3

Μαθηματικά πρότυπα γραμμικών συστημάτων

3.1 Εισαγωγή

Ενα σύστημα μπορεί να περιγραφεί από διαφορετικά αλλά ισοδύναμα μαθηματικά πρότυπα. Για παράδειγμα ένα ηλεκτρικό κύκλωμα μπορεί να παρασταθεί από τις τερματικές σχέσεις των στοιχείων που το απαρτίζουν και από κατάλληλες εξισώσεις κομβικών τάσεων μπορεί όμως οι τελευταίες να αντικατασταθούν από εξισώσεις βροχικών ρευμάτων. Τα δύο σύνολα είναι διαφορετικά αλλά ισοδύναμα. Εξ'άλλου στην περίπτωση που το εν λόγω κύκλωμα είναι γραμμικό και χρονικώς αμετάβλητο, οι εξισώσεις μπορούν να διατυπωθούν είτε στο πεδίο του χρόνου οπότε έχουν την μορφή διαφορικών εξισώσεων είτε στο πεδίο της συχνότητας (με την βοήθεια του μετασχηματισμού Laplace) όποτε έχουν την μορφή αλγεβρικών εξισώσεων. Επειδή το σύνολο των μαθηματικών σχέσεων που περιγράφουν ένα σύστημα μπορεί να αποτελείται από εξισώσεις πολλών διαφορετικών μορφών όπως αλγεβρικές εξισώσεις, διαφορικές, εξισώσεις διαφορών ολοκληρωτικές ή ολοκληρωδιαφορικές η μελέτη της συμπεριφοράς ενός συστήματος μπορεί να αποδειχθεί ένα πολύ δύσκολο πρόβλημα. Για τον λόγο αυτό έχει αναπτυχθεί ένας περιορισμένος μορφών μαθηματικών προτύπων για τα οποία υπάρχουν συστηματικές μέθοδοι ανάλυσης και στα οποία μπορούν να αναχθούν τα πάσης φύσεως διαφορετικά σύνολα εξισώσεων που περιγράφουν ένα οποιοδήποτε σύστημα. Αντικείμενο του κεφαλαίου αυτού είναι η ανάπτυξη τέτοιων μαθηματικών προτύπων για γραμμικά συστήματα.

Σε μία πρώτη παράγραφο αποδεικνύουμε ότι κάθε γραμμικό σύστημα συνεχούς χρόνου μπορεί να ορισθεί από ένα συναρτησοειδές της μορφής

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(t,\tau)u(\tau)d\tau$$

όπου $H(t,\tau)$ είναι η επονομαζόμενη μήτρα κρουστικών αποκρίσεων. Στην συνέχεια θεωρούμε την κατηγορία των αιτιατών γραμμικών χρονικώς αμετάβλητων συστημάτων που βρίσκονται σε χαλάρωση την χρονική στιγμή $t=0$. Για την κατηγορία αυτή και υπό την προυπόθεση ότι υπάρχουν οι μετασχηματισμοί Laplace των εισόδων $u(s)$ και εξόδων $y(s)$ αποδεικνύουμε ότι μια ισοδύναμη περιγραφή εισόδου-εξόδου, δίνεται από σχέση της μορφής

$$y(s)=H(s)u(s)$$

όπου $H(s)$ είναι η γνωστή από την θεωρία κυκλωμάτων μήτρα συναρτήσεων μεταφοράς. Η περιγραφή γραμμικών δυναμικών συστημάτων από καταστατικές εξισώσεις είναι το αντικείμενο της επόμενης παραγράφου. Οι καταστατικές εξισώσεις γραμμικών συστημάτων συνεχούς χρόνου έχουν την μορφή

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) &= C(t)x(t) + D(t)u(t) \end{aligned}$$

Στο δεύτερο μέρος του κεφαλαίου ορίζονται τα αντίστοιχα μαθηματικά πρότυπα που περιγράφουν την συμπεριφορά γραμμικών συστημάτων διακριτού χρόνου. Αποδεικνύουμε ότι κάθε γραμμικό σύστημα διακριτού χρόνου μπορεί να περιγραφεί από μία σχέση της μορφής

$$y[k] = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} H[k,l]u[l]$$

όπου $H[k,l]$ είναι η επονομαζόμενη μήτρα κρουστικών αποκρίσεων. Στην συνέχεια αποδεικνύουμε ότι μια ισοδύναμη περιγραφή εισόδου-εξόδου για την κατηγορία των αιτιατών γραμμικών χρονικώς αμετάβλητων συστημάτων που βρίσκονται σε χαλάρωση την χρονική στιγμή $t=0$ δίνεται από σχέση της μορφής

$$y(z)=H(z)u(z)$$

όπου $H(z)$ είναι η μήτρα συναρτήσεων μεταφοράς του συστήματος και $u(z)$ και $y(z)$ οι μετασχηματισμοί Z των εισόδων και των εξόδων αντιστοίχως. Το κεφάλαιο κλείνει με την περιγραφή δυναμικών συστημάτων από καταστατικές εξισώσεις που στην περίπτωση γραμμικών συστημάτων διακριτού χρόνου έχουν την μορφή

$$\begin{aligned} x[k+1] &= A[k]x[k]+B[k]u[k] \\ y[k] &= C[k]x[k]+D[k]u[k] \end{aligned}$$

3.2 Συστήματα συνεχούς χρόνου

Στο προηγούμενο κεφάλαιο ορίσαμε το σύστημα σαν μία απεικόνιση S από ένα σύνολο U συναρτήσεων του χρόνου που ονομάσαμε εισόδους σε ένα άλλο σύνολο Y συναρτήσεων του χρόνου που ονομάσαμε εξόδους. Αν και η απεικόνιση αυτή μπορεί να ορίζεται από ένα σύνολο μαθηματικών σχέσεων διαφορετικών μορφών εν τούτοις είναι σκόπιμο η περιγραφή της συμπεριφοράς του συστήματος να γίνεται από κάποια από τις τυπικές μορφές μαθηματικών σχέσεων για τις οποίες έχουν αναπτυχθεί συστηματικές μέθοδοι ανάλυσης. Στην ενότητα αυτή περιγράφουμε τρεις από τις πλέον χρησιμοποιούμενες τυπικές μορφές μαθηματικών προτύπων γραμμικών συστημάτων

3.2.1 Η μήτρα κρουστικών αποκρίσεων

Θεωρούμε ένα γραμμικό σύστημα συνεχούς χρόνου m εισόδων και p εξόδων που περιγράφεται από το μαθηματικό πρότυπο εισόδου-εξόδου $y_1(\cdot)=S[u(\cdot)]$ όπου $u\in\Re^m$ και $y\in\Re^p$. Λόγω της γραμμικότητας το σύστημα περιγράφεται ισοδύναμα από σχέσεις της μορφής (βλέπε πρόβλημα 2.1) :

$$\begin{aligned} y_1(\cdot) &= S_{11}[u_1(\cdot)]+S_{12}[u_2(\cdot)]+S_{13}[u_3(\cdot)]+\cdots+S_{1m}[u_m(\cdot)] \\ y_2(\cdot) &= S_{21}[u_1(\cdot)]+S_{22}[u_2(\cdot)]+S_{23}[u_3(\cdot)]+\cdots+S_{2m}[u_m(\cdot)] \\ &\vdots \\ y_p(\cdot) &= S_{p1}[u_1(\cdot)]+S_{p2}[u_2(\cdot)]+S_{p3}[u_3(\cdot)]+\cdots+S_{pm}[u_m(\cdot)] \end{aligned}$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι η j-στή είσοδος είναι ένα κρουστικό σήμα που εφαρμόζεται την χρονική στιγμή τ, δηλαδή $u_j(t)=\delta(t-\tau)$, ενώ οι άλλες είσοδοι είναι μηδενικές, δηλαδή $u_l(t)\equiv 0$ $l=1,2,\ldots,m$ $l\neq j$., Τότε

$$y_i(\cdot)) = S_{ij}[\delta(\cdot,\tau)] \quad i=1,2,.....,p$$

γιατί

$$S_{il}[u_l(\cdot)] = S_{il}[0] = 0 \qquad l = 1,2,..,m \quad l \neq j$$

Αν θέσουμε

$$h_{ij}(\cdot,\tau) = S_{ij}[\delta(\cdot,\tau)] \quad i=1,2,.....,p$$

τότε

$$y_i(\cdot) = h_{ij}[\delta(\cdot,\tau)] \quad i=1,2,.....,p$$

και είναι φανερό ότι η $h_{ij}(t,\tau)$ υποδηλώνει την τιμή της εξόδου i αν την χρονική στιγμή τ εφαρμοσθεί στην είσοδο j μία κρουστική διέγερση ενώ στις άλλες εισόδους του συστήματος εφαρμόζονται μηδενικές διεγέρσεις.

Ορισμός 3.1
Η μήτρα

$$H(t,\tau) = \begin{bmatrix} h_{11}(t,\tau) & h_{12}(t,\tau) & \cdots & h_{1m}(t,\tau) \\ h_{21}(t,\tau) & h_{22}(t,\tau) & \cdots & h_{2m}(t,\tau) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{p1}(t,\tau) & h_{p2}(t,\tau) & \cdots & h_{pm}(t,\tau) \end{bmatrix}$$

ονομάζεται *μήτρα κρουστικών αποκρίσεων* (impulse-response matrix).

Η σπουδαιότητα της μήτρας κρουστικών αποκρίσεων οφείλεται στο γεγονός ότι περιέχει όλες τις πληροφορίες που απαιτούνται για το προσδιορισμό της εξόδου ενός γραμμικού συστήματος σε οποιαδήποτε είσοδο. Αυτό αποδεικνύεται στο παρακάτω θεώρημα

Θεώρημα 3.1
Εστω το γραμμικό σύστημα συνεχούς χρόνου

$$y_1(\cdot) = S[u(\cdot)]$$

όπου $y \in \Re^p$ και $u \in \Re^m$. Αν $H(t,\tau)$, $H: T \times T \rightarrow \Re^{p \times m}$ είναι η μήτρα κρουστικών αποκρίσεων του συστήματος, τότε

$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}H(t,\tau)u(\tau)d\tau \qquad (3.1)$$

για οποιαδήποτε είσοδο $u(\cdot)$ και $t\in(-\infty,+\infty)$.

Απόδειξη:

Θα αποδείξουμε το θεώρημα για την περίπτωση συστήματος μίας εισόδου και μίας εξόδου. Η γενίκευση της αποδείξεως για συστήματα πολλών εισόδων-πολλών εξόδων αφήνεται σαν άσκηση.

Εστω $u(\cdot)$, $T\rightarrow\Re$ η είσοδος του συστήματος. $h_{ij}(\cdot,\tau)=S_{ij}[\delta(\cdot,\tau)]$ $i=1,2,.....,p$. Αν η $u(\cdot)$ είναι κατά τμήματα συνεχής, τότε, όπως φαίνεται στο σχήμα 3.1, μπορεί να προσεγγισθεί από μια συνάρτηση $u_{\Delta t}(t)$ που ορίζεται από την σχέση

$$u_{\Delta t}(t)=\sum_{i=-\infty}^{+\infty}u(t_i)p_{\Delta t}(t-t_i)\Delta t \qquad (3.2)$$

όπου και $\Delta t=t_{i+1}-t_1$ και $p_{\Delta t}(t)$ είναι η παλμική συνάρτηση

$$p_{\Delta t}(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{\Delta t} & \alpha\nu \quad 0\le t<\Delta t\\ 0 \quad \alpha\nu & t<0 \ \ \eta \ \ t\ge\Delta\end{cases}$$

Είναι φανερό ότι

$$\lim_{\Delta t\to 0}u_{\Delta t}(t)=u(t)$$

Εστω $y_{\Delta t}(\cdot)$ η απόκριση του συστήματος όταν είσοδος είναι η $u_{\Delta t}(\cdot)$. Τότε

$$y_{\Delta t}(\cdot)=S[u_{\Delta t}(\cdot)]$$

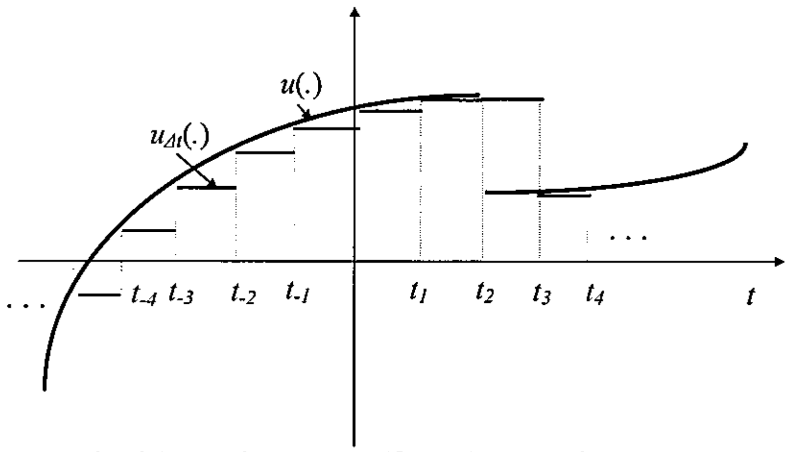
Αν υποτεθεί ότι η S είναι λεία (smooth), τότε

$$y(\cdot)=\lim_{\Delta t\to 0}y_{\Delta t}(\cdot)$$

γιατί

$$y(\cdot)=S[u(\cdot)]=S[\lim_{\Delta t\to 0}u_{\Delta t}(\cdot)]=$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} S[u_{\Delta t}(\cdot)] = \lim_{\Delta t \to 0} y_{\Delta t}(\cdot)$$



Σχήμα 3.1. Προσέγγιση της εισόδου από συρμό παλμικών συναρτήσεων.

Αρκεί λοιπόν να αποδειχθεί ότι

$$\lim_{\Delta t \to 0} y_{\Delta t}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t,\tau)u(\tau)d\tau$$

Από την (3.2) έπεται ότι

$$y_{\Delta t}(t) = S\left[\sum_{i=-\infty}^{+\infty}[u(t_i)]p_{\Delta t}(t-t_i)\Delta t\right]$$

απ'όπου, λόγω της γραμμικότητας του συστήματος, προκύπτουν διαδοχικά οι σχέσεις

$$y_{\Delta t}(t) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} S\left[u(t_i)p_{\Delta t}(t-t_i)\Delta t\right] \quad \sum_{i=-\infty}^{+\infty} S\left[p_{\Delta t}(t-t_i)\right]u(t_i)\Delta t\right]$$

και

$$y_{\Delta t}(t) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} S\left[p_{\Delta t}(t-t_i)\right]u(t_i)\Delta t\right] \tag{3.3}$$

Ας υπολογίσουμε τώρα το όριο των δύο μελών της 3.3 καθώς το Δt τείνει στο *0*. Επειδή

$$\lim_{\Delta t \to 0} p_{\Delta t}(t-t_i) = \delta(t-t_i)$$

από την (3.3) προκύπτει ότι

$$y(t)=\lim_{\Delta t\to 0} y_{\Delta t}(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\sum_{i=-\infty}^{+\infty} S\left[p_{\Delta t}(t-t_i)\right]u(t_i)\Delta t\Big]$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} h(t,\tau)u(\tau)d\tau$$

γιατί εξ' ορισμού $S[\delta(t\text{-}\tau)]=h(t,\tau)$. ό.έ.δ.

□

Το θεώρημα αυτό, γνωστό ως *θεμελιώδες θεώρημα* της θεωρίας γραμμικών συστημάτων, δίνει μια ενιαία αναλυτική μορφή της σχέσεως εισόδου-εξόδου, μορφή η οποία ισχύει για **οποιοδήποτε** γραμμικό σύστημα!

Παράδειγμα 3.1

Ας θεωρήσουμε το σύστημα μηδενικής μνήμης που περιγράφεται από την σχέση

$$y(t)=Ru(t)$$

Πρόκειται για την σχέση ρεύματος=τάσεως ενός γραμμικού χρονικώς αμετάβλητου αντιστάτη. Η κρουστική απόκριση $h(t,\tau)$ του συστήματος είναι η

$$h(t,\tau)=R\delta(t\text{-}\tau)$$

Επειδή ισχύει

$$u(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-\tau)u(\tau)d\tau$$

η σχέση $y(t)=Ru(t)$ γράφεται υπό την μορφή

$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}R\delta(t-\tau)u(\tau)d\tau$$

ή

$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}h(t,\tau)u(\tau)d\tau$$

Παράδειγμα 3.2

Ας θεωρήσουμε τώρα το δυναμικό σύστημα του σχήματος 2.1 που περιγράφεται από την σχέση

$$y(t)=\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t}u(\tau^*)d\tau^*$$

Η κρουστική απόκριση του συστήματος $h(t,\tau)$ για $\tau<t$ δίνεται από την σχέση

$$h(t,\tau)=\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau^*-\tau)d\tau^*=\frac{1}{C}\cdot 1=\frac{1}{C}$$

ενώ για $\tau>t$

$$h(t,\tau)=\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau^*-\tau)d\tau^*=\frac{1}{C}\cdot 0=0$$

Συνεπώς

$$h(t,\tau)=\begin{cases}\frac{1}{C} & \gamma\iota\alpha \quad \tau<t\\ 0 & \gamma\iota\alpha \quad \tau>t\end{cases}$$

ή

$$h(t,\tau)=\frac{1}{C}s(t-\tau) \qquad (3.4)$$

όπου $s(t)$ είναι η μοναδιαία βηματική συνάρτηση. Εξ άλλου για μία είσοδο $u(t)$ η αντίστοιχη έξοδος $y(t)$ του συστήματος θα ικανοποιεί τις σχέσεις

$$y(t)=\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t}u(\tau^*)d\tau^*=\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t}u(\tau)d\tau+\frac{1}{C}\int_{t}^{+\infty}0\cdot u(\tau)d\tau=$$

$$=\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t}s(t-\tau)u(\tau)d\tau+\frac{1}{C}\int_{t}^{+\infty}s(t-\tau)u(\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{C}s(t-\tau)u(\tau)d\tau$$

Αρα, πράγματι, μία ισοδύναμη περιγραφή του συστήματος δίνεται από την σχέση

$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}h(t,\tau)u(\tau)d\tau$$

Παράδειγμα 3.3

Τέλος θεωρούμε το χρονικώς μεταβαλλόμενο μη αιτιατό γραμμικό σύστημα που περιγράφεται από την σχέση

$$y(t)=5e^{-2t}u(t+3)$$

Η απόκριση του συστήματος σε κρουστική διέγερση $\delta(t-\tau)$ δίνεται από την σχέση

$$h(t,\tau)= 5e^{-2t}\,\delta(t+3-\tau)$$

και επειδή

$$\int_{-\infty}^{\infty} 5e^{-2t}\delta(t+3-\tau)u(\tau)d\tau = 5e^{-2t}u(t+3)$$

ισχύει η σχέση

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t,\tau)u(\tau)d\tau$$

Η σχέση (3.1) που ισχύει για όλα τα γραμμικά συστήματα μπορεί να απλοποιηθεί αν ληφθούν υπ' όψη οι επί πλέον ιδιότητες του συστήματος. Ας δούμε ποιά μορφή παίρνει η (3.1) για τις διάφορες κατηγορίες γραμμικών συστημάτων.

α) Συστήματα σε χαλάρωση την χρονική στιγμή t_o

Ας υποθέσουμε ότι το σύστημα είναι σε χαλάρωση την χρονική στιγμή t_0. Αυτό σημαίνει ότι η είσοδος του συστήματος $\hat{u}_{(-\infty,t_0)}$ μέχρι την χρονική στιγμή t_0 είναι τέτοια ώστε αν $\hat{u}(t)=0$ για $t\geq t_0$ τότε και η έξοδος του συστήματος για $t\geq t_0$ θα είναι ίση με μηδέν, δηλαδή

$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} H(t,\tau)\hat{u}(\tau)d\tau \qquad \forall t\geq t_0$$

Αν τώρα μετά την χρονική στιγμή t_0 αντί της μηδενικής εισόδου $\hat{u}_{[t_0,\infty)}$ επιβληθεί μία άλλη είσοδος $u_{[t_0,\infty)}$ τότε για την έξοδο του συστήματος για $t\geq t_0$ θα ισχύουν οι σχέσεις

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t_0} H(t,\tau)\hat{u}(\tau)d\tau + \int_{t_0}^{+\infty} H(t,\tau)u(\tau)d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{t_0} H(t,\tau)\hat{u}(\tau)d\tau + \int_{t_0}^{+\infty} H(t,\tau)[\hat{u}(\tau)+u(\tau)]d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} H(t,\tau)\hat{u}(\tau)d\tau + \int_{t_0}^{+\infty} H(t,\tau)u(\tau)d\tau = \int_{t_0}^{+\infty} H(t,\tau)u(\tau)d\tau$$

Συνεπώς αν ένα γραμμικό σύστημα είναι σε χαλάρωση μία χρονική στιγμή t_0, τότε η έξοδος του $y(t)$ για $t \geq t_0$ δεν εξαρτάται από τις τιμές της εισόδου για $t<t_o$, δηλαδή θα ισχύει η σχέση

$$y(t) = \int_{t_0}^{+\infty} H(t,\tau)u(\tau)d\tau \qquad \forall t \geq t_0$$

για οποιαδήποτε είσοδο $u(\cdot)$.

Παράδειγμα 3.4

Θεωρούμε πάλι το σύστημα του σχήματος 2.1 που μελετήσαμε στο παράδειγμα 3.2 και που περιγράφεται από την σχέση

$$y(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} u(\tau)d\tau$$

Για οποιοδήποτε $t_0<t$ η προηγούμενη σχέση γράφεται υπό την μορφή

$$y(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t_0} u(\tau)d\tau + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} u(\tau)d\tau$$

Είναι φανερό ότι το σύστημα είναι σε χαλάρωση την χρονική στιγμή t_0 αν η είσοδός $u(\tau)$ για $\tau<t_0$ είναι τέτοια ώστε

$$\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t_0} u(\tau)d\tau = 0$$

Τότε θα ισχύει η σχέση

$$y(t) = \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} u(\tau)d\tau \quad \forall t \geq t_0$$

η οποία βάσει της (3.4) γράφεται υπό την μορφή

$$y(t)=\int_{t_0}^{+\infty} H(t,\tau)u(\tau)d\tau \quad \forall t\ge t_0$$

β) Αιτιατά συστήματα

Σε ένα αιτιατό σύστημα η έξοδος σε μια χρονική στιγμή t δεν εξαρτάται από τις τιμές της εισόδου για $\tau>t$ και κατά συνέπεια θα πρέπει να ισχύει η σχέση

$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} H(t,\tau)u(\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{t} H(t,\tau)u(\tau)d\tau$$

για οποιαδήποτε είσοδο $u(\cdot)$. Αρα, αν $H(t,\tau)$ είναι η μήτρα κρουστικών αποκρίσεων ενός αιτιατού γραμμικού συστήματος, τότε ισχύει η σχέση

$$H(t,\tau)=0 \quad \text{για} \quad \tau>t$$

και κατά συνέπεια και η σχέση

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t} H(t,\tau)u(\tau)d\tau$$

Εξ'άλλου, αν επι πλέον το σύστημα είναι σε χαλάρωση μία χρονική στιγμή t_0 τότε θα ισχύει η σχέση

$$y(t)=\int_{t_0}^{t} H(t,\tau)u(\tau)d\tau \qquad \forall t\ge t_0$$

Παράδειγμα 3.5

Θεωρούμε το χρονικώς μεταβαλλόμενο αιτιατό γραμμικό σύστημα που περιγράφεται από την σχέση

$$y(t)=2e^{-t}u(t-2) \tag{3.5}$$

Η απόκριση του συστήματος σε κρουστική διέγερση $\delta(t-\tau)$ δίνεται από την σχέση

$$h(t,\tau)=2e^{-t}\,\delta(t-2-\tau) \tag{3.6}$$

Επειδή $\delta(t-2-\tau)=0$ όταν $t-2-\tau<0$, άρα κι όταν $t<\tau$, από την (3.6) προκύπτει ότι

$$h(t,\tau)=\begin{cases}2e^{-t}\delta(t-2-\tau) & \gamma\iota\alpha \quad \tau<t\\ 0 & \gamma\iota\alpha \quad \tau>t\end{cases}$$

Συνεπώς,

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}h(t,\tau)u(\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{t}h(t,\tau)u(\tau)d\tau+\int_{t}^{\infty}h(t,\tau)u(\tau)d\tau=$$

$$=\int_{-\infty}^{t}2e^{-t}\delta(t-2-\tau)u(\tau)d\tau+\int_{t}^{\infty}0\cdot u(\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{t}2e^{-t}\delta(t-2-\tau)u(\tau)d\tau$$

Δηλαδή ισχύει η σχέση

$$y(t)=\int_{t_0}^{t}h(t,\tau)u(\tau)d\tau \qquad \forall t\geq t_0$$

γ) Χρονικώς αμετάβλητα συστήματα

Θεωρούμε ένα γραμμικό σύστημα που περιγράφεται από την σχέση

$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}H(t,\tau)u(\tau)d\tau$$

Αν υποθέσουμε τώρα ότι το σύστημα είναι και χρονικώς αμετάβλητο, τότε εφαρμόζοντας μια είσοδο $u^*(t)=u(t+\alpha)$ θα έχουμε μια είσοδο $y^*(t)$ που θα ικανοποιεί την σχέση $y^*(t)=y(t+\alpha)$. Συνεπώς θα ισχύουν οι σχέσεις

$$y(t+a)=y^*(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}H(t,\tau^*)u^*(\tau^*)d\tau^*=\int_{-\infty}^{+\infty}H(t,\tau^*)u(\tau^*+a)d\tau^*$$

απ'όπου με αλλαγή μεταβλητής $\tau=\tau^*+\alpha$ προκύπτει η σχέση

$$y(t+a)=\int_{t_0}^{t}H(t,\tau-a)u(\tau)d\tau \tag{3.7}$$

Εξ' άλλου, επειδή

$$y(t+\alpha)=\int_{-\infty}^{+\infty} H(t+\alpha,\tau)u(\tau)d\tau$$

από την (3.7) προκύπτει ότι

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H(t+\alpha,\tau)u(\tau)d\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty} H(t,\tau-\alpha)u(\tau)d\tau$$

για οποιαδήποτε είσοδο $u(\tau)$ για την οποία τα ολοκληρώματα υπάρχουν. Συνεπώς θα πρέπει να ισχύει η σχέση

$$H(t+\alpha,\tau)=H(t,\tau-\alpha)$$

για κάθε $t\in T$, $\tau\in T$ και $\alpha\in\Re$. Αν τώρα θέσουμε $\alpha=\tau$ και $t+\alpha=t^*$, τότε προκύπτει ότι

$$H(t^*,\tau)=H(t^*-\tau,0)$$

Δηλαδή η τιμή της μήτρας κρουστικών αποκρίσεων ενός γραμμικού χρονικώς αμετάβλητου συστήματος εξαρτάται μόνο από την διαφορά $t^*-\tau$ και συνεπώς μπορεί να τεθεί υπό την μορφή

$$\boxed{H(t^*,\tau)=H^*(t^*-\tau)}$$

Ετσι, για γραμμικά χρονικώς αμετάβλητα συστήματα η μήτρα κρουστικών αποκρίσεων θα θεωρείται σαν συνάρτηση μιας μεταβλητής και η έξοδος $y(t)$ θα δίνεται από το συνελικτικό ολοκληρωμα

$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} H^*(t-\tau)u(\tau)d\tau$$

Επειδή όπως είδαμε προηγούμενως η μήτρα κρουστικών αποκρίσεων ενός αιτιατού συστήματος ικανοποιεί την σχέση $H(t,\tau)=0$ για $\tau>t$, αν πρόκειται για σύστημα που είναι αιτιατό και χρονικώς αμετάβλητο η μήτρα κρουστικών αποκρίσεων θα ικανοποιεί την σχέση

$$H^*(t)=0 \quad \text{για} \quad t<0$$

Τέλος, αν πρόκειται για αιτιατό και χρονικώς αμετάβλητο σύστημα που είναι σε χαλάρωση την χρονική στιγμή $t=0$, τότε η έξοδος του συστήματος για $t\geq 0$ θα δίνεται από το ολοκλήρωμα

$$y(t)=\int_0^t H^*(t-\tau)u(\tau)d\tau$$

Το ολοκλήρωμα αυτό ονομάζεται *συνέλιξη* (convolution) της μήτρας κρουστικών αποκρίσεων $H^*(t)$ και της εισόδου $u(t)$.

Παράδειγμα 3.6

Ας θεωρήσουμε πάλι το σύστημα που περιγράφεται από σχέση της μορφής (3.5) όπου όμως ο παράγοντας e^{-t} έχει αντικατασταθεί από μία σταθερά έστω α:

$$y(t)=2au(t-2) \tag{3.8}$$

Η κρουστική απόκριση του συστήματος δίνεται από την σχέση

$$h^*(t,\tau)=\begin{cases} 2a\delta(t-2-\tau) & \text{για} \quad \tau<t \\ 0 & \text{για} \quad \tau>t \end{cases}$$

ή

$$h^*(t,\tau)=\begin{cases} 2a\delta(t-\tau-2) & \text{για} \quad t-\tau>0 \\ 0 & \text{για} \quad t-\tau<0 \end{cases}$$

Συνεπώς η κρουστική απόκριση του συστήματος είναι συνάρτηση της διαφοράς $t-\tau$ και μπορεί να γραφεί υπό την μορφή

$$h(t-\tau)=\begin{cases} 2a\delta(t-\tau-2) & \text{για} \quad t-\tau>0 \\ 0 & \text{για} \quad t-\tau<0 \end{cases}$$

Αν το σύστημα είναι σε ηρεμία την χρονική στιγμή t_0 τότε θα ισχύει η σχέση

$$y(t)=\int_{t_0}^t h(t-\tau)u(\tau)d\tau=\int_{t_0}^t 2a\delta(t-\tau-2)u(\tau)d\tau$$

για κάθε $t \geq t_0$ και κάθε είσοδο $u(.)$.

3.3 Η Μήτρα συναρτήσεων μεταφοράς

Είδαμε ότι η μήτρα κρουστικών αποκρίσεων ενός γραμμικού χρονικώς αμετάβλητου συστήματος μπορεί να γραφεί υπό την μορφή $H(t\text{-}\tau)$. Θέτοντας $\tau=0$, προκύπτει η μήτρα $H(t)$ κάθε στοιχείο $h_{ij}(t)$ της οποίας εκφράζει την απόκριση $y_i(t)$ στην έξοδο y_i του συστήματος όταν στην είσοδο j επιβάλλεται ένα κρουστικό σήμα την χρονική στιγμή $\tau=0$, δηλαδή όταν $u_j(t)=\delta(t)$ ενώ σε όλες τις άλλες εισόδους επιβάλλεται το μηδενικό σήμα, δηλαδή $u_l(t)\equiv 0 \quad l\neq j$.

Ορισμός 3.2

Ο μετασχηματισμός Laplace $H(s)$ της μήτρας κρουστικών αποκρίσεων $H(t)$ ενός αιτιατού χρονικώς αμετάβλητου συστήματος ονομάζεται *μήτρα συναρτήσεων μεταφοράς* (transfer functions matrix) του συστήματος.

Αν $y(t)$ υποδηλώνει την έξοδο του συστήματος σε είσοδο $u(t)=[u_1(t)\ u_2(t), \ldots, u_m(t)]^T$ όπου για κάποιο j ισχύει $u_j(t)=\delta(t)$ και $u_i(t)=0$ για $i\neq j$, τότε από την (3.5) προκύπτει ότι

$$y(s)=H(s)L\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \delta(t) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}\right\}=H(s)\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \leftarrow j\text{-στή συνιστώσα}$$

Αρα

$$y(s)=\begin{bmatrix} h_{1j}(s) \\ h_{2j}(s) \\ \vdots \\ h_{pj}(s) \end{bmatrix}$$

δηλαδή το στοιχείο $h_{kj}(s)$ της μήτρας κρουστικών αποκρίσεων $H(s)$ είναι ο μετασχηματισμός Laplace της k-στής συνιστώσας της εξόδου $y(t)$ όταν η j-στή συνιστώσα της εισόδου είναι το κρουστικό σήμα $\delta(t)$ και οι άλλες συνιστώσες $u_k(t)$ για $k \neq j$ είναι μηδενικές.

Η Μήτρα συναρτήσεων μεταφοράς περιγράφει πλήρως τα χαρακτηριστικά εισόδου-εξόδου των γραμμικών αιτιατών και χρονικώς αμετάβλητων συστημάτων. Για ένα τέτοιο σύστημα που **επί πλέον** είναι σε σε χαλάρωση την χρονική στιγμή $t=0$, η σχέση εισόδου-εξόδου περιγράφεται από το συνελικτικό ολοκλήρωμα

$$y(t) = \int_0^t H(t-\tau)u(\tau)d\tau \qquad \forall t \geq 0 \tag{3.9}$$

Αν $y(s)$, $u(s)$ είναι οι μετασχηματισμοί Laplace των $y(t)$, $u(t)$ και $H(s)$ η μήτρα συναρτήσεων μεταφοράς του συστήματος , τότε λαμβάνοντας υπ'όψιν ότι $H(t)=0$ για $t<0$, από την (3.9) έπεται ότι

$$y(s)=H(s)u(s) \tag{3.10}$$

Η σχέση (3.10) ισχύει για οποιαδήποτε είσοδο u της οποίας υπάρχει ο μετασχηματισμός Laplace.

Παράδειγμα 3.7

Ας θεωρήσουμε πάλι το σύστημα του παραδείγματος 3.1 που περιγράφεται από την σχέση

$$y(t)=Ru(t)$$

Παίρνοντας μετασχηματισμούς Laplace έχουμε

$$y(s)=Ru(s)$$

Η R πρέπει να είναι η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος. Πράγματι, ο μετασχηματισμός Laplace της κρουστικής αποκρίσεως $h(t)=R\delta(t)$ είναι ίσος με R.

Παράδειγμα 3.8

Εστω το γραμμικό χρονικώς αμετάβλητο σύστημα που περιγράφεται από την διαφορική εξίσωση

$$y^{(2)}(t)+3y^{(1)}(t)-2y(t)=3u(t-2)$$

Παίρνοντας μετασχηματισμούς Laplace και με την υπόθεση ότι το σύστημα είναι σε χαλάρωση την χρονική στιγμή $t=0^-$ έχουμε

$$s^2 y(s) + 3sy(s) - 2y(s) = 3e^{-2s}u(s)$$

ή

$$(s^2 + 3s - 2)y(s) = 3e^{-2s}u(s)$$

ή, τέλος,

$$y(s) = \frac{3e^{-2s}}{s^2 + 3s - 2}u(s)$$

Συνεπώς η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος είναι

$$h(s) = \frac{3e^{-2s}}{s^2 + 3s - 2}$$

3.4 Οι καταστατικές εξισώσεις

Οι καταστατικές εξισώσεις ενός γραμμικού δυναμικού συστήματος έχουν την μορφή

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \tag{3.11}$$

$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t) \tag{3.12}$$

όπου $A \in \Re^{nxn}$, $B \in \Re^{nxm}$, $C \in \Re^{pxn}$, και $D \in \Re^{pxm}$.

Ενα γραμμικό δυναμικό σύστημα μπορεί επίσης να περιγραφεί μέσω της μήτρας κρουστικών αποκρίσεων, όμως αν το σύστημα δεν είναι σε χαλάρωση κάποια χρονική στιγμή t_o τότε για τον προσδιορισμό της εξόδου του σε μία χρονική στιγμή t απαιτείται η γνώση της εισόδου σε όλο το διάστημα $(-\infty, t]$. Χρησιμοποιώντας καταστατικό μαθηματικό πρότυπο αποφεύγεται η δυσκολία αυτή αν επί πλέον γνωρίζουμε την κατάσταση $x(t_o)$ γιατί τότε αρκεί η γνώση της εισόδου στο χρονικό διάστημα $[t_0, t]$. Εξ' άλλου και η περιγραφή με μήτρα συναρτήσεων μεταφοράς είναι μάλλον μια περιοριστική περιγραφή. Με μήτρες συναρτήσεων μεταφοράς περιγράφονται οι ιδιότητες μόνο χρονικώς αμετάβλητων γραμμικών συστημάτων η δε σχέση $y(s)=H(s)u(s)$ ισχύει αν επί πλέον το σύστημα είναι σε χαλάρωση την χρονική στιγμή $t=0$.

Η μήτρα συναρτήσεων μεταφοράς προκύπτει εύκολα από τις καταστατικές εξισώσεις. Πράγματι, παίρνοντας μετασχηματισμούς Laplace στις εξισώσεις (3.11)-(3.12) έχουμε

$$sx(s)=Ax(s)+Bu(s)$$

$$y(s)=Cx(s)+Du(s)$$

Αρα

$$(sI_n-A)x(s)=Bu(s)$$

και

$$y(s)=C(sI_n-A)^{-1}Bu(s)+Du(s)$$

$$=[C(sI_n-A)^{-1}B+D]u(s)$$

Δηλαδή

$$H(s)=C(sI_n-A)^{-1}B+D$$

Εύκολα επίσης από τις καταστατικές εξισώσεις προκύπτει η μήτρα κρουστικών αποκρίσεων ενός γραμμικού χρονικώς αμετάβλητου συστήματος που είναι σε χαλάρωση την χρονική «στιγμή» $t=-\infty$. Οπως θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο, η λύση των εξισώσεων

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t) \quad x(-\infty)=0$$

δίνεται από την σχέση

$$x(t)=\int_{-\infty}^{t} e^{A(t-t^*)}B\,u(t^*)dt^*$$

Αρα

$$y(t)=C\int_{-\infty}^{t} e^{A(t-t^*)}B\,u(t^*)dt^*+Du(t)$$

Θέτοντας $u(t)=\delta(t-\tau)$ έχουμε

$$H(t\text{-}\tau)=C\int_{-\infty}^{t} e^{A(t-t^*)}B\,\delta(t^*\text{-}\tau)dt^*+D\delta(t\text{-}\tau)$$

$$=Ce^{At}\int_{-\infty}^{t} e^{-At^*}B\,\delta(t^*\text{-}\tau)dt^*+D\delta(t\text{-}\tau)$$

$$=Ce^{At}e^{-A\tau}B+D\delta(t\text{-}\tau)$$

Αρα

$$H(t-\tau)=Ce^{A(t-\tau)}B+D\delta(t-\tau)$$

Παράδειγμα 3.9

Ας θεωρήσουμε πάλι το μηχανικό σύστημα του σχήματος 2.7. Οπως είδαμε στο παράδειγμα 2.8. η συμπεριφορά του συστήματος περιγράφεται από την διαφορική εξίσωση

$$M\ddot{y}(t)+D\dot{y}(t)+Ky(t)=u(t)$$

.Διαλέγουμε σαν μεταβλητές καταστάσεως τις

$$x_1(t)=y(t)$$
$$x_2(t)=\dot{y}(t)$$

και έχουμε

$$\dot{x}_1(t)=\dot{y}(t)=x_2(t)$$
$$\dot{x}_2(t)=\ddot{y}(t)=-\frac{D}{M}\dot{y}(t)-\frac{K}{M}y(t)+\frac{1}{M}u(t)=$$
$$=-\frac{D}{M}x_2(t)-\frac{K}{M}x_1(t)+\frac{1}{M}u(t)$$

Συνεπώς, οι καταστατικές εξισώσεις του συστήματος είναι οι

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\frac{K}{M} & -\frac{D}{M}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{M}\end{bmatrix}u(t)$$

$$y(t)=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}$$

Τέλος, η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος είναι η

$$H(s)=C(sI_n\text{-}A)^{-1}B+D$$

$$h(s)=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}s & 0\\ 0 & s\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\dfrac{K}{M} & -\dfrac{D}{M}\end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix}0\\ \dfrac{1}{M}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s & 1\\ \dfrac{K}{M} & s+\dfrac{D}{M}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0\\ \dfrac{1}{M}\end{bmatrix}$$

ή

$$h(s)=\frac{-\dfrac{1}{M}}{s^2+\dfrac{D}{M}s-\dfrac{K}{M}}$$

3.5 Μαθηματικά πρότυπα γραμμικών συστημάτων διακριτού χρόνου

Ανάλογα μαθηματικά πρότυπα μπορούν να αναπτυχθούν και για γραμμικά δυναμικά συστήματα διακριτού χρόνου. Στις επόμενες παραγράφους θα δούμε πώς οι έννοιες της μήτρας κρουστικών αποκρίσεων της μήτρας συναρτήσεων μεταφοράς και των καταστατικών εξισώσεων που ορίσθηκαν για συστήματα συνεχούς χρόνου μπορούν να επεκταθούν και στα συστήματα διακριτού χρόνου.

3.5.1. Η μήτρα κρουστικών αποκρίσεων

Ας θεωρήσουμε ένα γραμμικό σύστημα διακριτού χρόνου

$$y[\cdot]=S[u[\cdot]]\;\cancel{\dot{x}(t)=A(t)x(t)+B(t)u(t)}$$
$$\cancel{y(t)=C(t)x(t)+D(t)u(t)}$$

όπου $u\in\Re^m$ και $y\in\Re^p$. Οπως στην περίπτωση γραμμικών συστημάτων συνεχούς χρόνου, υπάρχουν τελεστές S_{ij} $i=1,2,..,p$, $j=1,2,...,m$ τέτοιοι ώστε το σύστημα να περιγράφεται ισοδύναμα από τις σχέσεις

$$y_1[\cdot]=S_{11}[u_1[\cdot]]+S_{12}[u_2[\cdot]]+S_{13}[u_3[\cdot]]+\cdots+S_{1m}[u_m[\cdot]]$$

$$y_2[\cdot]=S_{21}[u_1[\cdot]]+S_{22}[u_2[\cdot]]+S_{23}[u_3[\cdot]]+\cdots+S_{2m}[u_m[\cdot]]$$

$$\vdots$$

$$y_p[\cdot]=S_{p1}[u_1[\cdot]]+S_{p2}[u_2[\cdot]]+S_{p3}[u_3[\cdot]]+\cdots+S_{pm}[u_m[\cdot]]$$

Στην συνέχεια, για απλοποίηση της παρουσιάσεως, θα θεωρήσουμε ότι η χρονική μεταβλητή t_k παίρνει ακέραιες τιμές, δηλαδή $t_k=k$.

Αν στο σύστημα επιβληθεί η είσοδος

$$u[k]=[u_1[k]\ \ u_2(k)\ \dots\ u_m(k)]^T$$

όπου, για κάποιο j,

$$u_j(k)=\delta(k,l)=\begin{cases}0\ \alpha\nu\ k\neq l\\ 1\ \alpha\nu\ k=l\end{cases}$$

και

$$u_i(k)\equiv 0 \qquad \gamma\iota\alpha\ \ i\neq j,$$

τότε

$$y_1(.)=S_{1j}[\delta(.,l)]$$

$$y_2(.)=S_{2j}[\delta(.,l)]$$

$$\vdots$$

$$y_p(.)=S_{pj}[\delta[.,l]]$$

γιατί $S_{ri}[u_i(.)]\equiv 0\ \ r=1,2,\dots,p\ \ \ i=1,..,m\ \ i\neq j$. Προφανώς η $S_{ij}[\delta(.,l)]$ είναι η απόκριση στην έξοδο i του συστήματος όταν εφαρμόζεται την χρονική στιγμή l στην μεν είσοδο j μια μοναδιαία κρουστική ενώ στις άλλες εισόδους εφαρμόζονται μηδενικές διεγέρσεις. Αν συμβολίσουμε με $h_{ij}(k,l)$ την τιμή της $S_{ij}[\delta(.,l)]$ την στιγμή k, τότε

Ορισμός 3.3

Η μήτρα

$$H[k,l]=\begin{bmatrix} h_{11}[k,l] & h_{12}[k,l] & \cdots & h_{1m}[k,l] \\ h_{21}[k,l] & h_{22}[k,l] & \cdots & h_{2m}[k,l] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{p1}[k,l] & h_{p2}[k,l] & \cdots & h_{pm}[k,l] \end{bmatrix}$$

ονομάζεται *μήτρα κρουστικών αποκρίσεων.*

Οπως στην περίπτωση των γραμμικών συστημάτων συνεχούς χρόνου, η *μήτρα κρουστικών αποκρίσεων* (impulse response matrix) περιέχει όλες τις πληροφορίες που απαιτούνται για τον προσδιορισμό της εξόδου ενός γραμμικού συστήματος που είναι σε χαλάρωση στο $-\infty$. Αυτό αποδεικνύεται στο παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 3.2

Για οποιαδήποτε είσοδο $u[.]$ και $k\in I$ ισχύει η σχέση

$$y[k]=\sum_{l=-\infty}^{+\infty} H(k,l)u(l)$$

Απόδειξη

Η είσοδος μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$u(k)=\sum_{l=-\infty}^{+\infty} \delta(k,l)u(l)$$

Αρα

$$y(.)=S[\sum_{l=-\infty}^{+\infty} \delta(.,l)u(l)]$$

ή, λόγω της γραμμικότητας,

$$y(.)=\sum_{l=-\infty}^{+\infty} S[\delta(.,l)u(l)]$$

Συνεπώς η απόκριση την χρονική στιγμή k είναι

$$y(k)=\sum_{l=-\infty}^{+\infty} H(k,l)u(l)$$

όπου $H(.,l)=S[\delta(.,l)]$

□

Αν το σύστημα είναι σε χαλάρωση σε μία χρονική στιγμή k_0 , τότε

$$y(k)=\sum_{l=k_0}^{+\infty} H(k,l)u(l)$$

για οποιαδήποτε είσοδο $u(.)$ και κάθε $k \geq k_0$.

Εξ'άλλου, αν το σύστημα είναι αιτιατό η εξοδος σε μία χρονική στιγμή k δεν εξαρτάται από τις τιμές της εισόδου για $l>k$. Αρα θα ισχύει

$$y(k)=\sum_{l=-\infty}^{+\infty} H(k,l)u(l)=\sum_{l=-\infty}^{k} H(k,l)u(l)$$

για οποιαδήποτε είσοδο $u(.)$. Συνεπώς για ένα αιτιατό σύστημα

$$H(k,l)=0 \text{ για } \quad l>k$$

Ας εξετάσουμε τώρα την περίπτωση ενός γραμμικού χρονικώς αμετάβλητου συστήματος που περιγράφεται από την σχέση

$$y(k)= \sum_{l=-\infty}^{+\infty} H(k,l)u(l)$$

Αν επιβληθεί στο σύστημα η είσοδος $u^*(k)=u(k+m)$ τότε η έξοδος θα είναι $y^*(k)=y(k+m)$ και θα ισχύουν οι σχέσεις

$$y(k+m)= \sum_{l=-\infty}^{+\infty} H(k+m,l)u(l)$$

και

$$y(k+m)=y^*(k)=\sum_{l=-\infty}^{+\infty} H(k,l)u^*(l)=$$

$$=\sum_{l=-\infty}^{+\infty} H(k,l)u(l+m)=$$

$$=\sum_{l=-\infty}^{+\infty} H(k,l\text{-}m)u(l)$$

Αρα για οποιαδήποτε είσοδο $u(l)$ θα ισχύει η σχέση

$$\sum_{l=-\infty}^{+\infty} H(k+m,l)u(l)=\sum_{l=-\infty}^{+\infty} H(k,l\text{-}m)u(l)$$

από την οποία προκύπτει ότι

$$H[k+m,l]=H[k,l\text{-}m]$$

για οποιουσδήποτε ακεραίους k, m και l. Τέλος, αν στην προηγούμενη σχέση θέσουμε $k+m=k^*$ και $m=l$ προκύπτει η σχέση

$$H[k^*,l]=H[k^*\text{-}l,0]$$

που σημαίνει ότι όταν ένα γραμμικό σύστημα είναι χρονικώς αμετάβλητο τότε η τιμή της μήτρας κρουστικών αποκρίσεών του $H(k,l)$ εξαρτάται από την διαφορά $k\text{-}l$ και μπορεί να τεθεί υπό την μορφή

$$H[k,l]=H^*[k\text{-}l]$$

Ετσι για ένα γραμμικό χρονικώς αμετάβλητο σύστημα ισχύει η σχέση

$$y[k]=\sum_{l=-\infty}^{+\infty} H^*[k-l]u[l]$$

Παράδειγμα 3.10

Εστω το σύστημα διακριτού χρόνου που περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών

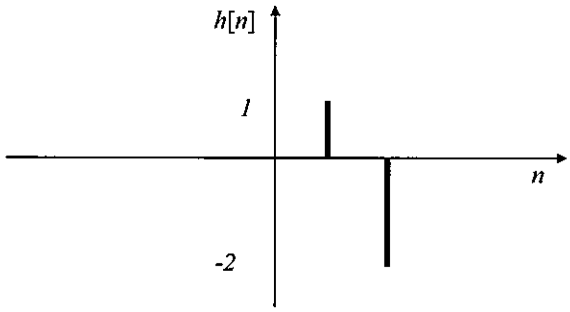
$$y[n]=u[n-1]-2u[n-2] \qquad (3.13)$$

Αν στο σύστημα επιβληθεί η είσοδος $u[n]=\delta[n]$ τότε η έξοδός του που εκφράζει την κρουστική απόκριση $h[n]$ του συστήματος δίνεται από την σχέση

$$h[n]=\delta[n-1]-2\delta[n-2]$$

$$y[k]=\sum_{l=-\infty}^{+\infty} h(k-l)u(l)=\sum_{l=-\infty}^{+\infty}(\delta(k-1]-2\delta[k-2-l])u(l)$$

Οπως φαίνεται στο σχήμα η κρουστική απόκριση του συστήματος μηδενίζεται μετά από την χρονική στιγμή $k=2$. Τα συστήματα αυτού του τύπου, δηλαδή εκείνα των οποίων η κρουστική απόκριση μηδενίζεται μετά από μία πεπερασμένη χρονική στιγμή ονομάζονται συστήματα *Πεπερασμένης Κρουστικής Αποκρίσεως* (Finite Impulse Response) ή συστήματα *FIR*. Δεν υπάρχουν τέτοια συστήματα συνεχούς χρόνου.



Σχήμα 3.2 Η κρουστική απόκριση $h[n]$ του συστήματος (3.13)

Παράδειγμα 3.11

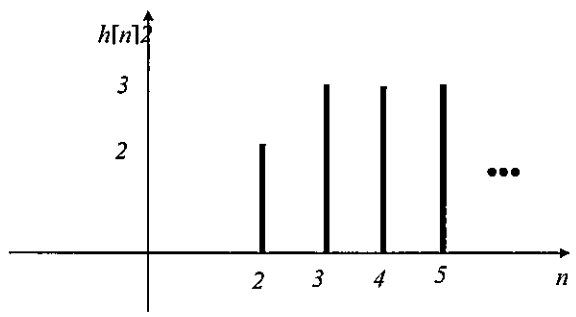
Εστω το σύστημα διακριτού χρόνου που περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών

$$y[n]-0{,}5y[n-1]=2u[n-2] \tag{3.14}$$

Αν στο σύστημα επιβληθεί η είσοδος $u[n]=\delta[n]$ τότε η έξοδός του που εκφράζει την κρουστική απόκριση $h[n]$ του συστήματος ικανοποιεί την σχέση

$$h[n]-0{,}5h[n-1]=2\delta[n-2]$$

Η κρουστική απόκριση του συστήματος φαίνεται στο Σχήμα 3.33.19. Σε αντίθεση με το σύστημα του παραδείγματος 3.10 εδώ δεν υπάρχει χρονική στιγμή μετά από την οποία μηδενίζεται η κρουστική απόκριση του συστήματος. Τα συστήματα αυτού του τύπου, δηλαδή εκείνα των οποίων η κρουστική απόκριση έχει άπειρη διάρκεια ονομάζονται συστήματα *Απειρης Κρουστικής Αποκρίσεως* (Infinite Impulse Response) ή συστήματα *IIR*.



Σχήμα 3.3 Η κρουστική απόκριση $h[n]$ του συστήματος (3.14)

3.5.2 Η μήτρα συναρτήσεων μεταφοράς

Η μήτρα συναρτήσεων μεταφοράς ορίζεται για γραμμικά αιτιατά και χρονικώς αμετάβλητα συστήματα.

Ορισμός 3.4

Ο μετασχηματισμός Ζ $H(z)$ της μήτρας κρουστικών αποκρίσεων $H[k]$ ενός αιτιατού χρονικώς αμετάβλητου γραμμικού συστήματος διακριτού χρόνου ονομάζεται *μήτρα συναρτήσεων μεταφοράς* του συστήματος.

Ας θεωρήσουμε ένα γραμμικό χρονικώς αμετάβλητο σύστημα που είναι σε χαλάρωση την χρονική στιγμή $k=0$. Τότε θα ισχύει η σχέση

$$y(k)=\sum_{l=0}^{k} H(k-l)u(l) \qquad (3.15)$$

Για τον μετασχηματισμό Z της σχέσεως (3.15) ισχύει

$$y(z)=\sum_{k=0}^{+\infty} y(k)\, z^{-k}=$$

$$=\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{l=0}^{+\infty} H(k-l)\, u(l) z^{-k+l} z^{-l}$$

$$=\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{l=0}^{+\infty} H(k-l)\, z^{-(k-l)} u(l) z^{-l}$$

Αν επί πλέον υποθέσουμε ότι το σύστημα είναι αιτιατό, τότε θα ισχύει η σχέση $H(k)=0$ για $k<0$. Αρα

$$y(z)=\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{l=0}^{+\infty} H(k-l)\, z^{-(k-l)} u(l) z^{-l}$$

$$=\sum_{k-l=0}^{+\infty} H\,(k-l) z^{-(k-l)} \sum_{l=0}^{+\infty} u(l) z^{-l}$$

ή

$$y(z)=H(z)u(z)$$

Ορισμός 3.4

Ο μετασχηματισμός Z

$$H(z)=\sum_{k=0}^{+\infty} H[k] z^{-k}$$

της μήτρας κρουστικών αποκρίσεων $H[k]$ ενός αιτιατού χρονικώς αμετάβλητου γραμμικού συστήματος διακριτού χρόνου ονομάζεται *μήτρα συναρτήσεων μεταφοράς* του συστήματος ονομάζεται *μήτρα συναρτήσεων μεταφοράς.*

Παράδειγμα 3.13

Θεωρούμε πάλι το σύστημα διακριτού χρόνου Πεπερασμένης *Κρουστικής Αποκρίσεως* .....του παραδείγματος 3.10 που περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών

$$y[n] = u[n-1] - 2u[n-2] \qquad (3.16)$$

Παίρνοντας μετασχηματισμούς Z και των δύο μελών της εξίσωσης διαφορών έχουμε

$$y(z) = z^{-1}u(z) - 2z^{-2}u(z)$$

ή

$$y(z) = (z^{-1} - 2z^{-2})u(z)$$

Συνεπώς η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος είναι η

$$h(z) = z^{-1} - 2z^{-2} = \frac{z^2}{z-2}$$

Παράδειγμα 3.14

Εστω το σύστημα διακριτού χρόνου Απειρης Κρουστικής Αποκρίσεως που περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών

$$y[n] - 0{,}5y[n-1] = 2u[n-2] \qquad (3.17)$$

Παίρνοντας μετασχηματισμούς Z και των δύο μελών της εξίσωσης διαφορών έχουμε

$$y(z) - 0{,}5z^{-1}u(z) = 2z^{-2}u(z)$$

ή

$$y(z) = \frac{2z^{-2}}{1-0{,}5z^{-1}}u(z)$$

Συνεπώς η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος είναι η

$$h(z) = \frac{2z^{-2}}{1-0{,}5z^{-1}} = \frac{2}{z^2 - 0{,}5z}$$

3.5.3 Οι καταστατικές εξισώσεις

Οι καταστατικές εξισώσεις ενός γραμμικού δυναμικού συστήματος διακριτού χρόνου έχουν την μορφή

$$x(k+1)=A(k)x(k)+B(k)u(k)$$

$$y(k)=C(k)x(k)+D(k)u(k)$$

όπου $A\in\Re^{nxn}$, $B\in\Re^{nxm}$, $C\in\Re^{pxn}$ και $D\in\Re^{pxm}$.

Από τις καταστατικές εξισώσεις προκύπτουν άμεσα και η μήτρα κρουστικών αποκρίσεων και η μήτρα συναρτήσεων μεταφοράς στην περίπτωση που το σύστημα είναι χρονικώς αμετάβλητο και είναι σε χαλάρωση την χρονική στιγμή $t=0$.

Θα υπολογίσουμε πρώτα την μήτρα συναρτήσεων μεταφοράς. Θέτοντας $Z\{x(k)\{=x(z)=\sum_{k=0}^{+\infty}x(k)z^{-k}$

έχουμε

$$Z\{x(k+1)\{=\sum_{k=0}^{+\infty}x(k+1)z^{-k}=z\sum_{k=0}^{+\infty}x(k+1)z^{-(k+1)}$$

$$=z\left[\sum_{l=0}^{+\infty}x(l)z^{-l}-x(0)\right]$$

$$=z[x(z)-x(0)]$$

Εφαρμόζοντας την ιδιότητα αυτή στις καταστατικές εξισώσεις έχουμε

$$zx(z)-zx(0)=Ax(z))+Bu(z)$$

$$y(z)=Cx(z)+Du(z)$$

απ' όπου προκύπτει ότι

$$x(z)=(zI_n-A)^{-1}zx(0)+(zI_n-A)^{-1}Bu(z)$$

Αν το σύστημα είναι σε χαλάρωση την στιγμή $k=0$ τότε

$$x(z)=(zI_n-A)^{-1}Bu(z)$$

και συνεπώς

$$y(z)=[C(zI_n\text{-}A)^{-1}B+D]u(z)$$

Αρα

$$H(z)=C(zI_n\text{-}A)^{-1}B+D$$

Παράδειγμα 3.15

Ας θεωρήσουμε πάλι το σύστημα *Πεπερασμένης Κρουστικής Αποκρίσεως* που περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών

$$y[n]=u[n-1]-2u[n-2]$$

Θέτοντας

$$x_1[n]=u[n-1]$$

$$x_2[n]=u[n-2]$$

έχουμε

$$x_1[n+1]=u[n]$$

$$x_2[n+1]=u[n-1]=x_1[n]$$

$$y[n]=x_1[n]-2x_2[n]$$

Συνεπώς οι καταστατικές εξισώσεις του συστήματος είναι

$$\begin{bmatrix} x_1[n+1] \\ x_2[n+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1[n] \\ x_2[n] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u[n]$$

$$y[n]=\begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1[n] \\ x_2[n] \end{bmatrix}$$

Η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος είναι η

$$h(\mathrm{z})=C(\mathrm{z}I_2\text{-}A)^{-1}B+D$$

δηλαδή

$$h(z)=\begin{bmatrix}1 & -2\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}z & 0\\0 & z\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z & 0\\-1 & z\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$

ή

$$h(z)=\frac{z-2}{z^2}$$

Παράδειγμα 3.16

Εστω το σύστημα διακριτού χρόνου Απειρης Κρουστικής Αποκρίσεως που περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών

$$y[n]-0{,}5y[n-1]=2u[n-2]$$

Επιλέγοντας ως μεταβλητές καταστάσεως τις

$$x_1[n]=y[n]$$

$$x_2[n]=y[n+1]$$

έχουμε

$$x_1[n+1]=y[n+1]=x_2[n]$$

$$x_2[n+1]=y[n+2]=0{,}5y[n+1]+2u[n]=0{,}5x_2[n]+2u[n]$$

$$y[n]=x_1[n]$$

Συνεπώς οι καταστατικές εξισώσεις του συστήματος είναι οι

$$\begin{bmatrix}x_1[n+1]\\x_2[n+1]\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0{,}5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1[n]\\x_2[n]\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}u[n]$$

$$y[n]=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1[n]\\ x_2[n]\end{bmatrix}$$

Η συνάρτηση μεταφοράς . υπολογίζεται από την σχέση

.

$$h(z)=C(zI_2-A)^{-1}B+D$$

δηλαδή

$$h(z)=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}z & 0\\ 0 & z\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0{,}5\end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}==\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z & -1\\ 0 & z-0{,}5\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$$

ή

$$h(z)=\frac{z-0{,}5}{z^2-0{,}5z}=\frac{1}{z}$$

.

Πίνακας 3.1 Μαθηματικά πρότυπα γραμμικών συστημάτων

	Συστήματα συνεχούς χρόνου	Συστήματα διακριτού χρόνου
Περιγραφή μέσω της μήτρας κρουστικών αποκρίσεων	$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}H(t,\tau)u(\tau)d\tau$	$y[k]=\sum_{l=-\infty}^{+\infty}H[k,l]u[l]$
Σύστημα σε χαλάρωση την στιγμή t_0/k_0	$y(t)=\int_{t_0}^{+\infty}H(t,\tau)u(\tau)d\tau$	$y[k]=\sum_{l=k_0}^{+\infty}H[k,l]u[l]$
Αιτιατό σύστημα	$y(t)=\int_{-\infty}^{t}H(t,\tau)u(\tau)d\tau$	$y[k]=\sum_{l=-\infty}^{k}H[k,l]u[l]$
Χρονικώς αμετάβλητο σύστημα	$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}H(t-\tau)u(\tau)d\tau$	$y[k]=\sum_{l=-\infty}^{\infty}H[k-l]u[l]$

Αιτιατό χρονικώς αμετάβλητο σύστημα σε χαλάρωση την στιγμή 0^-	$y(t)=\int_{0^-}^{t} H(t-\tau)u(\tau)d\tau$	$y[k]=\sum_{l=0}^{k} H[k-l]u[l]$
Περιγραφή αιτιατών χρονικώς αμετάβλητων συστημάτων σε χαλάρωση την στιγμή 0^- μέσω της μήτρας συναρτήσεων μεταφοράς	$y(s)=H(s)u(s)$	$y(z)=H(z)u(z)$
Περιγραφή δυναμικών συστημάτων μέσω των καταστατικών εξισώσεων	$\dot{x}(t)=A(t)x(t)+B(t)u(t)$ $y(t)=C(t)x(t)+D(t)u(t)$	$x(k+1)=A(k)x(k)+B(k)u(k)$ $y(k)=C(k)x(k)+D(k)u(k)$
Μήτρα συναρτήσεων μεταφοράς συναρτήσει των παραμέτρων των καταστατικών εξισώσεων	$H(s)=C(sI_n-A)^{-1}B+D$	$H(z)=C(zI_n-A)^{-1}B+D$
Μήτρα συναρτήσεων μεταφοράς συναρτήσει της μήτρας κρουστικών αποκρίσεων	$H(s)=\int_{0^-}^{+\infty} H(t)e^{-st}dt$	$H(z)=\sum_{l=0}^{+\infty} H(l)z^{-l}$
Μήτρα κρουστικών αποκρίσεων συναρτήσει των παραμέτρων των καταστατικών εξισώσεων χρονικώς αμετάβλητου συστήματος	$H(t)=Ce^{At}B+D\delta(t)$	$H(k)=CA^kB+D\delta[k]$