπου $x_d \in \Re^n, u_d \in \Re^p$ και $y_d \in \Re^m$ ονομάζεται *δυϊκό σύστημα* (dual system) του (5.23)-(5.24).

Η σπουδαιότητα του δυϊκού συστήματος προκύπτει από το παρακάτω θεώρημα που αποδεικνύεται εύκολα κάνοντας χρήση των συνθηκών ελεγξιμότητας και παρατηρησιμότητας που αναπτύχθηκαν στις προηγούμενες παραγράφους.

Θεώρημα 5.8

Το σύστημα (5.23)-(5.24) είναι ελέγξιμο (παρατηρήσιμο) αν και μόνο αν αν το δυϊκό του (5.25-(5.26)) είναι παρατηρήσιμο (ελέγξιμο).

5.5 Ασκήσεις

Ασκηση 5.1

Να αποδειχθεί ότι το σύνολο των ελέγξιμων (παρατηρήσιμων) καταστάσεων ενός μερικώς ελέγξιμου (παρατηρήσιμου) γραμμικού συστήματος αποτελούν διανυσματικό χώρο διαστάσεως ίσης με τον δείκτη ελεγξιμότητας (παρατηρησιμότητας) του συστήματος.

Ασκηση 5.2

Να αποδειχθεί ότι τα σήματα συνεχούς χρόνου $g_i(t)$ $i = 1,2,...,n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα στο διάστημα $[t_1, t_2]$.. αν και μόνο αν η μήτρα

$$W(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} G(t)G^*(t)dt$$

όπου

$$G(t) = \begin{bmatrix} g_1(t) & g_2(t) & \dots & g_n(t) \end{bmatrix}$$

ειναι μη ιδιάζουσα

Ασκηση 5.3

Εστωσαν n μιγαδικά σήματα συνεχούς χρόνου $g_i(t)$ $i = 1,2,...,n$ με συνεχείς παραγώγους μέχρι *n-1* τάξεως στο διάστημα $[t_1, t_2]$. Να αποδειχθεί ότι αν υπάρχει $t_0 \in [t_1, t_2]$ τέτοιο ώστε

$$rank\begin{bmatrix} G^{(1)}(t) & G^{(2)}(t) & \dots & G^{(n-1)}(t) \end{bmatrix} = n$$

τότε τα σήματα είναι γραμμικώς ανεξάρτητα στο διάστημα $[t_1, t_2]$.

Ασκηση 5.4

Να μελετηθεί η ελεγξιμότητα και η παρατηρησιμότητα των συστημάτων

$$\Sigma_1: \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

$$\Sigma_2: \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 8 & 10 & 2 \end{bmatrix} + 3u$$

Ασκηση 5.5

Ο μηχανικός βραχίονας του σχήματος αποτελείται από δύο όμοιες ράβδους μήκους l και μάζας m. Η περιστροφή των ράβδων ελέγχεται από δύο κινητήρες μέσω των οποίων εφαρμόζονται ροπές u_1 και u_2 στα σημεία p_1 και p_2 αντιστοίχως. Για μικρές τιμές των θ_1, θ_2, $\dot{\theta}_1$ και $\dot{\theta}_2$ οι εξισώσεις που προσεγγίζουν την δυναμική του συστήματος είναι οι εξής

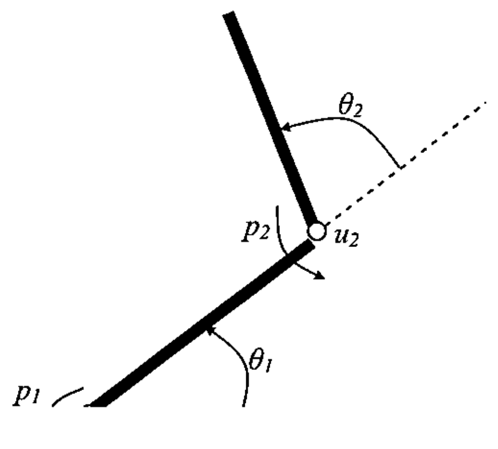
$$\frac{8}{3}\ddot{\theta}_1 + \frac{5}{6}\ddot{\theta}_2 = \frac{u_1}{ml^2}$$

$$\frac{5}{6}\ddot{\theta}_1 + \frac{1}{3}\ddot{\theta}_2 = \frac{u_2}{ml^2}$$

α) Να μελετηθεί η ελεγξιμότητα και η παρατηρησιμότητα τουν συστήματος

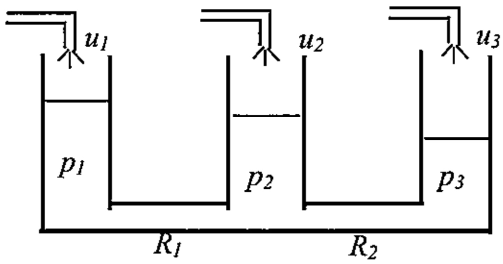
β) Να εξετασθεί αν το σύστημα είναι ελέγξιμο στην περίπτωση που μία βλάβη αχρηστεύσει τον κινητήρα της άρθρωσης p_1.

γ) Αρκεί η μέτρηση μίας εκ των γωνιών θ_1 ή θ_2 και της αντίστοιχης γωνιακής ταχύτητας για τον προσδιορισμό της τιμής της άλλης γωνίας και γωνιακής ταχύτητας;



Ασκηση 5.6

Τρεις ίδιες δεξαμενές συνδέονται όπως στο σχήμα:



Οι αντιστάσεις R_1 και R_2 των αγωγών συνδέσεως θεωρούνται ίσες: $R_1 = R_2 = 1$. Ισες θεωρούνται και οι χωρητικότητες του υγρού κάθε δεξαμενής $C_1 = C_2 = C_3 = 1$. Οι εξισώσεις καταστάσεως του συστήματος είναι

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

όπου p_1, p_2, p_3 υποδηλώνουν τις πιέσεις στις δεξαμενές T_1, T_2, και T_3 αντιστοίχως και u_1, u_2, u_3 υποδηλώνουν τις παροχές των αντλιών A_1, A_2 και A_3.

Να μελετηθεί η ελεγξιμότητα του συστήματος στις περιπτώσεις όπου μπορούν να τεθούν σε λειτουργία μία, δύο ή όλες οι αντλίες. Να σχολιασθούν τα αποτελέσματα.

6

Ισοδύναμες καταστατικές εξισώσεις

Οπως έχουμε ήδη αναφέρει, ένα σύστημα περιγράφεται πλήρως από την σχέση που συνδέει την είσοδο με την έξοδο. Οι μεταβλητές καταστάσεως είναι εσωτερικές μεταβλητές και δεν καθορίζονται μονοσήμαντα. Τίθεται λοιπόν το πρόβλημα της ισοδυναμίας των διαφόρων περιγραφών ενός συστήματος

6.1 Ισοδύναμες καταστατικές εξισώσεις

Έστω ένα γραμμικό δυναμικό σύστημα που περιγράφεται από τις σχέσεις:

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{6.1α}$$

$$y = Cx + Du \tag{6.1β}$$

όπου $x \in \Re^n$, $y \in \Re^q$, $u \in \Re^m$, $A \in \Re^{n\times n}$, $B \in \Re^{n\times m}$, $C \in \Re^{q\times n}$, $D \in \Re^{q\times m}$.

Ας θεωρήσουμε ένα αμφιμονοσήμαντο μετασχηματισμό του χώρου καταστάσεως $\Re^n$ στον εαυτό του, που ορίζεται από τη σχέση:

$$\bar{x} = Px$$

όπου $P \in \Re^{n\times n}$ είναι μια χρονικά αμετάβλητη μήτρα τέτοια ώστε $\det P \neq 0$. Αντικαθιστώντας την έκφραση $x = P^{-1}\bar{x}$ στις σχέσεις (6.1) προκύπτουν οι παρακάτω εξισώσεις:

$$\dot{\bar{x}} = \bar{A}\bar{x} + \bar{B}u \tag{6.2α}$$

$$y = \bar{C}\bar{x} + \bar{D}u \tag{6.2β}$$

όπου $\bar{A} = PAP^{-1}$, $\bar{B} = PB$, $\bar{C} = CP^{-1}$, $\bar{D} = D$.

Αποδεικνύεται εύκολα ότι μολονότι τα συστήματα (6.1) και (6.2) δεν έχουν τις ίδιες μεταβλητές καταστάσεως, εν τούτοις η σχέση εισόδου-εξόδου $y(.)=S[u(.)]$ είναι η ίδια για τα δύο συστήματα. Πράγματι η σχέση εισόδου-εξόδου του συστήματος (6.2) είναι

$$y(t) = \bar{C}\bar{x}(t) + \bar{D}u(t) \tag{6.3α}$$

όπου $\bar{x}(t)$ είναι η λύση της ολοκληρωτικής εξισώσεως:

$$\bar{x}(t) = \bar{A}\int_{-\infty}^{t}\bar{x}(\tau)d\tau + \bar{B}\int_{-\infty}^{t}u(\tau)d\tau \tag{6.3β}$$

Θέτοντας $\bar{A} = PAP^{-1}$, $\bar{B} = PB$, $\bar{C} = CP^{-1}$, $\bar{D} = D$ η εξίσωση (6.3α) γράφεται υπό την μορφή

$$y(t) = CP^{-1}\bar{x}(t) + Du(t)$$

και η $\bar{x}(\tau)$ ικανοποιεί την εξίσωση:

$$\bar{x}(t) = PA\int_{-\infty}^{t}P^{-1}\bar{x}(\tau)d\tau + PB\int_{-\infty}^{t}u(\tau)d\tau$$

Τέλος, πολλαπλασιάζοντας την τελευταία εξίσωση επί P^{-1} και θέτοντας

$$\bar{x}(t)=P^{-1}x(t)$$

οι δύο τελευταίες εξισώσεις γράφονται υπό την μορφή:

$$y(t)=Cx(t)+Du(t)$$

και

$$x(t)=\int_{-\infty}^{t}Ax(\tau)d\tau+\int_{-\infty}^{t}Bu(\tau)d\tau$$

που είναι οι σχέσεις εισόδου-εξόδου και του συστήματος (6.1). Ετσι οδηγούμαστε στον παρακάτω ορισμό:

Ορισμός 6.1

Τα γραμμικά δυναμικά συστήματα :

$$\begin{aligned}\dot{x}&=Ax+Bu\\ y&=Cx+Du\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}}&=\bar{A}\bar{x}+\bar{B}u\\ y&=\bar{C}\bar{x}+\bar{D}u\end{aligned}$$

λέγονται *ισοδύναμα* (equivalent) αν και μόνο αν, υπάρχει μία μη ιδιάζουσα μήτρα P με χρονικώς αμετάβλητα στοιχεία τέτοια ώστε:

$$\bar{A}=PAP^{-1},\ \bar{B}=PB,\ \bar{C}=CP^{-1},\ \bar{D}=D.$$

□

Ο ορισμός αυτός είναι μια ειδική περίπτωση του παρακάτω γενικότερου ορισμού ισοδυναμίας συστημάτων:

Θεωρούμε δύο συστήματα που περιγράφονται από τις σχέσεις:

$$\dot{x}=f(t,x,u) \tag{6.4α}$$
$$y=g(t,x,u) \tag{6.4β}$$

και

$$\dot{\bar{x}}=\bar{f}(t,\bar{x},u) \tag{6.5α}$$
$$y=\bar{g}(t,\bar{x},u) \tag{6.5β}$$

με $u \in \Re^m$, $y \in \Re^q$, $x \in \Re^n$, $\bar{x} \in \Re^n$.

Τα συστήματα (6.4) και (6.5) ονομάζονται *ισοδύναμα* αν υπάρχει μια αντιστρέψιμη συνάρτηση $\phi(x)$, $\phi : \Re^n \to \Re^n$ τέτοια ώστε:

$$\det\left[\frac{\partial \phi^{-1}(\bar{x})}{\partial \bar{x}}\right] \neq 0, \quad \det\left[\frac{\partial \phi(x)}{\partial x}\right] \neq 0$$

και

$$\bar{f}(t,\bar{x},u) = \frac{\partial \phi(x)}{\partial x} f\left(t,\phi^{-1}(\bar{x}),u\right)$$

$$\bar{g}(t,\bar{x},u) = g\left(t,\phi^{-1}(\bar{x}),u\right).$$

Αν τεθεί

$$\bar{x} = \phi(x)$$

τότε από τις ανωτέρω σχέσεις προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= \frac{\partial \phi(x)}{\partial x}\dot{x} = \frac{\partial \phi(x)}{\partial x} f(t,x,u) = \\ &= \frac{\partial \phi(x)}{\partial x} f(t,\phi^{-1}(\bar{x}),u) = \bar{f}(t,\bar{x},u) \\ y &= g(t,\phi^{-1}(\bar{x}),u) = \bar{g}(t,\bar{x},u) \end{aligned}$$

και

και

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= \bar{f}(t,\bar{x},u) = \frac{\partial \phi(x)}{\partial x} f\left(t,\phi^{-1}(\bar{x}),u\right) = \\ &= \frac{\partial \phi(x)}{\partial x} f(t,x,u) \end{aligned}$$

και επειδή

$$\dot{\bar{x}} = \frac{\partial \phi(x)}{\partial x}\dot{x}$$

Αρα

$$\dot{x} = f(t,x,u)$$

Εξ'άλλου

$$y = \bar{g}(t,\bar{x},u) = g\left(t,\phi^{-1}(\bar{x}),u\right) = g(t,x,u)$$

6.2 Διάσπαση συστήματος σε ελέγξιμα και μη ελέγξιμα υποσυστήματα

Συμφώνως προς τους προηγούμενους ορισμούς οι ισοδύναμες περιγραφές προκύπτουν μέσω ενός αμφιμονοσήμαντου μετασχηματισμού του χώρου καταστάσεως στον εαυτό του. Είδαμε ότι ένας τέτοιος μετασχηματισμός δεν αλλάζει την σχέση εισόδου-εξόδου, συνεπώς ούτε και την μήτρα συναρτήσεων μεταφοράς στην περίπτωση που το σύστημα είναι χρονικά αμετάβλητο. Στην συνέχεια θα αποδείξουμε ότι ένας μετασχηματισμός ισοδυναμίας δεν μεταβάλλει ούτε την ελεγξιμότητα ούτε την παρατηρησιμότητα του συστήματος. Πράγματι, έστω το σύστημα:

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{6.6α}$$

$$y = Cx + Du \tag{6.6β}$$

και το ισοδύναμο:

$$\dot{\bar{x}} = \bar{A}\bar{x} + \bar{B}u \tag{6.7α}$$

$$y = \bar{C}\bar{x} + \bar{D}u \tag{6.7β}$$

όπου $\bar{A} = PAP^{-1}$, $\bar{B} = PB, \bar{C} = CP^{-1}$, $\bar{D} = D$. Η μήτρα ελεγξιμότητας του συστήματος (6.7) είναι:

$$\bar{U} = \begin{bmatrix} \bar{B} & \bar{A}\bar{B} & \dots & \bar{A}^{n-1}\bar{B} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} PB & PAP^{-1}PB & \dots & \left(PAP^{-1}\right)^{n-1}PB \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} PB & PAB & \dots & PA^{n-1}B \end{bmatrix} = PU,$$

όπου $U = \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$ είναι η μήτρα ελεγξιμότητας του συστήματος (6.6). Επειδή όμως $det\, P \neq 0$, θα ισχύει ότι

$$rank\bar{U} = rankPU = rankU$$

Συνεπώς ένας μετασχηματισμός ισοδυναμίας δεν μεταβάλλει την ελεγξιμότητα του συστήματος. Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται και το αντίστοιχο συμπέρασμα που αφορά την παρατηρησιμότητα του συστήματος.

Γνωρίζουμε από το προηγούμενο κεφάλαιο ότι αν ο βαθμός (rank) της μήτρας ελεγξιμότητας ενός συστήματος είναι ίσος με την διάσταση του διανύσματος καταστάσεως τότε το σύστημα είναι πλήρως ελέγξιμο. Στην τελείως αντίθετη περίπτωση όπου ο βαθμός της μήτρας ελεγξιμότητας είναι ίσος με μηδέν, το σύστημα είναι ολοκληρωτικά μη ελέγξιμο γιατί η σχέση

$$rank\begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = 0$$

συνεπάγεται την $B=0$ δηλαδή το σύστημα έχει την μορφή:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax \\ y &= Cx + Du \end{aligned}$$

που σημαίνει ότι δεν ελέγχεται καθόλου η κατάστασή του. Οι ενδιάμεσες περιπτώσεις είναι εκείνες όπου $rankU = n_1$ με $0 < n_1 < n$. Τότε το σύστημα είναι μερικώς ελέγξιμο, δηλαδή υπάρχουν καταστάσεις που είναι ελέγξιμες αλλά και άλλες που δεν είναι. Το παρακάτω θεώρημα μας επιτρέπει να προσδιορίσουμε τις ελέγξιμες και τις μη ελέγξιμες καταστάσεις:

Θεώρημα 6.1

Αν η μήτρα ελεγξιμότητας $U = \begin{bmatrix} B \; AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$ έχει βαθμό $n_1 < n$ τότε υπάρχει ένας μετασχηματισμός $\bar{x} = Px$ με $P \in \Re^{n\times n}$ και $det P \neq 0$ ο οποίος μετασχηματίζει το σύστημα (6.1) σε ένα σύστημα της μορφής

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_C \\ \dot{\bar{x}}_{\bar{C}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_C & \bar{A}_{12} \\ 0 & \bar{A}_{\bar{C}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_C \\ \bar{x}_{\bar{C}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{B}_C \\ 0 \end{bmatrix} u \qquad (6.8\alpha)$$

$$y = \begin{bmatrix} \bar{C}_C & \bar{C}_{\bar{C}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_C \\ \bar{x}_{\bar{C}} \end{bmatrix} + Du \qquad (6.8\beta)$$

όπου το n_1-διάστατο υποσύστημα

$$S_C : \begin{cases} \dot{\bar{x}}_C = \bar{A}_C \bar{x}_C + \bar{B}_C u & (6.9\alpha) \\ y = \bar{C}_C \bar{x}_C + Du & (6.9\beta) \end{cases}$$

είναι πλήρως ελέγξιμο.

Απόδειξη

Επειδή η μήτρα ελεγξιμότητας U είναι βαθμού n_1 υπάρχουν n-1 γραμμικώς ανεξάρτητες στήλες της $q^1 \ q^2 \ \dots \ q^{n-1}$. Διαλέγουμε επίσης αυθαίρετα $n-n_1$ n-διάστατα διανύσματα $q^{n_1+1}, q^{n_1+2}, \dots, q^n$ έτσι ώστε η ορίζουσα της μήτρας:

$$Q = \begin{bmatrix} q^1 & q^2 & \dots & q^{n_1} & q^{n_1+1} & \dots & q^n \end{bmatrix}$$

να είναι διάφορη του μηδενός. Ορίζουμε την μήτρα $P \equiv Q^{-1}$ και τον μετασχηματισμό $\begin{bmatrix} \bar{x}_C \\ \bar{x}_{\bar{C}} \end{bmatrix} = Px$ όπου $\bar{x}_C \in \Re^{n_1}$ και $\bar{x}_{\bar{C}} \in \Re^{n-n_1}$. Θα έχουμε:

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_C \\ \dot{\bar{x}}_{\bar{C}} \end{bmatrix} = Q^{-1}AQ \begin{bmatrix} \bar{x}_C \\ \bar{x}_{\bar{C}} \end{bmatrix} + Q^{-1}Bu$$

$$y = CQ \begin{bmatrix} \bar{x}_C \\ \bar{x}_{\bar{C}} \end{bmatrix} + Du.$$

Αλλά:

$$Q^{-1}AQ = Q^{-1}\begin{bmatrix} Aq^1 & Aq^2 & \dots & Aq^{n_1} & Aq^{n_1+1} & \dots & Aq^n \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} Q^{-1}Aq^1 & Q^{-1}Aq^2 & \dots & Q^{-1}Aq^{n_1} & Q^{-1}Aq^{n_1+1} & \dots & Q^{-1}Aq^n \end{bmatrix}$$

και τα διανύσματα $Aq^1, Aq^2, \dots, Aq^{n_1}$ είναι γραμμικώς εξηρτημένα από τα $q^1, \dots, q^{n_1}$. Αρα σύμφωνα με το γνωστό θεώρημα της γραμμικής άλγεβρας τα διανύσματα $Q^{-1}Aq^i$, $i = 1, \dots, n_1$, έχουν την μορφή:

$$\left.\begin{bmatrix} \times \\ \vdots \\ \times \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right. \begin{matrix} \\ \\ \\ \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} n-n_1 \quad \text{συνιστώσες} \end{matrix}$$

όπου, με $\times$ συμβολίζουμε μη μηδενικά εν γένει στοιχεία. Συνεπώς η μήτρα $Q^{-1}Aq^i$ είναι της μορφής:

$$\begin{bmatrix} \overline{A}_C & \overline{A}_{12} \\ 0 & A_{\overline{C}} \end{bmatrix}$$

Εξ'άλλου και τα διανύσματα στήλες της B είναι γραμμικώς εξηρτημένα από τα διανύσματα $q^1, q^2, \ldots, q^{n_1}$. Αρα η μήτρα $Q^{-1}B$ είναι της μορφής:

$$\begin{bmatrix} \overline{B}_C \\ 0 \end{bmatrix}$$

όπου $\overline{B}_C \in \Re^{n_1}$. Τέλος, θέτοντας $C_q = \begin{bmatrix} \overline{C}_C & \overline{C}_{\overline{C}} \end{bmatrix}$ το σύστημα (6.1) έρχεται στη μορφή (6.8).

Θα δείξουμε τώρα ότι το υποσύστημα (6.9) είναι ελέγξιμο. Αν U και $\overline{U}$ είναι οι μήτρες ελεγξιμότητας των συστημάτων (6.1) και (6.8) αντιστοίχως, τότε ισχύει η σχέση

$$rank(\overline{U}) = rank(U) = n_1$$

γιατί, όπως έχουμε ήδη δείξει, ισχύουν οι σχέσεις:

$$\begin{aligned} rank\begin{bmatrix} B & Q^{-1}AQB & Q^{-1}A^2QB & \ldots & A^{n-1}QB \end{bmatrix} = \\ = rank\begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \ldots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \end{aligned}$$

αν $det\, Q \neq 0$. Εξ'άλλου:

$$\overline{U}=\begin{bmatrix}\overline{B}_C & \overline{A}_C\overline{B}_C\\ 0 & 0\end{bmatrix}\cdots\begin{bmatrix}\overline{A}_C^{n_1-1}\overline{B}_C & \overline{A}_C^{n_1}\overline{B}_C & \dots & \overline{A}_C^{n}\overline{B}_C\\ 0 & 0 & \dots & 0\end{bmatrix}=$$
$$=\begin{bmatrix}\overline{U}_C & \overline{A}_C^{n_1}\overline{B}_C & \dots & \overline{A}_C^{n}\overline{B}_C\\ 0 & 0 & \dots & 0\end{bmatrix}$$

όπου $\overline{U}_C$ είναι η μήτρα ελεγξιμότητας του υποσυστήματος (6.9). Επειδή η μήτρα $\overline{A}_C$ είναι διαστάσεων $n_1 \times n_1$, οι στήλες των μητρών $\overline{A}_C^k\overline{B}_C$ για $k > n_1$ είναι γραμμικώς εξηρτημένες από τις στήλες των $\overline{U}_C$. Αρα

$$rank\begin{bmatrix}\overline{U}_C\\ 0\end{bmatrix}=rank\overline{U}=n_1$$

και επειδή

$$rank\begin{bmatrix}\overline{U}_C\\ 0\end{bmatrix}=rank\overline{U}_C$$

έπεται ότι

$$rank\overline{U}_C=n_1,$$

δηλαδή το υποσύστημα (6.9) είναι πλήρως ελέγξιμο. □

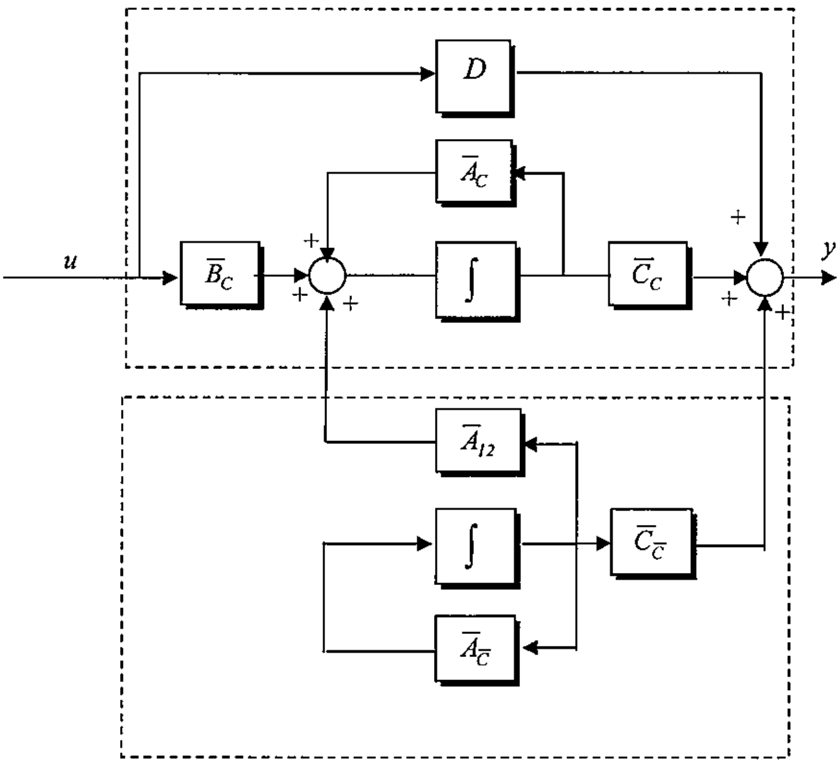
Συμφώνως λοιπόν προς το προηγούμενο θεώρημα, αν ένα n-διάστατο δυναμικό σύστημα δεν είναι πλήρως ελέγξιμο, τότε με ένα κατάλληλο μετασχηματισμό του διανύσματος καταστάσεως μπορεί να μετασχηματιστεί σε ένα ισοδύναμο δυναμικό σύστημα αποτελούμενο από δύο διασυνδεδεμένα υποσυστήματα S_C και $S_{\overline{C}}$, από τα οποία το S_C είναι πλήρως ελέγξιμο ενώ το $S_{\overline{C}}$ δεν ελέγχεται καθόλου. Η διασύνδεση των υποσυστημάτων φαίνεται στο σχήμα 6.1. Επί πλέον το Θεώρημα 6.1 μας λέει ότι η διάσταση του ελέγξιμου υποσυστήματος $S_{\overline{C}}$ είναι ίση με το βαθμό της μήτρας ελεγξιμότητας του όλου συστήματος. Οπως φαίνεται στο σχήμα 6.1, η μη ελεγξιμότητα του υποσυστήματος $S_{\overline{C}}$ οφείλεται στο γεγονός ότι η συμπεριφορά του δεν επηρεάζεται ούτε (άμεσα) από την είσοδο u ούτε (έμμεσα) από το διάνυσμα καταστάσεως $\overline{x}_C$ του υποσυστήματος S_C. Η ύπαρξη όμως του υποσυστήματος $S_{\overline{C}}$ γίνεται αντιληπτή στην έξοδο του όλου συστήματος S γιατί η έξοδος $\overline{y}_{\overline{C}}$ του $S_{\overline{C}}$ συμβάλλει στην έξοδο y επειδή ισχύει η σχέση $y=\overline{y}_C+\overline{y}_{\overline{C}}$.

Ας υπολογίσουμε τώρα την μήτρα συναρτήσεων μεταφοράς του συστήματος S:

$$H(s) = C(sI - A)^{-1} B + D = \overline{C}\left(sI - \overline{A}\right)^{-1} \overline{B} + D =$$
$$= \begin{bmatrix} \overline{C}_C & \overline{C}_{\overline{C}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} sI - \overline{A}_C & -\overline{A}_{12} \\ 0 & sI - \overline{A}_{\overline{C}} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \overline{B}_C \\ 0 \end{bmatrix} + D$$

Αλλά από την ταυτότητα

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1} A_{12} A_{22}^{-1} \\ 0 & A_{22}^{-1} \end{bmatrix}$$



Σχήμα 61: Διάσπαση συστήματος σε ένα πλήρως ελέγξιμο και σε ένα μη ελέγξιμο υποσύστημα

όπου $A_{11} \in \Re^{n_1 \times n_1}$ και $A_{22} \in \Re^{n_2 \times n_2}$, προκύπτει ότι

$$\begin{bmatrix} sI - \overline{A}_C & -\overline{A}_{12} \\ 0 & sI - \overline{A}_{\overline{C}} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \left(sI - \overline{A}_C\right)^{-1} & \left(sI - \overline{A}_C\right)^{-1} \overline{A}_{12} \left(sI - \overline{A}_{\overline{C}}\right)^{-1} \\ 0 & \left(sI - \overline{A}_{\overline{C}}\right)^{-1} \end{bmatrix}$$

Αρα

$$H(s) = \begin{bmatrix} \overline{C}_C & \overline{C}_{\overline{C}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left(sI - \overline{A}_C\right)^{-1} & \left(sI - \overline{A}_C\right)^{-1} \overline{A}_{12} \left(sI - \overline{A}_{\overline{C}}\right)^{-1} \\ 0 & \left(sI - \overline{A}_{\overline{C}}\right)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{B}_C \\ 0 \end{bmatrix} + D$$

ή

$$H(s) = \overline{C}_C \left(sI - \overline{A}_C\right)^{-1} \overline{B}_C + D$$

Αξίζει να παρατηρηθεί ότι η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος S δεν εξαρτάται από τις παραμέτρους του μη ελέγξιμου υποσυστήματος $S_{\overline{C}}$ και επί πλέον είναι ίση με την συνάρτηση μεταφοράς $H_C(s)$ του υποσυστήματος S_C:

$$H_C(s) = \overline{C}_C \left(sI - \overline{A}_C\right)^{-1} \overline{B}_C + D$$

Συνεπώς *η μήτρα συναρτήσεων μεταφοράς ενός συστήματος περιγράφει μόνο την συμπεριφορά του πλήρως ελέγξιμου υποσυστήματός του.*

Συνεχίζουμε την παράγραφο αυτή τονίζοντας ότι, όπως προκύπτει από την απόδειξη του θεωρήματος 6.1, για την διάσπαση ενός συστήματος σε ένα πλήρως ελέγξιμο και ένα μη ελέγξιμο υποσύστημα χρησιμοποιούμε τον μετασχηματισμό

$$\overline{x} = Px$$

όπου $P^{-1} = Q$ είναι μια μη ιδιάζουσα μήτρα της οποίας οι n_1 πρώτες στήλες είναι n_1 το πλήθος ανεξάρτητες στήλες της μήτρας ελεγξιμότητας.

'Ενα αντίστοιχο αποτέλεσμα μ' εκείνο του θεωρήματος 6.1 ισχύει και για την διάσπαση ενός συστήματος σε δύο υποσυστήματα εκ των οποίων το ένα είναι πλήρως παρατηρήσιμο και το άλλο ολοκληρωτικά μη παρατηρήσιμο.

Θεώρημα 6.2

Αν η μήτρα παρατηρησιμότητας $V = \begin{bmatrix} C^T & A^T C^T & \dots & \left(A^{n-1}\right)^T C^T \end{bmatrix}$ του συστήματος S έχει βαθμό $n_2 < n$ τότε υπάρχει ένας μετασχηματισμός $\overline{x} = Px$ με $P \in \Re^{n \times n}$ και $\det P \neq 0$ ο οποίος μετασχηματίζει το σύστημα (6.1) στο

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_o \\ \dot{\bar{x}}_{\bar{o}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_o & 0 \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{\bar{o}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_o \\ \bar{x}_{\bar{o}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{B}_o \\ \bar{B}_{\bar{o}} \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} \bar{C}_o & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_o \\ \bar{x}_{\bar{o}} \end{bmatrix} + Du$$

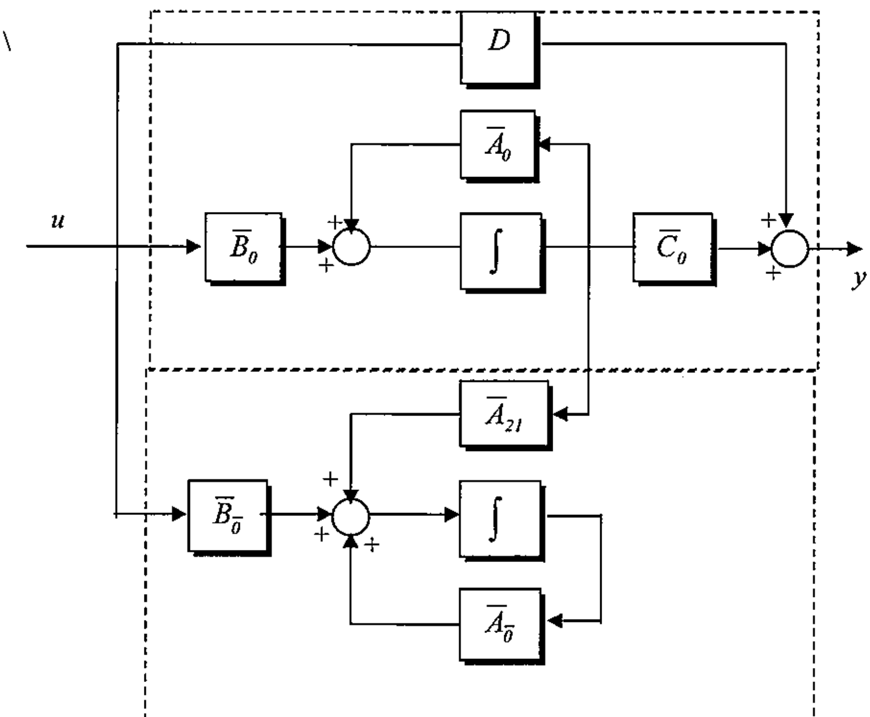
όπου $\bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{x}_o^T & \bar{x}_{\bar{o}}^T \end{bmatrix}^T$ και το n_1-διάστατο υποσύστημα S_o

$$\dot{\bar{x}}_o = \bar{A}_o \bar{x}_o + \bar{B}_o u \qquad (6.12\alpha)$$

$$\bar{y} = \bar{C}_o \bar{x}_o + Du \qquad (6.12\beta)$$

είναι πλήρως παρατηρήσιμο.

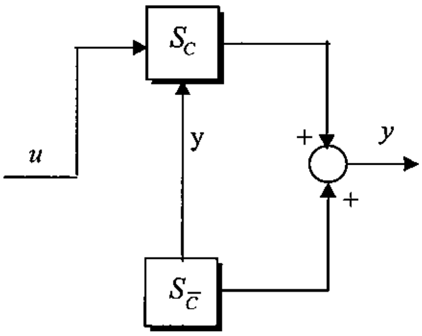
Η απόδειξη του θεωρήματος αυτού είναι ανάλογη μ' εκείνη του θεωρήματος 6.1. Εδώ η μήτρα P^{-1} έχει σαν n_2 πρώτες γραμμές n_2 το πλήθος γραμμικώς ανεξάρτητες γραμμές της μήτρας παρατηρησιμότητας V του συστήματος S. Οι υπόλοιπες n-n_2 γραμμές εκλέγονται αυθαίρετα ώστε να ισχύει $\det P \neq 0$.



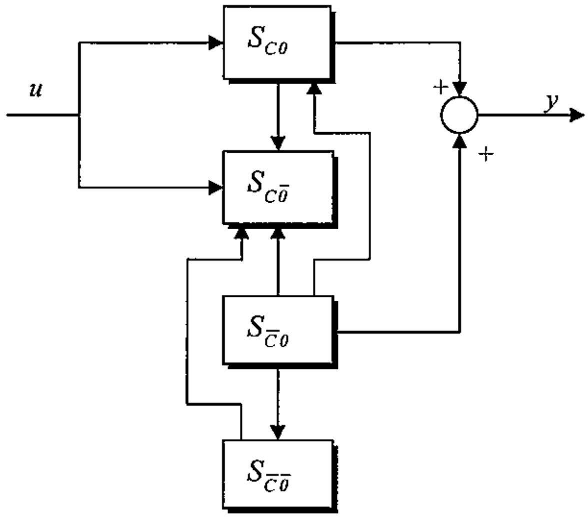
Σχήμα 6.2: Διάσπαση συστήματος σε ένα πλήρως παρατηρήσιμο
και σε ένα καθόλου παρατηρήσιμο υποσύστημα

Συμφώνως λοιπόν προς το θεώρημα 6.2, το σύστημα S αποτελείται από δύο διασυνδεδεμένα υποσυστήματα όπως φαίνεται στο σχήμα 6.2. Από αυτά, το υποσύστημα S_0 είναι πλήρως παρατηρήσιμο ενώ το υποσύστημα $S_{\bar{0}}$ δεν είναι καθόλου παρατηρήσιμο γιατί δεν "φαίνεται" από την έξοδο ούτε άμεσα ούτε έμμεσα μέσω του υποσυστήματος S_0. Αποδεικνύεται επίσης εύκολα ότι η μήτρα συναρτήσεων μεταφοράς του συστήματος S είναι η ίδια με την μήτρα συναρτήσεων μεταφοράς του πλήρους παρατηρήσιμου υποσυστήματος S_0.

Γενικά: Ας θεωρήσουμε τώρα ένα n-διάστατο δυναμικό σύστημα του οποίου η μήτρα ελεγξιμότητας είναι βαθμού n_1 με $n_1 < n$ και η μήτρα παρατηρησιμότητας είναι βαθμού $n_2 < n$. Εφαρμόζοντας την μέθοδο της αποδείξεως του θεωρήματος 6.1 διασπάμε το σύστημα S σε δύο διασυνδεδεμένα υποσυστήματα $S_C, S_{\bar{C}}$ από τα οποία το n_1-διάστατο υποσύστημα S_C είναι πλήρως ελέγξιμο ενώ το $S_{\bar{C}}$ δεν είναι καθόλου ελέγξιμο, σύμφωνα με το παρακάτω σχήμα:



Στην συνέχεια διασπάμε τα υποσυστήματα S_C και $S_{\bar{C}}$ σε πλήρως παρατηρήσιμα S_{C0} και $S_{\bar{C}0}$ και καθόλου παρατηρήσιμα $S_{C\bar{0}}$ και $S_{\bar{C}\bar{0}}$ σύμφωνα με το θεώρημα 6.2. Έτσι το σύστημα S διασπάται σε τέσσερα διασυνδεδεμένα υποσυστήματα $S_{C0}, S_{\bar{C}0}, S_{C\bar{0}}, S_{\bar{C}\bar{0}}$, σύμφωνα με το σχήμα:



Το σύστημα λοιπόν περιγράφεται από σχέσεις της μορφής:

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_{co} \\ \dot{\bar{x}}_{c\bar{o}} \\ \dot{\bar{x}}_{\bar{c}o} \\ \dot{\bar{x}}_{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{co} & 0 & \bar{A}_{13} & 0 \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{c\bar{o}} & 0 & \bar{A}_{34} \\ 0 & 0 & \bar{A}_{\bar{c}o} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{A}_{43} & \bar{A}_{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_{co} \\ \bar{x}_{c\bar{o}} \\ \bar{x}_{\bar{c}o} \\ \bar{x}_{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix} + u$$

$$y = \begin{bmatrix} \bar{C}_{co} & 0 & \bar{C}_{\bar{c}o} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_{co} \\ \bar{x}_{c\bar{o}} \\ \bar{x}_{\bar{c}o} \\ \bar{x}_{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix} + Du .$$

6.3 Ελέγξιμη και παρατηρήσιμη μορφή

Η σχεδίαση μονάδων ελέγχου διευκολύνεται σημαντικά αν οι μήτρες A, B, C, D που περιγράφουν το σύστημα έχουν μια τυπική μορφή, όπως για παράδειγμα στην περίπτωση της κανονικής διάσπασης σε πλήρως ελέγξιμο και μη ελέγξιμο υποσυστήματα.

Στην παράγραφο αυτή θα παρουσιάσουμε δύο μετασχηματισμούς ισοδυναμίας που μετασχηματίζουν ένα γραμμικό σύστημα στις λεγόμενες ελέγξιμη ή παρατηρήσιμη κανονικές μορφές.

Θα εξετάσουμε στην αρχή την περίπτωση συστημάτων μιας εισόδου-μιας εξόδου που περιγράφεται από τις σχέσεις:

$$\dot{x} = Ax + bu \tag{6.15α}$$

$$y = Cx + du \tag{6.15β}$$

όπου $x \in \Re^n, u \in \Re, A \in \Re^{n\times n}, b \in \Re^n, C \in \Re^{n\times n}, d \in \Re^n$.

Θεώρημα 6.3

Αν το n-διάστατο δυναμικό σύστημα μιας εισόδου-μιας εξόδου (6.15) είναι πλήρως ελέγξιμο, τότε μπορεί να μετασχηματισθεί ισοδύναμα στο σύστημα:

$$\dot{\bar{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \bar{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ . \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} c_n & c_{n-1} & c_{n-2} & \dots & c_2 & c_1 \end{bmatrix} \bar{x} + du$$

όπου a_i $i=1,2,\dots,n$, είναι οι συντελεστές του χαρακτηριστικού πολυωνύμου της μήτρας A:

$$det(sI - A) = s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n$$

Απόδειξη

Θεωρούμε τον μετασχηματισμό $\bar{x} = Px$ όπου $P^{-1} = Q \equiv \begin{bmatrix} q^1 & q^n & \dots & q^n \end{bmatrix}$ με:

$$
\begin{aligned}
q^n &= b \\
q^{n-1} &= Aq^n + a_1 q^n \\
q^{n-2} &= Aq^{n-1} + a_2 q^n \\
&\;\cdot \\
q^1 &= Aq^2 + a_{n-1} q^n
\end{aligned}
\tag{6.16}
$$

Η αντίστροφη μήτρα $P = Q^{-1}$ υπάρχει γιατί $\det Q \neq 0$. Πράγματι από τις σχέσεις (6.16) προκύπτουν οι σχέσεις:

$$
\begin{aligned}
q^n &= b \\
q^{n-1} &= Ab + a_1 b \\
q^{n-2} &= A^2 b + a_1 Ab + a_2 b \\
&\;\cdot \\
q^1 &= A^{n-1} b + a_1 A^{n-2} b + \ldots + a_{n-1} b
\end{aligned}
\tag{6.17}
$$

Επειδή το σύστημα είναι ελέγξιμο οι στήλες $A^i b$ $i=0,1,\ldots,n-1$ της μήτρας ελεγξιμότητας $U = \begin{bmatrix} b & Ab & A^2 b & \ldots & A^{n-1} b \end{bmatrix}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες. Άρα και τα διανύσματα q^i που ορίζονται από τις σχέσεις (6.17) είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Συνεπώς ισχύει η σχέση $det\, Q \neq 0$.

Με τον μετασχηματισμό $\bar{x} = Px$ το ισοδύναμο σύστημα θα έχει

$$\bar{A} = PAP^{-1},\ \bar{B} = PB,\ \bar{C} = CP^{-1},\ \bar{D} = D$$

ή

$$\bar{A} = Q^{-1}AQ,\ \bar{B} = Q^{-1}B,\ \bar{C} = CQ,\ \bar{D} = D.$$

Ισχύει όμως ότι:

$$AQ = \begin{bmatrix} Aq^1 & Aq^2 & \ldots & Aq^n \end{bmatrix}$$

και από τις (6.17) προκύπτει η σχέση

$$
\begin{aligned}
Aq^1 &= A\left(A^{n-1} + a_1 A^{n-2} + \ldots + a_{n-1}\right)b + a_n b - a_n b = \\
&= \left(A^n + a_1 A^{n-1} + \ldots + a_{n-1} A + a_n I\right)b - a_n b = \\
&= -a_n b
\end{aligned}
$$

γιατί κάθε τετραγωνική μήτρα ικανοποιεί την χαρακτηριστική της εξίσωση:

$$A^n + a_1 A^{n-1} + \ldots + a_{n-1} A + a_n I = 0.$$

Άρα:

$$Aq^1 = -a_n q^n =$$

$$= 0q^1 + 0q^2 + \ldots + 0q^{n-1} - a_n q^n =$$

$$= Q\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ -a_n \end{bmatrix}$$

Επίσης από την (6.16) θα έχουμε:

$$Aq^2 = q^1 - a_{n-1} q^n =$$
$$= q^1 + 0q^2 + \ldots + 0q^{n-1} - a_{n-1} q^n =$$
$$= Q\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ . \\ -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

και τελικά:

$$Aq^n = q^{n-1} - a_1 q^n = Q\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ -a_1 \end{bmatrix}.$$

Άρα:

$$AQ = Q\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}$$

και

$$\overline{A} = Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}$$

Εξάλλου από τις (6.16) προκύπτει ότι:

$$b = q^n = 0q^1 + 0q^2 + \dots + 0q^{n-2} + 1q^n = \begin{bmatrix} q^1 & \dots & q^n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Άρα:

$$\overline{b} = Q^{-1}b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Τέλος, $\overline{C} = CQ$ δηλαδή $\overline{C}_i = Cq^i$ □