4

Επίλυση καταστατικών εξισώσεων

Ο προσδιορισμός των λύσεων των καταστατικών εξισώσεων είναι στην γενική περίπτωση μια χρονοβόρα διαδικασία και γι' αυτό τον λόγο στους αλγορίθμους σε πραγματικό χρόνο αποφεύγεται η επίλυση των εξισώσεων αυτών. Ωστόσο είναι σημαντικό να γνωρίζουμε τις μαθηματικές σχέσεις που μας δίνουν τις λύσεις των καταστατικών εξισώσεων, γιατί αφ'ενός μεν έχουμε μία ιδέα για την συμπεριφορά του συστήματος, αφ' ετέρου δε μπορούμε να στηριχθούμε στις σχέσεις αυτές για να αναπτύξουμε στην συνέχεια μια κατάλληλη για το υπό μελέτη πρόβλημα μεθοδολογία που δεν απαιτεί την επίλυση των καταστατικών εξισώσεων.

Το κεφάλαιο αυτό διαιρείται σε δύο μέρη. Στο πρώτο μέρος που αποτελείται από τις παραγράφους 4.1 έως 4.3 μελετώνται οι ιδιότητες των λύσεων των καταστατικών εξισώσεων συνεχούς χρόνου και αναπτύσσονται μέθοδοι προσδιορισμού τους. Στο δεύτερο μέρος που αποτελείται απο την παράγραφο 4.4. μελετώνται οι λύσεις των καταστατικών εξισώσεων διακριτού χρόνου.

4.1. Χρονικώς μεταβαλλόμενα συστήματα

Θεωρούμε γραμμικά δυναμικά συστήματα που περιγράφονται από τις εξισώσεις

$$\dot{x}(t)=A(t)x(t)+B(t)u(t) \qquad (4.1\alpha)$$

$$y(t)=C(t)x(t)+D(t)u(t) \qquad (4.1\beta)$$

όπου $x\in\Re^n$, $u\in\Re^m$, $y\in\Re^p$, $A\in\Re^{nxm}$, $C\in\Re^{pxn}$ και $D\in\Re^{pxm}$. Υποθέτουμε ότι τα στοιχεία της μήτρας A είναι συνεχείς συναρτήσεις του t, ώστε για κάθε αρχική κατάσταση $x(t_0)=x_0$ και κάθε κατά τμήματα συνεχή είσοδο $u(t)$ να υπάρχει μια και μοναδική λύση της εξισώσεως (4.1α). Για να φαίνεται η εξάρτηση των λύσεων της εξισώσεως (4.1α) από την αρχική κατάσταση $x(t_0)=x_0$ και την είσοδο u θα χρησιμοποιούμε συχνά τον συμβολισμό $x(t;t_0,x_0,u)$ ή απλώς $x(t;t_0,x_0)$ όταν $u(t)=0$.

Οπως έχει ήδη αναφερθεί, τα δυναμικά χαρακτηριστικά του συστήματος περιγράφονται από την διαφορική εξίσωση (4.1α). Η δεύτερη αλγεβρική εξίσωση (4.1β) μπορεί να θεωρηθεί ότι περιγράφει ένα στιγμιαίο σύστημα με έξοδο την $u(t)$ και εισόδους τις x και u. Ετσι η προσοχή μας θα εντοπισθεί κυρίως στην δυναμική εξίσωση (4.1α). Θα θεωρήσουμε διαδοχικά τρείς περιπτώσεις. Στην αρχή θα προσδιορίσουμε την απόκριση μηδενικής εισόδου υποθέτοντας ότι $u(t)=0$. Στην συνέχεια θα προσδιορίσουμε την απόκριση μηδενικής καταστάσως. Στην περίπτωση αυτή το σύστημα θεωρείται ότι βρίσκεται σε ηρεμία την χρονική στιγμή t_0 που αρχίζει η παρατήρηση. Το τελευταίο στάδιο θα είναι ο προσδιορισμός της πλήρους αποκρίσεως, δηλαδή της αποκρίσεως σε μη μηδενική είσοδο και μηδενικές αρχικές συνθήκες.

4.1.1 Απόκριση μηδενικής εισόδου

Σαν απόκριση μηδενικής εισόδου ορίζουμε την έξοδό του συστήματος όταν $u(t)=0$. Στην περίπτωση αυτή η έξοδος δίδεται από την σχέση

$$y(t)=C(t)x(t;t_0,x_0)$$

όπου $x(t;t_0,x_0)$ είναι ή λύση της εξισώσεως

$$\dot{x}(t)=A(t)x(t) \qquad (4.2)$$

με αρχική συνθήκη $x(t_0)=x_0$.

Σχετικό με τις λύσεις της διαφορικής εξισώσεως (4.2) είναι το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 4.1

Το σύνολο των λύσεων της εξισώσεως (4.2) αποτελεί ένα n-διάστατο διανυσματικό χώρο στο πεδίο των πραγματικών αριθμών.

Απόδειξη:

Η απόδειξη της πρότασης το σύνολο των λύσεων της (4.2) αποτελεί διανυσματικό χώρο στο πεδίο των πραγματικών αριθμών είναι απλή και αφήνεται σαν άσκηση. Θα αποδείξουμε στην συνέχεια ότι η διάσταση αυτού του διανυσματικού χώρου είναι ίση με n.

Συμβολίζουμε με $x_{(i)}(t)$ $i=1,2,\ldots,n$ τις λύσεις της εξισώσεως (4.2) με αρχικές συνθήκες

$$x_{(i)}(t_0)=\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ισχυριζόμαστε ότι οι λύσεις $x_{(i)}(t)$ της (4.2) είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Πράγματι, αν δεν ήσαν γραμμικά ανεξάρτητες θα υπήρχαν πραγματικοί αριθμοί a_i $i=1,2,\ldots,n$ εκ των οποίων τουλάχιστον ένας διάφορος του μηδενός, τέτοιοι ώστε να ίσχυε η σχέση

$$a_1x_{(1)}(t)+a_2x_{(2)}(t)+\ldots+a_nx_{(n)}(t)=0$$

για κάθε $t\in\Re$. Τότε όμως θα ισχύει και η σχέση

$$a_1x_{(1)}(t_0)+a_2x_{(2)}(t_0)+\ldots+a_nx_{(n)}(t_0)=0$$

ή ισοδύναμα

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Από την σχέση αυτή προκύπτει ότι $a_i=0$ $i=1,2,\ldots,n$, γεγονός που αντιφάσκει προς την υπόθεση ότι ένα τουλάχιστον από τα a_i είναι διάφορο του μηδενός. Αρα αποδείξαμε ότι η διάσταση του διανυσματικού χώρου των λύσεων της εξισώσεως

(4.2) είναι μεγαλύτερη ή ίση με n. Για να αποκλείσουμε την πρώτη περίπτωση θα αποδείξουμε ότι κάθε άλλη λύση της εξισώσεως (4.2) είναι γραμμικός συνδυασμός των $x_{(i)}(t)$ $i=1,2,\dots,n$.

Θεωρούμε μία λύση $x(t)$ με αρχική συνθήκη $x_0=[x_{01}\ \ x_{02} \dots x_{0n}]^T$ δηλαδή $x(t_0)=x_0$. Ισχυριζόμαστε ότι

$$x(t)=x_{01}x_{(1)}(t)+x_{02}x_{(2)}(t)+\dots+x_{0n}x_{(n)}(t) \tag{4.3}$$

Πράγματι, με αντικατάσταση στην (4.2) προκύπτει ότι η λύση που δίνεται από την σχέση (4.3) επαληθεύει την εξίσωση (4.2). Εξ' άλλου

$$x(t_0)=x_{01}x_{(1)}(t_0)+x_{02}x_{(2)}(t_0)+\dots+x_{0n}x_{(n)}(t_0)=x_0$$

Αρα η (4.3) είναι η μοναδική λύση της εξισώσεως (4.2) με αρχική συνθήκη $x(t_0)=x_0$.

Από την απόδειξη του προηγούμενου θεωρήματος προκύπτει και το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 4.2
Οι λύσεις $x_{(i)}(t)$ $i=1,2,\dots,n$ της εξισώσεως (4.2) με αρχικές συνθήκες τα σημεία $x_{(1)}(t_0)=[1\ 0\ 0 \dots 0]^T$, $x_{(2)}(t_0)=[0\ 1\ 0 \dots 0]^T$ ... $x_{(n)}(t_0)=[0\ 0\ 0 \dots 1]^T$ αντίστοιχα, αποτελούν βάση του διανυσματικού χώρου των λύσεων της εξισώσεως (4.2).

Η σημασία του θεωρήματος φαίνεται στον ορισμό 4.1 και στο θεώρημα που ακολουθεί.

Ορισμός 4.1
Η μήτρα $\Phi(t,\tau)$ που έχει σαν στήλες τις λύσεις $x_{(i)}(t;\tau,x_{(i)}(\tau))$ $i=1,2,\dots,n$ του συστήματος (4.2) με αρχικές συνθήκες τα σημεία $x_{(1)}(\tau)=[1\ \ 0 \dots 0]^T$, $x_{(2)}(\tau)=[0\ 1 \dots 0]^T$,..., $x_{(n)}(\tau)=[0\ \ 0 \dots 1]^T$ ονομάζεται μήτρα διελεύσεως της καταστάσως ή απλά μήτρα διελεύσεως του συστήματος (4.1).

Θεώρημα 4.3
Οι λύσεις της εξισώσεως (4.2) δίνονται από την σχέση

$$x(t;t_0,x_0)=\Phi(t,t_0)x_0$$

Απόδειξη:

Θεωρούμε την αρχική κατάσταση $x_0=[x_{01}\ \ x_{02} \dots x_{0n}]^T$. Οπως δείξαμε στο θεώρημα 4.1, η λύση $x(t;t_0,x_0)$ δίνεται από την σχέση (4.3). Από τη σχέση αυτή και τον ορισμό 4.1 προκύπτει ότι

$$x(t;t_0,x_0) = [x_{(1)}(t)\ x_2(t) \ldots x_{(n)}(t)] \begin{bmatrix} x_{01} \\ x_{02} \\ \vdots \\ x_{0n} \end{bmatrix} =$$

$$= \Phi(t,t_0)x_0$$

ο.ε.δ.

Σύμφωνα λοιπόν με το τελευταίο θεώρημα, αν γνωρίζουμε την μήτρα διελεύσεως της καταστάσως $\Phi(t,t_0)$ (state transition matrix, matrice de transition de l'etat) ενός γραμμικού συστήματος, τότε μπορούμε να υπολογίσουμε την κατάσταση του συστήματος για οποιαδήποτε αρχική κατάσταση x_0 και σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή t. Αυτό σημαίνει ότι η μήτρα διελεύσεως περιέχει όλα τα χαρακτηριστικά της δυναμικής συμπεριφοράς ενός γραμμικού συστήματος. Εξ' άλλου, όπως θα δούμε σε επόμενη παράγραφο, η γνώση της μήτρας διελεύσεως είναι επίσης απαραίτητη για τον προσδιορισμό της αποκρίσεως μηδενικής καταστάσως και της πλήρους αποκρίσεως ενός γραμμικού δυναμικού συστήματος

Παράδειγμα 4.1

Θεωρούμε το δυναμικό σύστημα που περιγράφεται από τις καταστατικές εξισωσεις

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -1 & e^{2t} \\ 0 & -2 \end{bmatrix} x(t) \tag{4.4}$$

$$y(t)=x(t)$$

Η εξίσωση (4.4) γράφεται

$$\dot{x}_1(t) = -x_1(t)+e^{2t}x_2(t) \tag{4.5α}$$

$$\dot{x}_2(t) = -2x_2(t) \tag{4.5β}$$

Από την (4.5β) προκύπτει ότι

$$x_2(t,t_0,x_{01},x_{02})=e^{-2(t-t_0)}\ x_{02}$$

και αντικαθιστώντας στην (4.5α) έχουμε την εξίσωση

$$\dot{x}_1(t) = -x(t)+e^{2t_0}\, x_{02}$$

της οποίας η λύση δίδεται από την σχέση

$$x_1(t,t_0,x_{01},x_{02})=e^{-(t-t_0)}x_{01}+(1-e^{-(t-t_0)})e^{2t_0}x_{02} \tag{4.7}$$

Σύμφωνα με τον ορισμό 4.1 η μήτρα διελεύσεως δίδεται από την σχέση

$$\Phi(t,t_0)=\begin{bmatrix} x_1(t;t_0,1,0) & x_1(t;t_0,0,1) \\ x_2(t;t_0,1,0) & x_2(t;t_0,0,1) \end{bmatrix}$$

Αρα

$$\Phi(t,t_0)=\begin{bmatrix} e^{-(t-t_0)} & 1-e^{-(t-t_0)}e^{2t_0} \\ 0 & e^{-2(t-t_0)} \end{bmatrix} \tag{4.8}$$

Αποδείξαμε ότι το σύνολο των λύσεων του συστήματος (4.2) αποτελεί n-διάστατο διανυσματικό χώρο. Επομένως οποιοδήποτε σύνολο n γραμμικά ανεξάρτητων λύσεων της (4.2) αποτελεί βάση αυτού του διανυσματικού χώρου. Σχετικός με μία τέτοια βάση είναι ο παρακάτω ορισμός της θεμελιώδους μήτρας (fundamental matrix).

Ορισμός 4.2
Μία μήτρα

$$\Psi(t)=[\psi_{(1)}(t)\ \ \psi_{(2)}(t) \ldots \psi_{(n)}(t)]$$

της οποίας οι στήλες $\psi_{(i)}(t)$ $i=1,2,\ldots,n$ είναι n γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της (4.2) ονομάζεται θεμελιώδης μήτρα της εξισώσεως (4.2).

Παράδειγμα 4.2

Θεωρούμε πάλι την εξίσωση (4.4). Θέτοντας στις σχέσεις (4.6) και (4.7) τις τιμές $t_0=0$, $x_{01}=1$, $x_{02} = 1$ έχουμε την λύση

$$\psi_{(1)}(t)=[\,1 \quad e^{-2t}]^T$$

Θέτοντας τώρα στις ίδιες σχέσεις τις τιμές $t_0=1$, $x_{01}=0$ και $x_{02}=-1$, έχουμε μία άλλη λύση της (4.2):

$$\psi_{(2)}(t)= [-(1-e^{-(t-1)})e^2 \qquad -e^{-2(t-1)}]^T$$

Η μήτρα

$$\Psi(t)= \begin{bmatrix} 1 & -(1-e^{-(t-1)})e^{2} \\ e^{-2t} & -e^{-2(t-1)} \end{bmatrix} \qquad (4.9)$$

είναι μία θεμελιώδης μήτρα της εξισώσεως (4.2) γιατί τα διανύσματα $\psi_{(1)}(t)$ και $\psi_{(2)}(t)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Είναι φανερό ότι η εξίσωση (4.2) έχει άπειρες θεμελιώδεις μήτρες ενώ η μήτρα διελεύσεως είναι μοναδική (γιατί); Η σχέση μεταξύ των θεμελιωδών μητρών και της μήτρας διελεύσεως προσδιορίζεται στο θεώρημα 4.5. Για να αποδείξουμε το θεώρημα αυτό θα χρησιμοποιήσουμε το παρακάτω αποτέλεσμα.

Θεώρημα 4.4.
Αν $\Psi(t)$ είναι μία θεμελιώδης μήτρα της εξισώσεως (4.2) τότε $det\Psi(t)\neq 0$ γιά κάθε $t_0 \in (-\infty, t\infty)$

Απόδειξη:

Αν δε ίσχυε το θεώρημα, τότε θα υπήρχε ένα $t_0\in(-\infty,+\infty)$ τέτοιο ώστε $det\Psi(t_0)=0$. Συνεπώς οι στήλες $\psi_{(i)}(t_0)$ της $\Psi(t_0)$ θα ήσαν γραμμικά εξαρτημένες και θα υπήρχαν πραγματικοί αριθμοί $a_1, a_2,...a_n$, από τους οποίους ένας τουλάχιστον διάφορος του μηδενός, τέτοιοι ώστε

$$a_1\psi_{(1)}(t_0)+a_2\psi_{(2)}(t_0)+...+a_n\psi_{(n)}(t_0)=0$$

Αν ορίσουμε

$$\psi(t)=a_1\psi_{(1)}(t)+a_2\psi_{(2)}(t)+...+a_n\psi_n(t)$$

τότε η $\psi(t)$ θα ήταν λύση της εξισώσεως (4.2) και θα ίσχυε η σχέση $\psi(t_0)=0$. Η λυση όμως της (4.2) που περνά από το σημείο 0 ειναι μοναδική και ισχύει $\psi(t)=0$ για κάθε $t_0\in(-\infty,+\infty)$, δηλαδή

$$a_1\psi_{(1)}(t)+a_2\psi_{(2)}(t)+...+a_n\psi_n(t)=0$$

Επειδή τα διανύσματα $\psi_{(i)}(t)$ $i=1,2,...,n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, από την τελευταία σχέση προκύπτει ότι $a_i=0$ $i=1,2,...,n$. Ομως το αποτέλεσμα αυτό αντιφάσκει με την αρχική υπόθεση ότι ένας τουλάχιστον από τους πραγματικούς αριθμούς a_i είναι διάφορος του μηδενός. Αρα, οι στήλες της θεμελιώδους μήτρας $\Psi(t)$ είναι γραμμικά αναξάρτητες. □

Σύμφωνα με το τελευταίο θεώρημα μία θεμελιώδης μήτρα $\Psi(t)$ έχει αντίστροφο γιά κάθε $t_0\in(-\infty,+\infty)$. Μπορούμε λοιπόν να παρουσιάσουμε το

Θεώρημα 4.5
Αν $\Psi(t)$ είναι μία θεμελιώδης μήτρα και $\Phi(t,t_0)$ η μήτρα διελεύσεως της εξισώσεως (4.2) τότε ισχύει η σχέση

$$\Phi(t,t_0)=\Psi(t)\Psi^{-1}(t_0) \tag{4.10}$$

για κάθε $t_0 \in (-\infty,+\infty)$.

Απόδειξη:
Εστω $\psi_{(i)}(t)$ η i-στή στήλη της $\Psi(t)$. Η $\psi_{(i)}(t)$ είναι λύση της εξισώσεως (4.2). Αρα, σύμφωνα με το Θεώρημα 4.3, ικανοποιεί την σχέση

$$\psi_{(i)}(t)=\Phi(t,t_0)\ \psi_{(i)}(t_0)$$

Συνεπώς

$$[\psi_{(1)}(t)\ \ \psi_{(2)}(t) \ldots\ \psi_{(n)}(t)]=$$

$$=\Phi(t,t_0)[\psi_{(1)}(t_0)\ \ \psi_{(2)}(t_0)\ldots\ldots\ \psi_{(n)}(t_0)]$$

ή`

$$\Psi(t)=\Phi(t,t_0)\Psi(t_0)$$

ή, τελικά

$$\Psi(t)\Psi^{-1}(t_0)=\Phi(t,t_0)$$

γιατί, σύμφωνα με το Θέωρημα 4.4, ισχύει η σχέση $det\Psi(t)\neq 0$ γιά καθε $t_0 \in (-\infty,+\infty)$.□

Το θεώρημα αυτό μας δίνει και ένα άλλον τρόπο υπολογισμού της μήτρας διελεύσεως: Προσδιορίζουμε n γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της εξισώσεως (4.2), σχηματίζουμε μια θεμελιώδη μήτρα $\Psi(t)$ και υπολογίζουμε την μήτρα διελεύσεως $\Phi(t,t_0)$ από την σχέση (4.10).

Παράδειγμα 4.3
Θεωρούμε πάλι το σύστημα που περιγράφεται από την εξίσωση του οποίου μια θεμελιώδης μήτρα $\Psi(t)$ δίδεται από την σχέση (4.9). Για να εφαρμόσουμε το Θεώρημα 4.5 υπολογίζουμε τήν μήτρα $\Psi^{-1}(t_0)$:

$$\Psi^{-1}(t_0)=\begin{bmatrix} e^{t_0-1} & -(1-e^{-(t_0-1)})e^{3t_0-1} \\ e^{t_0-3} & -e^{3(t_0-1)} \end{bmatrix}$$

Εύκολα επαληθεύεται ότι

$$\Psi(t)\Psi^{-1}(t_0)=\Phi(t,t_0)$$

όπου $\Phi(t,t_0)$ είναι η μήτρα διελεύσεως του συστήματος που δίδεται από την σχέση (4.8).

Χρησιμοποιώντας την σχέση (4.10) μπορούμε να αποδείξουμε εύκολα τις παρακάτω ιδιότητες της μήτρας διελεύσεως.

1. $\Phi(t_0,t_0)=I_n$

2. $\Phi^{-1}(t,t_0)=\Phi(t_0,t)$

3. $\Phi(t_2,t_0)=\Phi(t_2,t_1)\ \Phi(t_1,t_0) \qquad \forall\, t_1,t_2,\ t_0\in(-\infty,+\infty)$

Σύμφωνα με την τελευταία ιδιότητα, που ονομάζεται και ιδιότητα ημιομάδας, αν $x(t;t_0,x_0)$ είναι η λύση της (4.2) με αρχική συνθηκη $x(t_0)=x_0$, τότε για κάθε $t_1,t_2\in(-\infty,+\infty)$ ισχύουν οι σχέσεις

$$x(t_1;t_0,x_0))=\Phi(t_1,t_0)x_0$$

και

$$x(t_2;t_0,x_0)=\Phi(t_2,t_0)x_0=\Phi(t_2,t_1)\Phi(t_1,t_0)x_0$$

Αρα

$$x(t_2;t_0,x_0)=\Phi(t_2,t_1)x(t_1,t_0,x_0)$$

για κάθε $t_0,t_1,t_2\in(-\infty,+\infty)$.

4.1.2. Απόκριση μηδενικής καταστάσεως

Θα εξετάσουμε τώρα την περίπτωση που το σύστημα βρίσκεται σε ηρεμία την χρονική στιγμή t_0, δηλαδή $x(t_0)=0$. Συμβολίζουμε με $x(t;t_0,0,u)$ την λύση της εξισώσεως

$$\dot{x}(t)=A(t)x(t)+B(t)u(t) \tag{4.11}$$

όταν εφαρμόζεται η είσοδος $u(.)$ και $x(t_0)=0$

Θεώρημα 4.6
Αν $x(t_0)=0$ τότε η λύση της (4.11) δίνεται από την σχέση

$$x(t;t_0,0,u)=\int_{t_0}^{t}\Phi(t,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau \tag{4.12}$$

όπου $\Phi(t,\tau)$ είναι η μήτρα διελεύσεως του συστήματος (4.1)

<u>Απόδειξη:</u>
Επειδή έχουμε υποθέσει ότι ικανοποιούνται οι συνθήκες μοναδικότητας των λύσεων, αρκεί με αντικατάσταση να δείξουμε ότι η $x(t;t_0,0,u)$ που δίνεται από την σχέση (4.12) επαληθεύει την εξίσωση (4.11). Πράγματι

$$\dot{x}(t;t_0,0,u)=\frac{\theta}{\theta t}\int_{t_0}^{t}\Phi(t,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau =$$

$$=\int_{t_0}^{t}\frac{\theta}{\theta t}\Phi(t,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau+\Phi(t,t)B(t)u(t)=$$

$$=\int_{t_0}^{t}A(t)\Phi(t,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau+B(t)u(t)=$$

$$=A(t)\,x(t;t_0,0,u)+B(t)u(t)$$

Αν λάβουμε τώρα ύπ' όψιν και την εξίσωση εξόδου (4.1β) του συστήματος, τότε ή απόκριση μηδενικής καταστάσως δίδεται από την σχέση

$$y(t)=C(t)\int_{t_0}^{t}\Phi(t,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau+D(t)u(t) \tag{4.13}$$

Οπως είδαμε, η σχέση αυτή ισχύει όταν το σύστημα βρίσκεται σε ηρεμία την χρονική στιγμή t_0. Το σύστημα εξ άλλου είναι γραμμικό. Αρα όπως προκύπτει από το Θεώρημα 3.1 η σχέση (4.13) μπορεί να τεθεί υπο την μορφή

$$y(t)=\int_{t_0}^{t} H(t,\tau)u(\tau)d\tau$$

όπου $H(t,\tau)$ είναι η μήτρα κρουστικών αποκρίσεων του συστήματος. Πράγματι από την (4.13) προκύπτει ότι

$$y(t)=\int_{t_0}^{t} C(t)\Phi(t,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau+\int_{t_0}^{t}\delta(t-\tau)D(\tau)u(\tau)d\tau=$$

$$=\int_{t_0}^{t}[C(t)\Phi(t,\tau)B(\tau)+\delta(t-\tau)D(\tau)]u(\tau)d\tau$$

Αρα η μήτρα κρουστικών αποκρίσεων του συστήματος (4.1) δίδεται από την σχέση

$$\boxed{H(t,\tau)=C(t)\Phi(t,\tau)B(\tau)+D(t)\delta(t-\tau)} \qquad (4.14)$$

Παράδειγμα 4.4

Θεωρούμε το σύστημα που περιγράφεται από τις εξισώσεις

$$\dot{x}(t)=\begin{bmatrix} -1 & e^{2t} \\ 0 & -2 \end{bmatrix}x(t)+u(t)$$

$$y(t)=[-1 \quad 1]x(t)+3u(t)$$

Θα υπολογίσουμε την απόκριση του συστήματος στην περίπτωση που βρίσκεται σε ηρεμία την χρονική στιγμή t_o και η είσοδος του είναι η $u(t)=2s(t-t_0)$ όπου $s(t)$ είναι η μοναδιαία βηματική συνάρτηση.

'Οπως είδαμε στο παράδειγμα 4.1, η μήτρα διελεύσεως του συστήματος δίνεται από την σχέση (4.8). Ετσι από την σχέση (4.13) προκύπτει ότι

$$y(t)=[-1\ \ 1]\int_{t_0}^{t}\begin{bmatrix} e^{-(t-\tau)} & (1-e^{-(t-\tau)})e^{2\tau} \\ 0 & e^{-2(t-\tau)} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}2s(\tau-t_0)d\tau+6s(t-t_0)=$$

$$=\left[2[-1\ \ 1]\int_{t_0}^{t}\begin{bmatrix} (1-e^{-(t-\tau)})e^{2\tau} \\ e^{-2(t-\tau)} \end{bmatrix}d^{\mathrm{TM}}+6\right]s(t-t_0)=$$

$$=\left[2[-1\ \ 1]\begin{bmatrix} \frac{1}{6}e^{2t}-\frac{1}{2}e^{2t}+\frac{1}{3}e^{-(t-3t_0)} \\ \frac{1}{2}(1-e^{-2(t-t_0)}) \end{bmatrix}+6\right]s(t-t_0)=$$

$$=\left[-\frac{1}{3}e^{2t}+e^{2t_0}-\frac{2}{3}e^{-(t-3t_0)}-e^{-2(t-t_0)}+7\right]s(t-t_0)$$

Εξ άλλου η κρουστική απόκριση του συστήματος υπολογίζεται από την σχέση (4.14).

$$h(t,\tau)=2e^{2\tau}(e^{-2t}+e^{-(t-\tau)}-1)+3\delta(t-\tau)$$

4.1.3 Πλήρης απόκριση

Είμαστε τώρα σε θέση να προσδιορίσουμε την απόκριση του συστήματος (4.1) στην γενική περίπτωση όπου και η αρχική κατάσταση x_0 και η είσοδος u είναι μη μηδενικές

Θεώρημα 4.7
Η λύση $x(t;t_0,x_0,u)$ της εξισώσεως (4.1a) δίνεται από την σχέση

$$x(t;t_0,x_0,u)=\Phi(t,t_0)x_0+\int_{t_0}^{t}\Phi(t,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau$$

Η απόδειξη είναι προφανής και γίνεται με αντικατάσταση στην καταστατική εξίσωση (4.1α).

Από το θεώρημα αυτό προκύπτει ότι η έξοδος του συστήματος δίνεται από την σχέση

$$y(t)=C(t)\,\Phi(t,t_0)x_0+C(t)\int_{t_0}^{t}\Phi(t,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau+D(t)u(t)$$

είναι δηλαδή άθροισμα της εξόδου μηδενικής καταστάσως και της εξόδου μηδενικής εισόδου.

4.2. Χρονικώς αμετάβλητα συστήματα

Εξετάζουμε τώρα την περίπτωση γραμμικών χρονικά αμετάβλητων δυναμικών συστημάτων που περιγραφονται από τις καταστατικές εξισώσεις

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t) \tag{4.15α}$$

$$y(t)=Cx(t)+Du(t) \tag{4.15β}$$

που οι A, B, C και D είναι πραγματικές χρονικά αμετάβλητες μήτρες.

Οπως είδαμε στις προηγούμενες παραγράφους, το πρόβλημα προσδιορισμού των λύσεων των εξισώσεων αυτών είναι πρακτικά πρόβλημα υπολογισμού της μήτρας διελεύσεως $\Phi(t,t_0)$. Η μήτρα διελεύσεως του γραμμικού χρονικά αμετάβλητου συστήματος (4.15) δίνεται από την σχέση (γιατί ;)

$$\Phi(t,t_0) = exp[A(t-t_0)]$$

Η μήτρα $exp(At)$ ορίζεται από την σειρά

$$exp(At)=I_n+At+\frac{A^2t^2}{2!}+\frac{A^3t^3}{3!}+\cdots$$

Μπορεί εύκολα να αποδειχθεί ότι η μήτρα $exp(At)$ έχει τις εξής ιδιότητες:

1. $exp(0_n)=I_n$
2. $exp(-At)=[exp(At)]^{-1}$
3. $A\,exp(At)= exp(At).A$
4. $\frac{d}{dt}exp(At) = A\,exp(At)$

Σύμφωνα με τα παραπάνω η πλήρης απόκριση ενός γραμμικού χρονικά αμετάβλητου συστήματος δίνεται από την σχέση

$$y(t)=C[exp[A(t-t_0)]]x_0+C\int_{t_0}^{t}[exp[A(t-\tau)]\ Bu(\tau)d\tau+Du(t)$$

Μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε και τις άλλες μορφές μαθηματικών προτύπων ενός γραμμικού χρονικά αμετάβλητου δυναμικού συστήματος. Η μήτρα κρουστικών αποκρίσεων $H(t\text{-}\tau)$ ενός γραμμικού χρονικά αμετάβλητου συστήματος που βρίσκεται σε ηρεμία την χρονική στιγμή τ υπολογίζεται από την σχέση

$$H(t\text{-}\tau)=C\int_{t_0}^{t}[\exp[A(t-\tau^*)]]\delta(\tau^*\text{-}\tau)d\tau^*+D\delta(t\text{-}\tau)$$

Συνεπώς

$$H(t\text{-}\tau)=\begin{cases}0 & \text{αν} \quad t<\tau\\ C[\exp[A(t-\tau)]]\mathrm{B} & \text{αν} \quad t\geq\tau\end{cases} \tag{4.16}$$

Εξ' αλλου η μήτρα συναρτήσεων μεταφοράς ενός γραμμικού χρονικά αμετάβλητου δυναμικού συστήματος υπολογίζεται από την σχέση

$$H(s)=\boldsymbol{L}\left\{\mathrm{C}\int_{0^-}^{t}[\exp[\mathrm{A}(t-\tau^*)]]\mathrm{B}\delta(\tau^*)d\tau^*+\mathrm{D}\delta\delta(t\right\}=$$
$$=C\boldsymbol{L}[exp(At)]B+D$$

Επειδή

$$\boldsymbol{L}\left\{\frac{d}{dt}exp(At)\right\}=s\boldsymbol{L}\{exp(At)\}\text{-}\ exp(0_n)=s\boldsymbol{L}\{exp(At)\}\text{-}1_n$$

και

$$\boldsymbol{L}\left\{\frac{d}{dt}exp(At)\right\}=\boldsymbol{L}\{Aexp(At)\}=A\boldsymbol{L}\{exp(At)\}$$

ισχύει η σχέση

$$s\boldsymbol{L}\{exp(At)\}\text{-}1_n=A\ \boldsymbol{L}\{exp(At)\}$$

Από την σχέση αυτή προκυπτει ότι

$$L\{exp(At)\}=(s1_n-A)^{-1} \quad (4.17)$$

Αρα

$$H(s)=C(s1_n-A)^{-1}B+D \quad (4.18)$$

4.3. Υπολογισμός της μήτρας διελεύσεως

Είδαμε στις προηγούμενες παραγράφους ότι το πρώτο βήμα στον προσδιορισμό της εξόδου ενός γραμμικού δυναμικού συστήματος είναι ο υπολογισμός της μήτρας διελεύσεως. Ενας αριθμητικός τρόπος υπολογισμού της μήτρας διελεύσεως είναι η επίλυση με υπολογιστή της μητρικής διαφορικής εξισώσεως

$$\dot{\Phi}(t,t_0) = A(t)\Phi(t,t_0)$$

με αρχική συνθήκη $\Phi(t_0,t_0)=1_n$. Στην συνέχεια θα παρουσιάσουμε μερικές μεθόδους αναλυτικού προσδιορισμού της μήτρας διελεύσεως στις οποίες μπορεί να στηριχθεί και η ανάπτυξη κατάλληλων αλγορίθμων για τον προσδιορισμό της με την βοήθεια υπολογιστή.

4.3.1. Χρονικώς μεταβαλλόμενα συστήματα

Ο αναλυτικός προσδιορισμός της μήτρας διελεύσεως ενός γραμμικού χρονικά μεταβαλλόμενου συστήματος δεν είναι πάντοτε δυνατός. Σε ειδικές περιπτώσεις η μήτρα διελεύσεως μπορεί να υπολογισθεί με μία από τις παρακάτω μεθόδους.

Πρώτη μέθοδος

Αν μπορούμε να προσδιορίσουμε n γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις $\psi_i(t)$ i=1,2,...,n της εξισώσεως

$$\dot{\psi}_{(i)}(t) = A(t)\psi_{(i)}(t)$$

τότε η μήτρα διελεύσεως υπολογίζεται από την σχέση

$$\Phi(t,t_0) = \Psi(t)\Psi^{-1}(t_0)$$

όπου Ψ(t) είναι η θεμελιώδης μήτρα

$$\Psi(t) = [\psi_{(1)}(t)\ \ \psi_{(2)}(t) \dots \psi_{(n)}(t)]$$

Δεύτερη μέθοδος

Αν οι μήτρες A(t) και $\int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau$ είναι αντιμεταθετές για κάθε $t \in (-\infty,+\infty)$, τότε η μήτρα διελεύσεως υπολογίζεται από την σχέση

$$\Phi(t,t_0)=exp\left[\int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau\right]$$

Πράγματι

$$\Phi(t_0,t_0)=exp\left[\int_{t_0}^{t_0} A(\tau)d\tau\right]=I_n$$

και

$$\dot{\Phi}(t,t_0)=\frac{\partial}{\partial t}\exp\left[\int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau\right]=$$

$$=exp\left[\int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau\right]\frac{\partial}{\partial t}\int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau =$$

$$=exp\left[\int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau\right]A(t)$$

Τέλος, αν η $A(t)$ και η $\int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau$ είναι αντιμεταθετές, τότε το ίδιο συμβαίνει και με τις A(t) και $\exp\left[\int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau\right]$. Συνεπώς

$$\dot{\Phi}(t,t_0) = A(t)\, exp\left[\int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau\right] =$$
$$= A(t)\Phi(t,t_0)$$

Παράδειγμα 4.5

Εστω το σύστημα $\dot{x}(t) = Ax(t)+Bu(t)$ όπου

$$A(t) = \begin{bmatrix} 2 & e^{-t} \\ -e^{-t} & 2 \end{bmatrix}$$

Υπολογίζουμε την μήτρα

$$\int_{t_0}^{t} \acute{A}(\hat{o})d\hat{o} = \begin{bmatrix} 2(t-t_0) & -(e^{-t}-e^{t_0}) \\ e^{-t}-e^{t_0} & 2(t-t_0) \end{bmatrix}$$

Οι μήτρες $A(t)$ και $\int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau$ είναι αντιμεταθετές γιά κάθε $t \in (-\infty,+\infty)$. Αρα

$$\Phi(t,t_0) = exp\begin{bmatrix} 2(t-t_0) & -(e^{-t}-e^{t_0}) \\ e^{-t}-e^{t_0} & 2(t-t_0) \end{bmatrix}$$

4.3.2. Χρονικώς αμετάβλητα συστήματα

Η μήτρα διελεύσεως ενός χρονικά αμετάβλητου γραμμικού δυναμικού συστήματος δίνεται από την σχέση

$$\Phi(t,t_0) = exp[A(t-t_0)]$$

ο δε προσδιορισμός της ανάγεται στον υπολογισμό της μήτρας $exp[At]$.

Στην περίπτωση που η μήτρα A είναι διαγώνια δηλαδή

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

τότε η εξίσωση $\dot{x}(t)=Ax(t)$ διασπάται σε n ανεξάρτητες εξισώσεις

$$\dot{x}(t) = a_{ii}x_i \qquad i=1,2,\ldots,n$$

των οποίων οι λύσεις δίδονται από τις σχέσεις

$$x_i(t;t_0,x_{0i}) = e^{a_{ii}(t-t_0)}x_{0i} \qquad i=1,2,\ldots,n$$

Αρα στην περίπτωση αυτή

$$exp(At)=\begin{bmatrix} e^{a_{11}t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{a_{22}t} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{a_{nn}t} \end{bmatrix}$$

Στην περίπτωση που η μήτρα A δεν είναι διαγώνια μπορούμε να εφαρμόσουμε μια από τις παρακάτω μεθόδους:

Πρώτη μέθοδος:

Η μέθοδος αυτή βασίζεται στην χρηση μετασχηματισμών Laplace . Στην παράγραφο 4.2. δείξαμε ότι

$$L\,\{exp(At)\} = (sI_n - A)^{-1}$$

Αρα

$$exp(At) = L^{-1}\{(sI_n - A)^{-1}\}$$

Οταν η διάσταση της μήτρας A είναι σχετικά μεγάλη, ο υπολογισμός της αντίστροφης μήτρας της $(sI_n - A)$ μπορεί να γίνει με εφαρμογή του αλγορίθμου του

Souriau. Σύμφωνα με τον αλγόριθμο αυτόν, οι μήτρες B_i $i=1,2,...n$ και οι πραγματικοί αριθμοί a_i $i=1,2,...,n$ για τους οποίους ισχύει η προφανής σχέση

$$(sI_n-A)^{-1}=\frac{B_1 s^{n-1}+B_2 s^{n-1}+\cdots+B_n}{s^n+a_1 s^{n-1}+\cdots+a_n} \tag{4.20}$$

μπορούν να υπολογισθούν διαδοχικά από τις σχέσεις

$$\boxed{\begin{array}{ll} B_1=I_n & \\ a_i=-\dfrac{1}{i}\,trace(B_iA) & i=1,2,...,n-1 \\ B_{i+1}=B_iA+a_iI_n & i=1,2,...,n-1 \end{array}}$$

Εφαρμόζοντας τον αλγόριθμο ανάπτυξης σε απλά κλάσματα η σχέση (4.20) παίρνει την μορφή

$$(sI_n-A)^{-1}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{r=1}^{r_i}R_r\frac{1}{(s-\lambda_i)^r} \tag{4.21}$$

όπου λ_i $i=1,2,...m$ είναι οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου

$$s^n+a_1s^{n-1}+...+a^{n-1}s+a_n=0$$

και r_i η πολλαπλότητα της ρίζας λ_i. Ετσι από τις σχέσεις (4.19) και (4.21) προκύπτει τελικά ότι

$$\boxed{exp(At)=\sum_{i=1}^{m}e^{\lambda_i t}\sum_{r=1}^{r_i}R_r\frac{t^{r-1}}{(r-1)!}} \tag{4.22}$$

Παράδειγμα 4.6

Εστω ότι

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 3 & -2 \\ -4 & -5 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Η μήτρα $(sI_3\text{-}A)^{-1}$ θα δίνεται από την σχέση

$$(sI_3\text{-}A)^{-1}=\frac{B_1s^2+B_2s+B_3}{s^3+a_1s^2+a_2s+a_3}$$

όπου

$$B_1=I_3$$

$$a_1 = \text{-}trace(A) = 4$$

$$B_2 = B_1A+a_1I_3 = A+4I_3$$

$$a_2=-\frac{1}{2}trace(B_2A)=5$$

$$B_3 = B_2A+a_2I_3 = B_2A+5I_3 = A_2+4A+5I_3$$

$$a_3=-\frac{1}{3}trace(B_3A)=2$$

Αρα

$$(sI_3\text{-}A)^{-1}=\frac{B_1s^2+B_2s+B_3}{s^3+a_1s^2+a_2s+a_3}$$

ή

$$(sI_3\text{-}A)^{-1}=\frac{B_1s^2+B_2s+B_3}{s^3+a_1s^2+a_2s+a_3}$$

Μετά από ανάλυση σε απλά κλάσματα προκύπτει ότι

$$(sI_3\text{-}A)^{-1}=\frac{-4I_3-3A-A^2}{s+1}+\frac{2I_3+3A+A^2}{(s+1)^2}+\frac{I_3+2A+A^2}{s+2}$$

Τέλος, μετά από υπολογισμό των αντίστροφων μετασχηματισμών Laplace προκύπτει ότι

$$exp[At] = e^{-t}(-4I_3\text{-}3A\text{-}A^2)+te^{-t}(2I_3+3A+A^2)+e^{-2t}(I_3+2A+A^2)$$

Δεύτερη μέθοδος :

Φέρνουμε την σχέση (4.21) στην μορφή

$$exp(At)=\sum_{i=1}^{m} e^{i} \sum_{r=1}^{r_i} R_r \frac{t^{r-1}}{(r-1)!} \tag{4.24}$$

όπου λ_i $i=1,2,...,m$ είναι οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου της A, r_i η πολλαπλότητα της ρίζας λ_i και Z_{ir} είναι μήτρες διαστάσεων nxn με χρονικά αμετάβλητα στοιχεία. Για τον υπολογισμό των μητρών Z_{ir} προχωράμε ως εξής: Παραγωγίζουμε n-1 φορές την (4.24). Θέτοντας $t=0$ στην σχέση (4.24) και στις n-1 παραγώγους της, καταστρώνουμε ένα σύστημα n γραμμικών εξισώσεων από την επίλυση του οποίου προκύπτουν οι άγνωστες μήτρες Z_{ir}.

Παράδειγμα 4.7

Θεωρούμε πάλι την μήτρα (4.23) της οποίας οι ιδιοτιμές είναι λ_1=-1, λ_2=-1, και λ_3=-2. Αρα

$$exp[At] = e^{-t}Z_1+te^{-t}Z_2+e^{-2t}Z_3 \tag{4.25}$$

και παραγωγίζοντας 2 φορές έχουμε επίσης τις σχέσεις

$$Aexp[At] = -e^{-t}Z_1+e^{-t}Z_2\text{-}te^{-t}Z_2\text{-}2e^{-2t}Z_3 \tag{4.26}$$

$$A^2exp[At] = e^{-t}Z_1\text{-}e^{-t}Z_2+te^{-t}Z_2+4e^{-2t}Z_3 \tag{4.27}$$

Θέτοντας $t=0$ στις σχέσεις (4.25) - (4.27) καταστρώνουμε το γραμμικό σύστημα

$$\begin{bmatrix} I_3 \\ A \\ A^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \end{bmatrix}$$

από την επίλυση του οποίου προκύπτει ότι

$$Z_1 = -A^2\text{-}2A$$

$$Z_2 = A^2+3A+2I_3$$

$$Z_3 = A^2+2A+I_3$$

Αντικαθιστώντας τις Z_1, Z_2 και Z_3 στην (4.25) έχουμε τελικά ότι

$$exp(At)=$$

$$=\begin{bmatrix} e^{-t}+4te^{-t} & 3te^{-t} & -2te^{-t} \\ -4e^{-t}+4e^{-2t} & -3e^{-t}+4e^{-2t} & 2e^{-t}-2e^{-2t} \\ -6e^{-t}+6te^{-t}+6e^{-2t} & -6e^{-t}+6te^{-t}+6e^{-2t} & 4e^{-t}-4te^{-t}-3e^{-2t} \end{bmatrix}$$

4.4 Καταστατικές εξισώσεις διακριτού χρόνου

Θεωρούμε τώρα γραμμικά δυναμικά συστήματα διακριτού χρόνου που περιγράφονται από τις καταστατικές εξισωσεις

$$x(k+1) = A(k)x(k)+B(k)u(k) \tag{4.28α}$$

$$y(k) = C(k)x(k)+D(k)u(k) \tag{4.28β}$$

όπου $x\in \Re^n$, $u\in \Re^m$, $y\in \Re^p$, $A\in \Re^{nxn}$, $B\in \Re^{nxm}$, $C\in \Re^{pxm}$ και $D\in \Re^{pxm}$.

Θα μελετήσουμε στην αρχή τις λύσεις στην περίπτωση μηδενικής εισόδου και στην συνέχεια θα προσδιορίσουμε την πλήρη απόκριση.

4.4.1. Απόκριση μηδενικής εισόδου

Υποθέτουμε ότι $u(k)\equiv 0$. Ετσι το σύστημα περιγράφεται από τις σχέσεις

$$x(k+1) = A(k)x(k)$$

$$y(k) = C(k)x(k)$$

Από την πρώτη εξίσωση προκύπτουν διαδοχικά οι σχέσεις

$$x(k_0+1) = A(k_0)x(k_0)$$

$$x(k_0+2) = A(k_0+1)x(k_0+1)= A(k_0+1)A(k_0)x(k_0)$$

$$\vdots$$

$$x(k) = A(k-1)A(k-2)....A(k_0+1)A(k_0)x(k_0)$$

Αν ορίσουμε

$$\Phi(k,k_0)=\begin{cases} A(k-1)A(k-2)\cdots A(k_0+1)A(k_0) & \alpha\nu \quad k>k_0 \\ I_n \quad \alpha\nu \quad k=k_0 \end{cases}$$

τότε η λύση της (4.28α) με αρχική συνθήκη $x(k_0)=x_0$ δίνεται από την σχέση

$$x(k) = \Phi(k,k_0)x_0$$

Επομένως η απόκριση μηδενικής διέγερσης είναι

$$y(k) = C(k)\Phi(k,k_0)x_0$$

Η μήτρα $\Phi(k,k_0)$ ονομάζεται *μήτρα διελεύσεως της καταστάσεως* (state transition matrix) του συστήματος (4.28) και έχει ιδιότητες αντίστοιχες με εκείνες της μήτρας διελεύσεως των γραμμικών δυναμικών συστημάτων συνεχούς χρόνου. Συγκεκριμένα, η μήτρα διελεύσεως $\Phi(k,k_0)$ ικανοποιεί την μητρική εξίσωση διαφορών

$$\Phi(k+1,k_0) = A(k)\Phi(k,k_0)$$

και έχει την ιδιότητα της ημιομάδας:

$$\Phi(k_2,k_0) = \Phi(k_2,k_1)\Phi(k_1,k_0) \qquad \forall\, k_2 \geq k_1 \geq k_0$$

Αν το σύστημα είναι χρονικά αμετάβλητο, τότε η μήτρα διελεύσεως δίνεται από την σχέση

$$\Phi(k,k_0) = A^{k-k_0}$$

από την οποία προκύπτει και η έκφραση μηδενικής εισόδου που υπολογίζεται από την σχέση

$$y(k) = C\,A^{k-k_0}\,x_0$$

που δίνει την απόκριση μηδενικής διέγερσης.

Η μήτρα διελεύσεως έχει τις παρακάτω ιδιότητες

1. $\Phi(k,k) = I_n \qquad \forall\, k$

2. $\Phi(k+1,k_0) = A(k)\Phi(k,k_0)$

3. $\Phi(k_2,k_0) = \Phi(k_2,k_1)\Phi(k_1,k_0) \quad \forall\, k_2 \geq k_1 \geq k_0$

Παράδειγμα 4.8

Ας θεωρήσουμε το σύστημα που περιγράφεται από τις σχέσεις

$$x(k)=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}x(k)+\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}u(k)$$

$$y(k)=\begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}x(k)+2u(k)$$

Αν

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

τότε

$$A^2 = 7I_2$$

και γενικά

$$A^{2k+1} = 7^k A\,, \quad A^{2k} = 7^k I_2 \qquad k=0,1,2,......$$

Συνεπώς

$$\Phi(k_2,\, k_1) = A^{\,k_2-k_1} = \begin{cases} 7^{k_2-k_1}A & \text{αν} \quad k_2-k_1 \quad \text{περιττος} \\ 7^{k_2-k_1}1_2 & \text{αν} \quad k_2-k_1 \quad \text{αρτιος} \end{cases}$$

4.4.2. Πλήρης απόκριση

Από την σχέση (4.28α) και τις ιδιότητες της μήτρας διελεύσεως προκύπτουν διαδοχικά οι σχέσεις

$$x(k_0+1) = A(k_0)x(k_0) + B(k_0)u(k_0)=$$

$$= \Phi(k_0+1,k_0)x_0 + \Phi(k_0+1,k_0+1)B(k_0)u(k_0)$$

$$x(k_0+2) = A(k_0+1)x(k_0+1) + B(k_0+1)u(k_0+1)=$$

$$= A(k_0+1)A(k_0)x_0) + A(k_0+1)B(k_0)u(k_0) + B(k_0+1)u(k_0+1)$$

$$= \Phi(k_0+2,k_0)x_0 + \Phi(k_0+2,k_0+1)B(k_0)u(k_0)+$$

$$+\Phi(k_0+2,k_0+2)B(k_0+1)u(k_0+1)$$

$$\vdots$$

$$x(k)= \Phi(k,k_0)x_0+ \sum_{j=k_0}^{k-1}\Phi(k,j+1)B(j)u(j)$$

Επομένως η πλήρης απόκριση του συστήματος υπολογίζεται από την σχέση

$$y(k)=C(k)\ \Phi(k,k_0)x_0+C(k)\sum_{j=k_0}^{k-1}\Phi(k,j+1)B(j)u(j)+D(k)u(k)$$

δηλαδή είναι το άθροισμα της αποκρίσεως μηδενικής διέγερσης

$$y(k)_{M\Delta}=C(k)\Phi(k,k_0)x_0$$

και της αποκρίσεως μηδενικής καταστάσως

$$y(k)_{MK}=C(k)\sum_{j=k_0}^{k-1}\Phi(k,j+1)B(j)u(j)+D(k)u(k)$$

Στήν περίπτωση που το σύστημα είναι χρονικά αμετάβλητο η μήτρα διελεύσεως $\Phi(k,k_0)$ είναι ίση με A^{k-k_0}. Επομένως η πλήρης απόκριση του συστήματος δίνεται από την έκφραση

$$y(k)=CA^{k-k_0}x_0+C\sum_{j=k_0}^{k-1}A^{k-j-1}Bu(j)+Du(k) \qquad \forall\, k>k_0$$

και η απόκριση μηδενικής καταστάσως από την σχέση

$$y(k)_{MK}=C\sum_{j=k_0}^{k-1}A^{k-j-1}Bu(j)+Du(k) \qquad \forall\, k>k_0$$

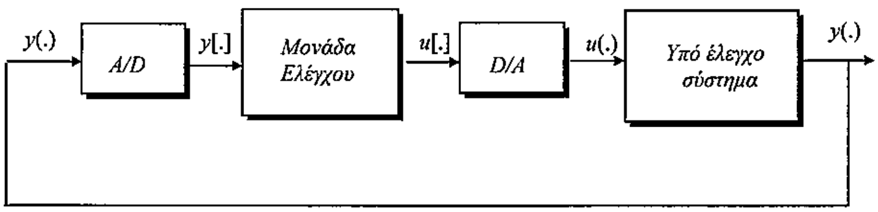
Θα κλείσουμε την παράγραφο αυτή με τον υπολογισμό της μήτρας κρουστικών αποκρίσεων. Είναι φανερό ότι

$$H(k-k^*)=C\sum_{j=k_0}^{k-1}A^{k-j-1}Bu(j)+D\delta(k-k^*)=$$

$$=CA^{k-k^*-1}B+D\delta(k-k^*)$$

4.5. Μετατροπή καταστατικών εξισώσεων συνεχούς χρόνου σε καταστατικές εξισώσεις διακριτού χρόνου

Η μετατροπή των καταστατικών εξισώσεων συνεχούς χρόνου σε εξισώσεις διακριτού χρόνου είναι το πρώτο στάδιο στον σχεδιασμό μονάδων ψηφιακού ελέγχου συστημάτων συνεχούς χρόνου. Η αρχή στην οποία βασίζεται ο ψηφιακός έλεγχος φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Σχήμα 4.1: Ψηφιακό σύστημα ελέγχου κλειστού βρόχου

Η μονάδα ελέγχου είναι ένα ψηφιακό υπολογιστικό σύστημα που παράγει μία ακολουθία σημάτων ελέγχου u_0, u_1, u_2,... τις χρονικές στιγμές t_0, t_1, t_2,... Το σήμα διακριτού χρόνου $u[.]=\{u[1],u[2],...\}$ εισάγεται στην συνέχεια σε ένα ψηφιακό-αναλογικό μετατροπέα (digital-analog converter) του οποίου η έξοδος δίνει ένα «αντίστοιχο» σήμα συνεχούς χρόνου $u(.)$ το οποίο με την σειρά του επιβάλλεται σαν είσοδος στο υπό έλεγχο σύστημα συνεχούς χρόνου. Θεωρούμε ότι το υπό έλεγχο σύστημα περιγράφεται από τις καταστατικές εξισώσεις συνεχούς χρόνου

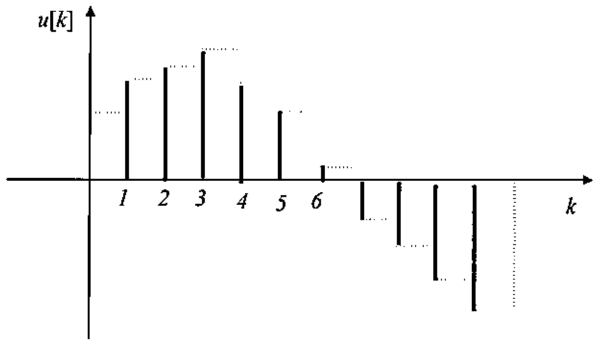
$$\dot{x}(t)=A(t)x(t)+B(t)u(t) \tag{4.29α}$$

$$y(t)=C(t)x(t)+D(t)u(t) \tag{4.29β}$$

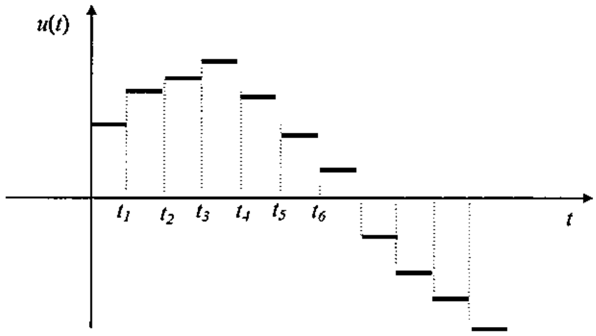
και ότι η σχέση εισόδου-εξόδου ενός τέτοιου ψηφιακού-αναλογικού μετατροπέα D/A είναι

$$u(t)=u[k] \qquad \forall t: t_k<t<t_{k-1} \tag{4.30}$$

με $t_k=kT$. Η σχέση εισόδου-εξόδου ενός τέτοιου ψηφιακού-αναλογικού μετατροπέα που είναι γνωστός με το όνομα zero-order hold φαίνεται στο σχήμα 4.2. Εξ' άλλου η σχέση εισόδου-εξόδου του αναλογικού-ψηφιακού μετατροπέα A/D φαίνεται στο σχήμα 4.3.

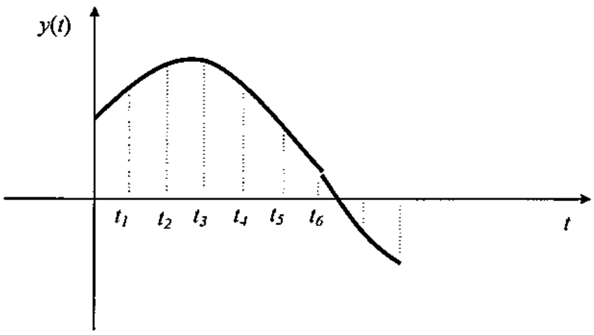


(α)

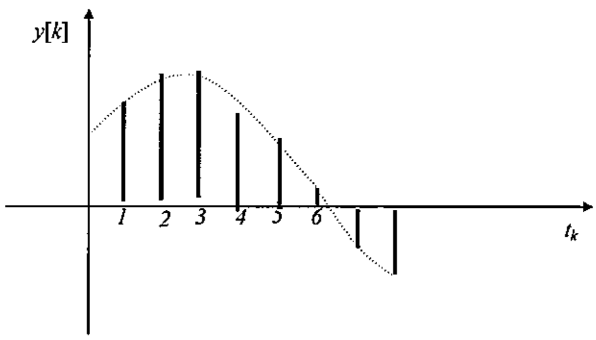


(β)

Σχήμα 4. 3: (α) Η είσοδος u[k] και (β) η έξοδος u(t) του μετατροπέα A/D.



(α)



(β)

Σχήμα 4.3: (α) Η είσοδος y(t) και (β) η έξοδος y[k] του μετατροπέα A/D.

Για να μπορεί η μονάδα ελέγχου να προσδιορίζει το κατάλληλο σήμα ελέγχου u[k] πρέπει να είναι σε θέση να προβλέπει τις συνέπειες που θα έχει ένα τέτοιο σήμα στην έξοδο $y(t)$ του υπό έλεγχο συστήματος. Επομένως θα πρέπει να είναι εφοδιασμένο με ένα πρότυπο διακριτού χρόνου.

$$x[k+1]=f(k,x[k],u[k]) \quad (4.31\alpha)$$

$$y[k]=g(k,x[k],u[k]) \quad (4.31\beta)$$

τέτοιο ώστε αν $x(t_0)=x_0$ και τα $u(t)$ και $u[k]$ συνδέονται με την σχέση (4.30) τότε να ισχύει η σχέση

$$y(t_k)=y[k]$$

για κάθε $k=0,1,\ldots..$

Είναι φανερό ότι αν θέσουμε

$$g(k,x[k],u[k])=C[k]x[k]+D[k]u[k]$$

όπου $C[k]=C(t_k)$ και $D[k]=D(t_k)$ και λάβουμε υπ'όψιν ότι $u(t_k)=u[k]$, τότε $y(t_k)=y[k]$ και συνεπώς το πρόβλημα ανάγεται στο προσδιορισμό της συναρτήσεως $f(k,x[k],u[k])$ έτσι ώστε αν $x(0)=x[0]$ και $u(t_k)=u[k]$ να ισχύει η σχέση

$$x(t_k)=x[k]$$

για κάθε $k=0,1,2,..$

Από την σχέση (4.29) προκύπτει ότι

$$x(t_{k+1})=\Phi(t_{k+1},t_k)x(t_k)+\int_{t_k}^{t_{k+1}}\Phi(t_{k+1},\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau$$

όπου $\Phi(t,\tau)$ είναι η μήτρα διελεύσεως του (4.29). Τέλος, επειδή $u(\tau)=u_k$ για κάθε $\tau{:}t_k\leq\tau<t_{k+1}$ και $t_k=kT$, η τελευταία σχέση γράφεται

$$x(t_{k+1})=\Phi((k+1)T,kT)x(kT)+\int_{t_k}^{t_{k+1}}\Phi((k+1)T,\tau)B(\tau)d\tau\ u_k$$

Επομένως το πρότυπο διακριτού χρόνου (4.31) παίρνει την μορφή

$$x[k+1]=A[k]x[k]+B[k]u[k]$$

$$y[k]=C[k]x[k]+D[k]u[k]$$

όπου

$$A[k]=\Phi((k+1)T,kT)$$

$$B[k]=\int_{t_k}^{t_{k+1}}\Phi((k+1)T,\tau)B(\tau)d\tau$$

$$C[k]=C(kT)$$

$$D[k]=D(kT)$$

Στην περίπτωση που το γραμμικό σύστημα συνεχούς χρόνου είναι χρονικώς αμετάβλητο, τότε και το αντίστοιχι σύστημα διακριτού χρόνου είναι χρονικά αμετάβλητο γιατί ισχύουν οι σχέσεις

$$A[k]=exp(A(k+1)T-kT))=exp(AT)$$

$$B[k]=\int_{kT}^{(k+1)T}exp[A((k+1)T-\tau)]Bd\tau=\int_{0}^{T}exp[A(T-\tau))]d\tau B$$

$$C[k]=C$$

$$D[k]=D$$

Από τις οποίες προκύπτει ότι οι παράμετροι του συστήματοας είναι ανεξάρτητες της χρονικής μεταβλητής *k*..

Παράδειγμα 4.9

Θεωρούμε το δυναμικό σύστημα που περιγράφεται από τις καταστατικές εξισώσεις

$$\dot{x}(t)=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix}x(t)\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}u(t)$$

$$y(t)=[-2 \quad 1]x(t)+3u(t)$$

Επειδή

$$exp\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix}T\right)=\begin{bmatrix} 3e^{-2T}-2e^{-3T} & e^{-2T}-e^{-3T} \\ 6e^{-3T}-6e^{-2T} & 3e^{-3T}-e^{-2T} \end{bmatrix}$$

και

$$\int_0^T \exp\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix}\tau\right)d\tau B=3\begin{bmatrix} e^{-3T}-3e^{-2T}+2 \\ 6e^{-2T}-4e^{-3T}-2 \end{bmatrix}$$

το ισοδύναμο σύστημα διακριτού χρόνου είναι

$$x[k+1]=A[k]x[k]+B[k]u[k]$$

$$y[k]=C[k]x[k]+D[k]u[k]$$

όπου

$$A[k]=\begin{bmatrix} 3e^{-2T}-2e^{-3T} & e^{-2T}-e^{-3T} \\ 6e^{-3T}-6e^{-2T} & 3e^{-3T}-e^{-2T} \end{bmatrix}$$

$$B[k]=3\begin{bmatrix} e^{-3T}-3e^{-2T}+2 \\ 6e^{-2T}-4e^{-3T}-2 \end{bmatrix}$$

$$C[k]=\begin{bmatrix}2 & 1\end{bmatrix}$$

$$D[k]=3$$