

# ΑΝΑΓΝΩΡΙΣΗ ΠΡΟΤΥΠΩΝ Ι

## Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Τεχνολογίας Υπολογιστών

Εξεταστική περίοδος Ιούνιος 2001

### Άσκηση 1. Μονάδες 5

Για την διάγνωση της ασθένειας  $X$  υπάρχει η εξέταση  $E1$ . Η εξέταση αυτή δίνει αριθμητική τιμή η οποία στην περίπτωση που ο εξεταζόμενος είναι υγιής η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας δίνεται από την εξίσωση:

$$f(x|ΥΓΙΗΣ) = \begin{cases} ax^2 + bx + c, & 0 \leq x \leq 5 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Με  $a < 0$ .

Στην περίπτωση κατά την οποία ο εξεταζόμενος είναι φορέας της ασθένειας έχει υπολογιστεί ότι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της εξέτασης ακολουθεί την κατανομή:

$$f(x|\PhiΟΡΕΑΣ) = \begin{cases} d \sin(0.1x) + g, & 3 \leq x \leq 10 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Πρόσφατα ανακαλύφθηκε μια νέα διαγνωστική μέθοδος για την οποία υπολογίστηκε ότι η διαγνωστική τιμή ακολουθεί συμμετρική τριγωνική κατανομή είτε ο εξεταζόμενος είναι υγιής είτε είναι φορέας.

Από βεβαιωμένα υγιείς και φορείς εξεταζόμενους είχαμε τις ακόλουθες μετρήσεις:

ΥΓΙΗΣ	8125	3110	9721	8200
ΦΟΡΕΑΣ	154	228	1115	85

Ο πληθυσμός που θα εξετάσετε είναι 200000 άνθρωποι από τους οποίους εκτιμάτε ότι υπάρχουν 25000 ασθενείς. Διαθέτοντας φάρμακο για 20000 ανθρώπους με επιτυχία ίασης το 80%, κάντε τις κατάλληλες υποθέσεις που εσείς θεωρείτε λογικές και απαραίτητες για να εκτελέσετε τους ακόλουθους υπολογισμούς.

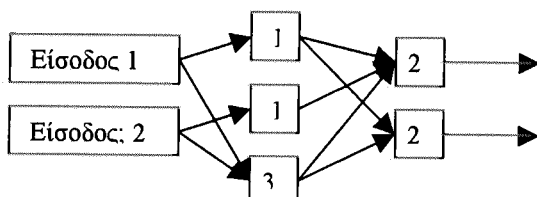
Α. Χρησιμοποιώντας μόνο την πρώτη εξέταση και υλοποιώντας μία διαδικασία επιλογής ασθενών υψηλού κινδύνου χορηγήστε όλες τις δόσεις του φαρμάκου και υπολογίστε τον αναμενόμενο αριθμό θανάτων.

Β. Επαναλάβετε την ίδια διαδικασία χρησιμοποιώντας μόνο την δεύτερη εξέταση.

Γ. Επαναλάβετε την ίδια διαδικασία χρησιμοποιώντας και τις δύο εξετάσεις.

### Άσκηση 2. Μονάδες 4

Δίνεται το ακόλουθο νευρωνικό δίκτυο το οποίο αποτελείται από νευρώνες τύπου 1, 2 και 3, όπως αυτοί δίνονται στο σχήμα που ακολουθεί.



Μπορείτε να υπολογίσετε τις σχέσεις επαναπροσδιορισμού των συντελεστών βαρύτητας των νευρώνων με την βοήθεια της μεθόδου οπισθοδρομικής διάδοσης του σφάλματος όταν γνωρίζετε ότι οι νευρώνες έχουν την ακόλουθη μη-γραμμική συνάρτηση μεταφοράς:

# ΑΝΑΓΝΩΡΙΣΗ ΠΡΟΤΥΠΩΝ Ι

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Τεχνολογίας Υπολογιστών  
Εξεταστική περίοδος Ιούνιος 2001

## Λύσεις των Ασκήσεων

### Ασκηση 1. Μονάδες 5

Στις συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας έχω άγνωστες μεταβλητές συνεπώς πρέπει αρχικά να τις υπολογίσω.

Από τον περιορισμό του ολοκληρώματος της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας έχω:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x | \text{ΥΓΙΗΣ}) dx = \int_0^5 f(x | \text{ΥΓΙΗΣ}) dx = \frac{125}{3}a + \frac{25}{2}b + 5c = 1$$

Πρέπει επίσης η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας να είναι θετικά ορισμένη σε όλο το πεδίο ορισμού, δηλαδή οι ρίζες της εξίσωσης να είναι εκτός του διαστήματος (0,5). Δεν έχω άλλον περιορισμό από την άσκηση οπότε βλέπω ότι έχω την δυνατότητα να τοποθετήσω και τιμές της επιλογής μου. Για να διευκολυνθώ στις πράξεις θέτω  $c=0$ , οπότε

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x | \text{ΥΓΙΗΣ}) dx = \frac{125}{3}a + \frac{25}{2}b = 1 \Rightarrow b = -\frac{10}{3}a + \frac{2}{25}$$

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας γίνεται:

$$f(x | \text{ΥΓΙΗΣ}) = ax^2 + \left(-\frac{10}{3}a + \frac{2}{25}\right)x = 0$$

Για να έχω ρίζες έξω από το διάστημα (0,5) βρίσκω τις ρίζες του τριώνυμου:

$$x_1 = 0, x_2 = \frac{2}{75} \frac{125a - 3}{a}$$

$$x_2 < 0 \vee x_2 > 5 \Rightarrow \left\{0 < a < \frac{3}{125}\right\} \vee \left\{-\frac{6}{125} < a < 0\right\}$$

Η πρώτη λύση απορρίπτεται διότι το  $a$  πρέπει να είναι αρνητικό. Διαλέγω  $a = -1/125$

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας γίνεται

$$f(x | \text{ΥΓΙΗΣ}) = -0.008x^2 + 0.10667x$$

Τα ίδια κάνω και στην δεύτερη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x | \text{ΦΟΡΕΑΣ}) dx = \int_3^{10} (a \sin(0.1x) + b) dx = 4.1503a + 7b = 1$$

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας πρέπει να είναι θετικά ορισμένη σε όλο το πεδίο ορισμού:

$$f(x | \text{ΦΟΡΕΑΣ}) > 0 \Rightarrow a \sin(0.1x) + b \geq 0$$

Γνωρίζουμε ότι  $\sin x(0.1x) > -1$  επί

π εξεφεύγουμε

$$-a + b \geq 0 \Leftrightarrow b \geq a$$

η β.ο.π. είναι θετικά ορισμένη

Για να απελευθερώσω τις πράξεις θέτω

$$a = \frac{1}{4.1503} \quad \text{Αν } b = \frac{1}{4.1503}$$

Νευρώνας τύπου 1:

$$f(x, w) = \tanh(x)$$

Νευρώνας τύπου 2:

$$f(x, w) = \begin{cases} -0.5, & x < -1 \\ \sin(ax + b), & -1 \leq x \leq 1 \\ 0.5 & 1 < x \end{cases}$$

Νευρώνας τύπου 3:

$$f(x, w) = \begin{cases} 1 - \exp(-ax), & x < 0 \\ \log(ax + g), & 0 \leq x \end{cases}$$

Τοποθετήστε στην είσοδο του δικτύου το πρότυπο (2.1,3.1) που ανήκει στην πρώτη από δύο κατηγορίες προτύπων. Εκτελέστε μόνο ένα βήμα επαναπροσδιορισμού των συντελεστών βαρύτητας του δικτύου.

### Ασκηση 3. Μονάδες 3

Δίνονται τα ακόλουθα παραδείγματα προτύπων δύο κατηγοριών.

Κατηγορία 1	(-2,1)	(-0.5,1.5)	(2.5,0.5)	(3,-1.5)		
Κατηγορία 2	(-1,-1)	(0.5,0)	(1,1)	(1.5,0.5)	(2,-1)	(2,-2)

Έχετε στην διάθεσή σας λογισμικό που υλοποιεί τον αλγόριθμο Ho-Kasyap.

Πως μπορείτε να χρησιμοποιήσετε αυτό το λογισμικό έτσι ώστε να πετύχετε αξιοπιστία ταξινόμησης 100% για τα παραδείγματα εκπαίδευσης;

## Άσκηση 2. Μονάδες 4

Παρατηρώ ότι το δίκτυο είναι εμπρόσθιας διάδοσης συνεπώς μπορώ να εφαρμόσω τον αλγόριθμο οπισθοδρομικής διάδοσης του σφάλματος. Από τις σχέσεις επαναπροσδιορισμού που βρίσκονται στο βιβλίο βλέπω ότι χρειάζεται ο υπολογισμός της παραγώγου της μη-γραμμικής συνάρτησης μεταφοράς.

Συνεπώς, για να υπολογίσω τις σχέσεις επαναπροσδιορισμού του αλγόριθμου οπισθοδρομικής διάδοσης του σφάλματος χρειάζεται να υπολογίσω τις άγνωστες παραμέτρους των μη-γραμμικών τελεστών του νευρώων. Από τον περιορισμό συνέχειας της μη-γραμμικής συνάρτησης ενός νευρώνα έχω:

Νευρώνας τύπου 2:

$$f(-1)=-0.5 \text{ και } f(1)=1, \Rightarrow \sin(-a+b)=-0.5 \text{ και } \sin(a+b)=0.5$$

Οι λύσεις του συστήματος των εξισώσεων είναι πολλές αλλά αναζητάμε την πιο απλή λύση που εξασφαλίζει και μία μονότονα αύξουσα συνάρτηση στο διάστημα  $(-1,1)$

$$-a+b=-\pi/6 \text{ και } a+b=\pi/6$$

$$a=\pi/6, b=0$$

Η μη-γραμμική συνάρτηση τύπου-2 είναι

$$f_2(x) = \begin{cases} -0.5, & x < -1 \\ \sin(\frac{\pi}{6}x), & -1 \leq x \leq 1 \\ 0.5 & 1 < x \end{cases}$$

Νευρώνας τύπου 3:

Από την συνθήκη συνέχειας στο σημείο 0 έχω

$$1 - \exp(0) = \log(b) \Rightarrow b=1$$

Η συνάρτηση πρέπει να είναι γνησίως αύξουσα, συνεπώς  $a > 0$ .

Η τιμή του  $a$  μου καθορίζει την κλίση της καμπύλης κυρίως στην περιοχή του μηδενός. Έχω την ελευθερία να την επιλέξω στην τιμή που θέλω. Κανονικά πρέπει να έχει μικρή αριθμητική τιμή, δηλ. καλές τιμές είναι αυτές που βρίσκονται στο διάστημα  $[0.05, 1]$ . Για ευκολία στους υπολογισμούς θα διαλέξω την τιμή  $a=1$ :

$$f_3(x) = \begin{cases} 1 - \exp(-x), & x < 0 \\ \log(x+1), & 0 \leq x \end{cases}$$

Εφαρμογή του αλγόριθμου οπισθοδρομικής διάδοσης του σφάλματος:

1. Πρέπει να υπολογίσω την παράγωγο της συνάρτησης του μη-γραμμικού τελεστή για κάθε είδος νευρώνα, σαν συνάρτηση της τιμής της εξόδου.

Νευρώνας τύπου 1:

$$o_1 = f_1(x) = \tanh(x) \Rightarrow \frac{\partial f_1(x)}{\partial x} = 1 - \tanh^2 x = 1 - o_1^2$$

Νευρώνας τύπου 2:

$$o_2 = f_2(x) = \begin{cases} -0.5, & x < -1 \\ \sin(\frac{\pi}{6}x), & -1 \leq x \leq 1 \\ 0.5 & 1 < x \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} f_2(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ \frac{\pi}{6} \cos(\frac{\pi}{6}x), & -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & 1 < x \end{cases}$$

Νευρώνας τύπου 3:

$$o_3 = f_3(x) = \begin{cases} 1 - \exp(-x), & x < 0 \\ \log(x+1), & 0 \leq x \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} f_3(x) = \begin{cases} \exp(-x), & x < 0 \\ \frac{1}{x+1}, & 0 \leq x \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{1-o_3}, & o_3 < 0 \\ \exp(-o_3), & 0 \leq o_3 \end{cases}$$

Εχω φέρει τις εξισώσεις των παραγώγων ακριβώς στην μορφή που χρειάζεται για να εφαρμόσω τις αναδρομικές σχέσεις του αλγόριθμου οπισθοδρομικής διάδοσης του σφάλματος.

Για να διευκολυνθώ στις πράξεις οι αρχικές τιμές των συντελεστών βαρύτητας τις διαλέγω να έχουν μία μικρή απόλυτη αριθμητική τιμή (κοντά στο μηδέν) και διαφορετικό πρόσημο (τυχαία επιλεγμένο)

.....

### Ασκηση 3. Μονάδες 3

Ο αλγόριθμος Ho-Kasyap υπολογίζει με επαναληπτικό τρόπο τους συντελεστές βαρύτητας γραμμικών συναρτήσεων απόφασης ή διάκρισης. Για να πετύχω συνεπώς αξιοπιστία ταξινόμησης 100% πρέπει τα παραδείγματά μου να είναι γραμμικά διαχωρίσιμα. Γιαντό τον λόγο απεικονίζω τα παραδείγματα των δύο κατηγοριών στο επίπεδο και βλέπω ότι αυτά δεν είναι γραμμικά διαχωρίσιμα. Συνεπώς ο αλγόριθμος Ho-Kasyap δεν μπορεί να λύσει το πρόβλημα που τίθεται.

Ενας τρόπος υπάρχει για να λύσω το πρόβλημα αυτό. **Επεκτείνω το διάνυσμα των παραδειγμάτων με την βοήθεια μη γραμμικών συναρτήσεων.**