ΑΝΑΓΝΩΡΙΣΗ ΠΡΟΤΥΠΩΝ

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών

Λύσεις θεμάτων Σεπτεμβρίου 1996

1 Ασκηση. Μονάδες 3

Δίνονται τα ακόλουθα παραδείγματα δύο κατηγοριών:

Κατηγορία	π_1	π_2	π_3	π_4
ω_1	-3,-1	1,1	2,0	3,1
ω_2	-2,0	0,0	1,-1	

Κατασκευάστε συστημα αναγνωρισης προτυπων χρησιμοποιώντας

α. την συνάρτηση της Ευκλείδιας απόστασης,

β. κριτήριο ταξινόμησης την μικρότερη απόσταση προτύπων, και

γ. διαδικασία εκπαίδευσης κατά την οποία να επιλέξετε σαν πρωτότυπο ένα από τα παραδείγματα.

Ποιό είναι το ελάχιστο σφάλμα του συστήματος αναγνώρισης προτύπων που κατασκευάσατε;

Λύση:

Αρχικά πρέπει να βρώ το πρότυπο εκείνο το οποίο έχει την μικρότερη αθροιστική απόσταση από τα υπόλοιπα πρότυπα της κατηγορίας του. Υπολογίζω την ευκλείδια απόσταση των προτύπων των κατηγοριών

Ευκλείδιες αποστάσεις των προτύπων της ω_1

Πρότυπο	π_1	π_2	π_3	π_4	Αθροισμα
π_1	0.0	4.472	5.099	6.324	15.895
π_2	4.472	0.0	1.414	2.0	7.886
π_3	5.099	1.414	0.0	1.414	7.927
π_4	6.324	2.0	1.414	0.0	9.738

Το άθροισμα των γραμμών του πίναχα μας δίνει την αθροιστική απόσταση κάθε πρότυπου από τα υπόλοιπα πρότυπα της κατηγορίας του. Το δεύτερο πρότυπο (π_2), το οποίο έχει την μικρότερη αθροιστική απόσταση από τα υπόλοιπα πρότυπα της κατηγορίας του, θα επιλέξουμε σαν πρωτότυπο της κατηγορίας ω_1.

Την ίδια εργασία εκτελώ και γιά τα παραδείγματα της δεύτερης κατηγορίας:

Ευκλείδειες αποστάσεις των προτύπων της ω_2

Πρότυπο	π_1	π_2	π_3	Αθροισμα
π_1	0.0	2.0	3.162	5.162
π_2	2.0	0.0	1.414	3.414
π_3	3.162	1.414	0.0	4.576

Με το ίδιο κριτήριο επιλέγουμε το παράδειγμα (0,0) σαν πρωτότυπο της κατηγορίας ω_1.

Το ελάχιστο σφάλμα του συστήματος αναγνώρισης προτύπων που κατασκευάσαμε υπολογίζεται με την ταξινόμηση όλων των παραδειγμάτων που διαθέτουμε με το κριτήριο της ελάχιστης απόστασης:

Ταξινόμηση των παραδειγμάτων

Πρότυπο	(-3,-1)	(1,1)	(2,0)	(3,1)	(-2,0)	(0,0)	(1,-1)
Απόσταση από ω_1 - (1,1)	4.472	0.0	1.414	2.0	3.162	1.414	2.0
Απόσταση από ω_2 - (0,0)	3.1612	1.414	2.0	3.162	2.0	0.0	1.414
Ταξινόμηση	ω_2	ω_1	ω_1	ω_1	ω_2	ω_2	ω_2

Από την τελευταία γραμμή του πίνακα βρίσκουμε ότι το σύστημα ταξινόμησε σωστά τέσσερα πρότυπα από ένα σύνολο επτά προτύπων. Συνεπώς το ελάχιστο σφάλμα του συστήματος αναγνώρισης είναι $3/7 \cdot 100.0 = 42.85\%$

2 Ασκηση. Μονάδες 2

Κατασκευάστε ένα σύστημα αναγνώρισης δι-διάστατων προτύπων τριών κατηγοριών με την βοήθεια συναρτήσεων απόφασης.

Τα πρότυπα της πρώτης κατηγορίας βρίσκονται στον κοινό χώρο που καταλαμβάνουν:

α. η έλλειψη που περνά από τα σημεία (0,0), (0,1), (1,1), (-1,0.5)

β. ο κύκλος με κέντρο το σημείο (2,0) και ακτίνα 1.

Τα πρότυπα της δεύτερης κατηγορίας βρίσκονται στον χώρο που καταλαμβάνει το παραλληλόγραμμο με χορυφές τα σημεία (0,0), (0,1.5), (1.5,1.5), (1.5,0), εξαιρουμένου του χώρου που καταλαμβάνουν τα πρότυπα της πρώτης κατηγορίας.

Τα πρότυπα της τρίτης κατηγορίας βρίσκονται στον χώρο που δεν καταλαβάνουν τα πρότυπα των δύο άλλων κατηγοριών.

Σημείωση:

Η εξίσωση της έλλειψης είναι: $a(x-x_o)^2 + b(y-y_o)^2 = 1$).

Λύση:

Ο χώρος τον οποίο κατέχουν τα πρότυπα κάθε κατηγορίας δεν μπορεί να οριστεί με την βοήθεια γραμμικών συναρτήσεων απόφασης.

Γιαυτό τον λόγο πρέπει να χρησιμοποιήσουμε μή-γραμμικές συναρτήσεις απόφασης. Η πιό απλή μέθοδος επίλυσης αυτού του είδους προβλημάτων μπορεί να γίνει με την βοήθεια της βηματικής συνάρτησης:

$$u(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Αρχικά πρέπει να υπολογίσω τους συντελεστές της εξίσωσης της έλλειψης. Αντικαθιστώντας τα x, y με τα σημεία από τα οποία γνωρίζω ότι διέρχεται η έλλειψη, έχω ένα σύστημα τεσσάρων εξισώσεων με τέσσερις αγνώστους:

$$a(0 - x_o)^2 + b(0 - y_o)^2 = 1$$

$$a(0 - x_o)^2 + b(1 - y_o)^2 = 1$$

$$a(1 - x_o)^2 + b(1 - y_o)^2 = 1$$

$$a(-1 - x_o)^2 + b(0.5 - y_o)^2 = 1$$

Αφαιρώντας την πρώτη εξίσωση από την δεύτερη υπολογίζουμε την μεταβλητή y_o: $y_o = 0.5$.
Αφαιρώντας την δεύτερη εξίσωση από την τρίτη υπολογίζουμε την μεταβλητή x_o: $x_o = 0.5$
Τοποθετώ τις τιμές των x_o, y_o στην τελευταία εξίσωση και λύνω την εξίσωση ως προς a: $a = 0.44444$.
Λύνω την πρώτη εξίσωση ως προς την μεταβλητή b: $b = 3.555556$.
Η εξίσωση της έλλειψης είναι:

$$0.44444(x - 0.5)^2 + 3.555556(y - 0.5)^2 = 1$$

Βάσει του ορισμού της συνάρτησης απόφασης, πρέπει να κατασκευάσω συναρτήσεις έτσι ώστε να έχω:

$$g_{ij}(\mathbf{x}) = g_{ij}(x_1, x_2) > 0, \qquad \forall j \neq i$$

Οι συναρτήσεις αυτές είναι οι ακόλουθες:

$$g_{12}(x_1, x_2) = g_{13}(x_1, x_2) = u(1 - (x_1 - 2)^2 - x_2^2)u(1 - 0.44444(x - 0.5)^2 + 3.555556(y - 0.5)^2)$$

$$g_{21}(x_1, x_2) = g_{23}(x_1, x_2) = u(0.75 - |x_1 - 0.75|)u(1 - |x_2 - 1|) - g_{12}(x_1, x_2)$$

$$g_{31}(x_1, x_2) = g_{32}(x_1, x_2) = 1 - g_{12}(x_1, x_2) - g_{21}(x_1, x_2)$$

3 Ασκηση. Μονάδες 3

Κατασκευάστε ένα πολυεπίπεδο δίκτυο το οποίο να αποτελείται από δύο επίπεδα νευρώνων τύπου perceptron. Το πρώτο επίπεδο έχει τρείς νευρώνες, ενώ το δεύτερο επίπεδο (το επίπεδο εξόδου) έχει μόνον δύο νευρώνες.

Η μη-γραμμική συνάρτηση κάθε νευρώνα δίνεται από την σχέση:

$$f(x) = \frac{x}{1+|x|}$$

Τοποθετείστε,

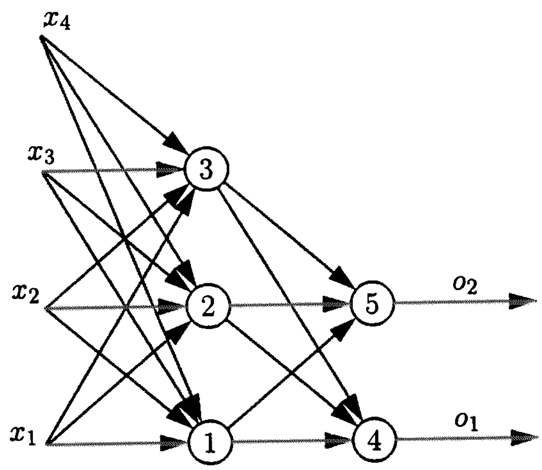
α. διαφορετικές αρχικές τιμές στους συντελεστές βαρύτητας των νευρώνων (όχι ίδια διανύσματα),

β. τα ψηφία του αριθμού μητρώου σας στην είσοδο του δικτύου,

και επαναπροσδιορίστε τους συντελεστές βαρύτητας με την μέθοδο της ανταγωνιστικής εκπαίδευσης.

Λύση:

Το νευρωνικό δίκτυο έχει την ακόλουθη μορφή.



Σχήμα 1: Το νευρωνικό δίκτυο της άσκησης

Η συνάρτηση που μας δίνεται σαν μη γραμμικός τελεστής του νευρώνα πρέπει να ικανοποιεί κάποιες συνθήκες:

1. *Είναι αύξουσα συνάρτηση*

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 > x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \geq f(x_2)$$

Υπολογίζουμε την πρώτη παράγωγο της συνάρτησης:

$$f'(x) = \frac{1}{(1+|x|)^2} > 0$$

Συνεπώς η συνάρτηση είναι αύξουσα.

2. *Εχει πεπερασμένα απειροστικά όρια*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{1+|x|} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{1/x+1} = 1$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{1+|x|} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{1/x-1} = -1$$

Επειδή ικανοποιούνται και οι δύο συνθήκες, η συνάρτηση που μας δίνει η άσκηση μπορεί να χρησιμοποιηθεί σαν μη γραμμικός τελεστής νευρώνα.

Είμαι υποχρεωμένος να χρησιμοποιήσω διαφορετικές αρχικές τιμές για τους συντελεστές βαρύτητας κάθε νευρώνα. Επειδή θέλω να απλοποιήσω τους υπολογισμούς που θα κάνω θέτω όσο το δυνατόν απλούστερες τιμές. Για τον ίδιο λόγο επιλέγω συντελεστή εκπαίδευσης $n = 1$. Οι αρχικές τιμές που θα δώσω πρέπει να είναι κανονικοποιημένες.

Αυθαίρετα επιλέγω τους συντελεστές βαρύτητας έτσι ώστε να έχουν άθροισμα 1.

Συντελεστές βαρύτητας των νευρώνων του δικτύου

Νευρώνας	1	2	3	4
ν_1	-0.5	0.5	0.5	0.5
ν_2	0.5	-0.5	0.5	0.5
ν_3	0.5	0.5	-0.5	0.5
ν_4	1.0	-1.0	1.0	
ν_5	-1.0	1.0	1.0	

Εστω ότι έχω αριθμό μητρώου 3456. Οι έξοδοι των νευρώνων με είσοδο το διάνυσμα $(3, 4, 5, 6)$ είναι:

Εξοδοι των νευρώνων με διάνυσμα εισόδου το $(3, 4, 5, 6)$

Νευρώνας	ν_1	ν_2	ν_3	ν_4	ν_5
Εξοδοι	0.8571	0.8333	0.8	0.4517	0.4370

Ο νικητής νευρώνας στο πρώτο επίπεδο έχει τιμή εξόδου 0.8571. Με την βοήθεια της σχέσης (4.23), που βρίσκεται στην σελίδα 142 των σημειώσεων, υπολογίζω την νέα τιμή των συντελεστών βαρύτητας μόνο για αυτόν τον νευρώνα:

$$w_{11} = (3 + 0.5) = 3.5, \quad w_{12} = (4 - 0.5) = 3.5, \quad w_{13} = (5 - 0.5) = 4.5, \quad w_{14} = (6 - 0.5) = 5.5$$

Κανονικοποιούμε τους συντελεστές έτσι ώστε να έχουν άθροισμα την μονάδα:

$$\sum_{i=1}^{4} w_{1i} = 3.5 + 3.5 + 4.5 + 5.5 = 17$$

Συνεπώς

$$w_{11} = 3.5/17 = 0.2058, \quad w_{12} = 3.5 = 0.2058, \quad w_{13} = 4.5/17 = 0.2647, \quad w_{14} = 5.5/17 = 0.3235$$

Η ίδια διαδικασία επαναλαμβάνεται και γιά τους δύο νευρώνες που αποτελούν το επίπεδο εξόδου. Ο νικητής νευρώνας (ν_4) έχει τιμή εξόδου 0.4517. Η νέα τιμή των συντελεστών βαρύτητας για τον νευρώνα:

$$w_{41} = (0.8571 - 1) = -0.8571, \quad w_{42} = (0.8333 + 1) = 1.8333, \quad w_{43} = (0.8 - 1) = -0.8$$

Κανονικοποιούμε τους συντελεστές έτσι ώστε να έχουν άθροισμα την μονάδα:

$$\sum_{i=1}^{4} w_{4i} = -0.8571 + 1.8333 - 0.8 = 0.1762$$

Συνεπώς

$$w_{41} = -4.864, \quad w_{42} = 10.4046, \quad w_{43} = -4.5403$$

Οι τελικές τιμές των συντελεστών βαρύτητας των νευρώνων του δικτύου μετά τον επαναπροσδιορισμό τους με το διάνυσμα εισόδου το $(3, 4, 5, 6)$ είναι:

Συντελεστές βαρύτητας των νευρώνων του δικτύου μετά το επαναπροσδιορισμό τους με την μέθοδο της ανταγωνιστικής εκπαίδευσης.

Νευρώνας	1	2	3	4
ν_1	0.2058	0.2058	0.2647	0.3235
ν_2	0.5	-0.5	0.5	0.5
ν_3	0.5	0.5	-0.5	0.5
ν_4	4.864	10.4046	-4.5403	
ν_5	-1.0	1.0	1.0	

4 Ασκηση. Μονάδες 4

Σε μηχανικό που δουλεύει σε εργοστάσιο παραγωγής γαλακτοκομικών προιόντων ανατέθηκε η εγκατάσταση και ρύθμιση αυτόματης συσκευής η οποία ανιχνεύει ελαττωματικές συσκευασίες γάλακτος.

Η μηχανή μετρά δύο χαρακτηριστικά μεγέθη κάθε συσκευασίας. Κάθε μέτρηση ελέγχει ανεξάρτητους μεταξύ τους παράγοντες οι οποίοι ευθύνονται για την ύπαρξη κάποιου ελαττώματος στην συσκευασία:

α. η μέτρηση του βαθμού ομογενοποίησης του γάλακτος ελέγχει την σωστή διαδικασία παραγωγής του προιόντος,

β. η μέτρηση του χρώματος του γάλακτος ελέγχει την ποιότητά του.

Σε ενημερωτικό φυλλάδιο, το οποίο περιγράφει πειράματα που έγιναν γιά να αξιοποιηθεί το μηχάνημα, ο μηχανικός μας διάβασε τα εξής:

"... υπολογίστηκε η μέση τιμή των μετρητικών οργάνων των μηχανών σε 300 μη ελαττωματικές συσκευασίες. Ο βαθμός ομογενοποίησης ήταν στο διάστημα 8.4-8.8, και το χρώμα του γάλακτος 4.5-5.7.

Σαράντα ελαττωματικές συσκευασίες γιά κάθε έναν ξεχωριστά παράγοντα (80 συνολικά συσκευασίες) χρησιμοποιήθηκαν για να υπολογιστεί η μέση τιμή των μετρητικών οργάνων. Η μηχανή έδωσε, βαθμό ομογενοποίησης στο διάστημα 7.8-8.5, και χρώμα γάλακτος στο διάστημα 3.7-4.9 ..."

Η μηχανή λειτουργεί ώς εξής. Αρχικά ορίζετε ένα αριθμητικό κατώφλι (Ka) απόφασης. Η μηχανή από κάθε συσκευασία υπολογίζει έναν αριθμό που δίνεται από την σχέση:

$$z = x/8.0 + y/6.0$$

όπου x και y, είναι οι μετρήσεις του βαθμού ομογενοποίησης και χρώματος αντίστοιχα για τυχούσα συσκευασία γάλακτος.

Αν $z < Ka$ τότε η μηχανή αποφασιζει ότι η συσκευασια ειναι ελλατωματικη και το προιον καταστρέφεται, διαφορετικά το προιόν προχωρά προς το τμήμα συσκευασίας.

Επίσης γνωρίζετε ότι:

α. ο εργάτης που έκανε την διαλογή των ελλατωματικών προιόντων σας πληροφόρησε ότι κατά την διάρκεια μιάς ημέρας υπήρχαν περίπου 45 συσκευασίες με απαράδεκτη ομογενοποίηση, και 5 συσκευασίες με άσχημο χρώμα γάλακτος,

β. το εργοστάσιο κατασκεύαζε κάθε ημέρα 20000 μπουκάλια γάλακτος.

Ερώτημα 1ο. Μονάδες 3.0. Πώς πρέπει να ρυθμίσετε την μηχανή έτσι ώστε να ελαχιστοποιήσετε τις λανθασμένες ταξινομήσεις της μηχανής;

Ανακοινώσατε τις αποφάσεις σας στον διευθυντή του εργοστασίου και αυτός σας έκανε τις ακόλουθες παρατηρήσεις:

"Αγαπητέ μου, την επιχείριση δεν την ενδιαφέρει η ελαχιστοποίηση του σφάλματος επιλογής, την ενδιαφέρει απλά η μεγιστοποίηση του κέρδους της. Συνεπώς πρέπει να ρυθμίσετε ξανά την μηχανή έτσι ώστε να έχουμε ελαχιστοποίηση του κόστους που θα έχουν οι λανθασμένες ταξινομήσεις του μηχανήματος.

Μάθετε λοιπόν ότι κάθε φιάλη έχει κόστος παραγωγής 65.3 δραχμές. Από μετρήσεις που έχουμε χάνει, έχουμε βρεί ότι ένας στους πενταχόσιους καταναλωτές που παίρνει στα χέρια του μία ελαττωματική συσκευασία καταφεύγει στην αγορανομία, η οποία στην συνέχεια μας επιβάλλει ένα πρόστιμο 5000000 δραχμών."

Ερώτημα 3ο. Μονάδες 0.5. Πώς πρέπει να ρυθμίσετε την μηχανή έτσι ώστε να έχετε το μικρότερο οικονομικό κόστος από τα σφάλματα ταξινομήσεων της μηχανής;

Ερώτημα 4ο. Μονάδες 0.5. Τι πρέπει να κάνετε έτσι ώστε να βελτιώσετε την απόδοση της μηχανής;

Σημείωση.

Για την λύση της άσκησης χρησιμοποιείστε το εξής θεώρημα:

Η πυκνότητα πιθανότητας του αθροίσματος δύα ανεξάρτητων μεταβλητών ισούται με την συνέλιξη των αντίστοιχων πυκνοτήτων πιθανότητας των μεταβλητών.

Δηλαδή, αν X, Y είναι δύο ανεξάρτητες μεταβλητές με πυκνότητα πιθανότητας $p_x(x), p_y(y)$ αντίστοιχα, τότε η πυκνότητα πιθανότητας της μεταβλητής Z είναι:

$$p_z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_x(r)p_y(z-r)dr$$

Λύση:

Ερώτημα 1ο Η άσκηση μας ζητά να βρούμε το κατώφλι εκείνο με το οποίο θα έχουμε τον μικρότερο αριθμό λανθασμένων ταξινομήσεων.

Ορίζω σαν, $\omega_1 =$ "Ελλατωματική συσκευασία" και $\omega_2 =$ "καλή συσκευασία".

Από τον τρόπο λειτουργίας των μηχανών διαλογής μπορώ να υπολογίσω το σφάλμα ταξινόμησης ως εξής: αν z είναι η μέτρηση που πήρα, τοτε:

$$\Sigma\varphi\acute{\alpha}\lambda\mu\alpha = p(z < Ka, z \in \omega_2) + p(z \geq Ka, z \in \omega_1) \quad \Rightarrow$$

$$\Sigma\varphi\acute{\alpha}\lambda\mu\alpha = p(z < Ka | z \in \omega_2)p(z \in \omega_2) + p(z \geq Ka | z \in \omega_1)p(z \in \omega_1) \quad \Rightarrow$$

$$\Sigma\varphi\acute{\alpha}\lambda\mu\alpha = p(\omega_2) \int_{-\infty}^{Ka} p_z(z|z \in \omega_2)dz + p(\omega_1) \int_{Ka}^{+\infty} p_z(z|z \in \omega_1)\, dz$$

Το βέλτιστο κατώφλι απόφασης Ka είναι εκείνο το οποίο θα ελαχιστοποιήσει την συνάρτηση του σφάλματος.

Οι πιθανότητες $p(\omega_1), p(\omega_2)$ είναι ανεξάρτητες από τα χαρακτηριστικά της μηχανής και υπολογίζονται από τις πληροφορίες που πήραμε από τον εργάτη που έκανε την διαλογή:

$$p(\omega_1)\tilde{}(45+5)/20000 = 0.0025, \quad p(\omega_2) = 1 - p(\omega_1) = 0.9975$$

Οι μετρήσεις που έχουμε γιά την μηχανή αφορούν μονάχα την περιοχή τιμών στις οποίες μεταβάλεται η ομογενοποίηση και το χρώμα του γάλακτος όταν το προιόν είναι κατάλληλο (ω_2) είτε όταν αυτό είναι ακατάλληλο (ω_1).

Η πυκνότητα πιθανότητας, με το κριτήριο μεγιστοποίησης της εντροπίας μας (Θεώρημα 6, σελίδα 92), ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή. Συνεπώς έχω:

$$p_x(x|x \in \omega_2) = 2.5(u(x-8.4) - u(x-8.8))$$

$$p_y(y|y \in \omega_2) = 0.8333(u(y-4.5) - u(y-5.7))$$

$$p_x(x|x \in \omega_1) = 1.4285(u(x-8.5) - u(x-7.8)$$

$$p_y(y|y \in \omega_1) = 0.8333(u(y-3.7) - u(y-4.9)$$

Γιά να υπολογίσουμε την πυκνότητα πιθανότητας της μεταβλητής z πρέπει να ικανοποιήσουμε τις προυποθέσεις του θεωρήματος που μας δίνεται σαν βοήθημα, συνεπώς πρέπει πρώτα να βρούμε την πυκνότητα πιθανότητας δύο νέων μεταβλητών, των $x' = x/8$ και $y' = y/6$. Επειδή η μορφή της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας δεν μεταβάλλεται αν πολλαπλασιάσουμε την ανεξάρτητη μεταβλητή με σταθερό αριθμό, έχω:

$$p_{x'}(x'|x' \in \omega_2) = 20(u(x'-1.05) - u(x'-1.1))$$

$$p_{y'}(y'|y' \in \omega_2) = 5(u(y'-0.75)u(y'-0.95)$$

$$p_{x'}(x'|x' \in \omega_1) = 11.428(u(x'-0.975) - u(x'-1.0625))$$

$$p_{y'}(y'|y' \in \omega_1) = 5(u(y'-0.6166) - u(y'-0.8166))$$

Γιά τις μεταβλητές, x' και y' ισχύουν οι προυποθέσεις του θεωρήματος διότι $z = x' + y'$, συνεπώς:

$$p_z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{x'}(r)p_{y'}(z-r)dr$$

αντικαθιστώντας τις γνωστές πυκνότητες πιθανότητας γιά τις δύο κατηγορίες ξεχωριστά, έχω:

$$p_z(z|z \in \omega_2) = 50(|z-1.8| - |z-2| + |z-2.05| - |z-1.85|)$$

$$p_z(z|z \in \omega_1) = 50(|z-1.8| - |z-2| + |z-2.05| - |z-1.85|)$$

Μία απλούστερη μέθοδος υπολογισμού των πυκνοτήτων πιθανότητας της μεταβλητής z είναι η ακόλουθη:

Είναι γνωστό ότι η συνέλιξη δύο ομοιόμορφων κατανομών είναι μια κατανομή με μορφή ισοσκελούς τραπεζίου του οποίου η μεγαλύτερη βάση ακουμπά επάνω στον οριζόντιο άξονα. Οι προβολές των άκρων του τραπεζίου υπολογίζονται εύκολα από το άθροισμα των άκρων των ομοιόμορφων κατανομών, δηλαδή:

$$1.05 + 0.75 = 1.8, \quad 1.1 + 0.75 = 1.85, \quad 1.05 + 0.95 = 2, \quad 1.1 + 0.95 = 2.05$$

Το ύψος του τραπεζίου υπολογίζεται εύκολα διότι το εμβαδόν του πρέπει να ισούται με την μονάδα:

$$Y\psi o\varsigma * ((2.05 - 1.8) + (2 - 1.85))/2 = 1 \quad \Rightarrow \quad Y\psi o\varsigma = 5$$

Συνεπώς, η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας δίνεται από την σχέση:

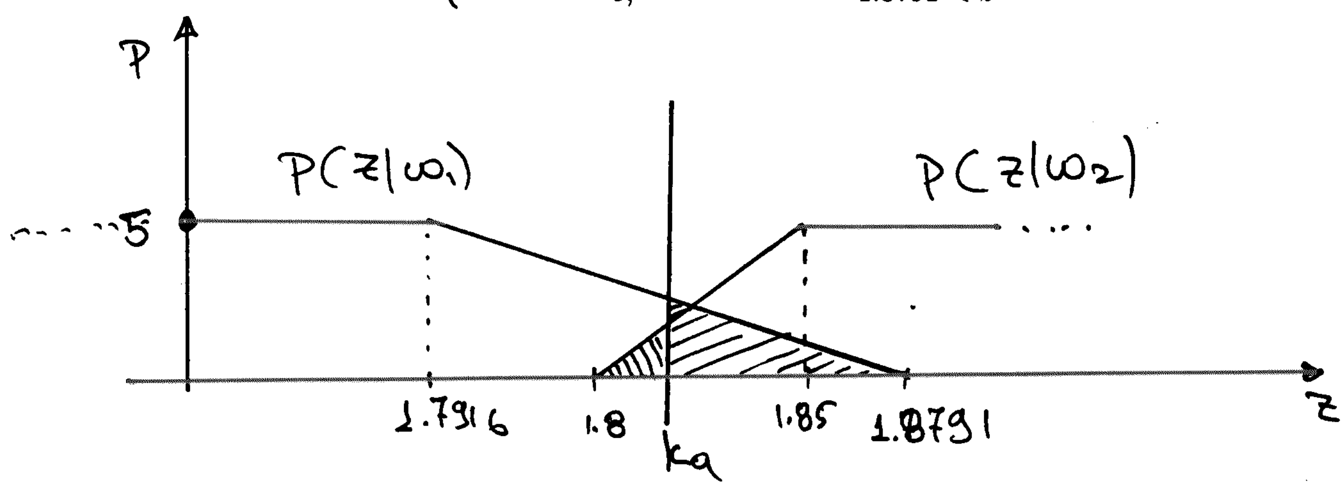
$$p_z(z|z \in \omega_2) = \begin{cases} 0, & 1.8 < z \\ 100z - 180, & 1.8 \leq z < 1.85 \\ 5, & 1.85 \leq z < 2 \\ -100z + 205, & 2 \leq z < 2.05 \\ 0, & 2.05 < z \end{cases}$$

Με τον ίδια μεθοδολογία υπολογίζω την πυκνότητα πιθανότητας της μεταβλητής z γιά την κατηγορία ω_1. Τα τέσσερα άκρα του τραπεζίου προβάλλονται στις θέσεις $1.5916, 1.6791, 1.7916, 1.8791$.

Το ύψος του τραπεζίου είναι:

$$Y\psi o\varsigma * ((1.8791 - 1.5916) + (1.7916 - 1.6791))/2 = 1 \quad \Rightarrow \quad Y\psi o\varsigma = 5$$

$$p_z(z, z \in \omega_1) = \begin{cases} 0, & 1.5916 < z \\ 59.1716z - 94.1775, & 1.5916 \leq z < 1.6791 \\ 5, & 1.6791 \leq z < 1.7916 \\ -59.1716z + 111.1893, & 1.7916 \leq z < 1.8791 \\ 0, & 1.8791 < z \end{cases}$$



Από τις συναρτήσεις των πυκνοτήτων πιθανότητας προκύπτει ότι το κατώφλι πρέπει να επιλεγεί στο διάστημα [1.8,1.8791], διότι αυτή είναι η περιοχή στην οποία είναι δυνατόν να υπάρζουν μετρήσεις της μεταβλητής z και γιά τις δύο κατηγορίες αντικειμένων.

Ας περιορίσουμε επίσης το διάστημα αναζήτησης στην περιοχή τιμών [1.8,1.85] διότι σε αυτό το διάστημα η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας και των δύο κατανομών δίνεται από μόνο μία σχέση. Αν η λύση που θα βρούμε είναι μεγαλύτερη από το άκρο του διαστήματος (1.85) τότε πρέπει να ψάξουμε την λύση στο διάστημα [1.85,1.8791].

Με την υπόθεση που κάναμε οι πιθανότητες της συναρτησης σφάλματος υπολογίζονται σαν εμβαδά τριγώνων όπως φαίνεται και στο σχήμα που ακολουθεί:

$$\Sigma\varphi\acute{\alpha}\lambda\mu\alpha = p(\omega_2)0.5(Ka - 1.7916)(100K\alpha - 180) + p(\omega_1)0.5(1.8791 - Ka)(-59.1716Ka + 111.1893)$$

Το κατώφλι που ελαχιστοποιεί το άθροισμα των σφαλμάτων ταξινόμησης υπολογίζεται από την λύση της εξίσωσης:

$$\frac{\partial \Sigma\varphi\acute{\alpha}\lambda\mu\alpha}{\partial K\alpha} = 0$$

Αντικαθιστώντας έχουμε την λύση: $Ka = 1.80011$. Η λύση που βρήκαμε είναι μέσα στο διάστημα της υπόθεσης που κάναμε, συνεπώς είναι αποδεκτή.

Με αυτό το κατώφλι η πιθανότητα σφάλματος υπολογίζεται ως εξής:

$$E\lambda\acute{\alpha}\chi\iota\sigma\tau o\ \sigma\varphi\acute{\alpha}\lambda\mu\alpha = 9.2418 * 10^{-4}$$

Ο αριθμός των φιαλών που ταξινομούνται λανθασμένα κάθε ημέρα είναι:

$$9.2418 * 10^{-4} * 20.000 = 18.4837$$

Ερώτημα 2ο

Ζητάμε να ελαχιστοποιήσουμε το οικονομικό κόστος το οποίο μπορεί να αναλυθεί στα επιμέρους οικονομικά κόστη της "λανθασμένης αποδοχής" (C_{21}) και της "λανθασμένης απόρριψης" (C_{12}) :

$$O\iota\kappa o\nu o\mu\iota\kappa\acute{o}\ \kappa\acute{o}\sigma\tau o\varsigma = C_{12}p(\omega_2)\int_{-\infty}^{Ka} p_z(z|z \in \omega_2)dz + C_{21}p(\omega_1)\int_{Ka}^{+\infty} p_z(z|z \in \omega_1)$$

Εύκολα μπορούμε να υπολογίσουμε τα C_{12} και C_{12} που περιγράφουν το κόστος ανά φιάλη

$$C_{12} = 65.3$$

$$C_{21} = \frac{1}{500}5000000 = 10000$$

Το νέο κατώφλι που ελαχιστοποιεί το οικονομικό κόστος υπολογίζεται με την εξίσωση:

$$\frac{\partial O\iota\kappa o\nu o\mu\iota\kappa\acute{o}\ \kappa\acute{o}\sigma\tau o\varsigma}{\partial z} = 0$$

Ελπίζοντας ότι η λύση βρίσκεται μέσα στο διάστημα (1.8,1.8791) λύνουμε την εξίσωση όπως ακριβώς και στο προηγούμενο ερώτημα:

$$\frac{\partial}{\partial z}[65.13675(100z - 180)(z - 1.8) + 25(-59.1716z + 111.1893)(1.8791 - z)] = 0 \Rightarrow z = Ka = 1.81463$$

Ερώτημα 3ο

Το σημαντικότερο μειονέκτημα της μεθόδου που ακολουθήσαμε είναι η υπόθεση ρογ κάναμε για τις πυκνότητες πιθανότητες των δύο κατηγοριών που αναγνωρίζουμε. Ενας ακριβέστερος τρόπος υπολογισμού των συναρτήσεων πυκνότητας πιθανότητας μπορεί να επιτευχθεί με την δημιουργία παραδειγμάτων εκπαίδευσης.

Βάζουμε λοιπόν την μηχανή σε λειτουργία και παίρνουμε μετρήσεις από φιάλες, οι οποίες στην συνέχεια ελέγχονται γιά την ποιότητά τους έτσι ώστε να γνωρίζουμε σε ποιά κατηγορία προιόντων ανήκουν (ω_1 ή ω_2).

Οταν συγκεντρώσουμε αρκετές μετρήσεις επιλέγουμε με την μέθοδο x^2 εκείνη την πυκνότητα πιθανότητας που ομοιάζει περισσότερο με τα στατιστικά δεδομένα που έχουμε στην διάθεσή μας από τα παραδείγματα εκπαίδευσης.

Εναλλακτικά μπορούμε επίσης να κατασκευάσουμε τις πυκνότητες πιθανότητας με την μέθοδο των πλαισίων Parzen ή να τις προσεγγίσουμε με την βοήθεια ορθοκανονικών συναρτήσεων.