Στοιχεία της Ασαφούς Λογικής

Επιμέλεια:

Πέτρος Π. Γρουμπός, Καθηγητής

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Τεχνολογίας Υπολογιστών

Σκοπός

Μελέτη

- Ασαφής Λογική
- Βασικοί Όροι Ασαφούς Λογικής
- Ασαφή Σύνολα
- Συνάρτηση Συμμετοχής
- Λεκτικές Μεταβλητές
- Ασαφής Εξαρτημένη Δήλωση
- Ασαφείς Κανόνες
- Τελεστές Ασαφούς Λογικής
- Πράξεις με Ασαφή Σύνολα
- Διακριτές Συναρτήσεις Συμμετοχής
- Συνδετικά – και, ή, όχι
- Λεκτικά Περιγράμματα

Αριστοτέλης

ο δημιουργός **της Δίτιμης (0-1) Λογικής**

► **«Μια λογική πρόταση μπορεί να είναι αληθής (1) ή ψευδής (0),**
αποκλείοντας τρίτη λύση»

Αρχή της του Τρίτου Αποκλείσεως
(Αριστοτέλης-Όργανον ή Λογική)

Ο *Αριστοτέλης* (Στάγειρα, 382-322 π.Χ.) ήταν αρχαίος Έλληνας φιλόσοφος (Περιπατητική Σχολή), μαθητής του Πλάτωνα και δάσκαλος του Μ. Αλέξανδρου. Υπήρξε σοφός μεγαλοφυής, δημιουργός της δίτιμης (0-1) Λογικής, μέγας φυσιοδίφης και ο σημαντικότερος από τους διαλεκτικούς της αρχαιότητας.

Η ΑΣΑΦΕΙΑ και ΑΒΕΒΑΙΟΤΗΤΑ
της γλώσσας που μιλάμε και της γκρίζας πραγματικότητας
στα ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

"So far as laws of mathematics refer to reality, they are not certain.

And so far as they are certain, they do not refer to reality".

Albert Einstein *(1879-1955)*

“Geometrie und Erfahrung”,

Ομιλία στην Πρωσική Ακαδημία (1921)

Η *κλασική δίτιμη (0-1)* ***Αριστοτέλεια λογική***

- Η ***κλασική δίτιμη (Αριστοτέλεια) λογική*** είναι γνωστή από την Αρχαιότητα (500 π.Χ.), θεμελιώθηκε από τους αρχαίους Έλληνες φιλόσοφους (***Αριστοτέλης, Πυθαγόρας, Στωικοί-Χρύσιππος***, κ.λπ.) και αποτελεί τη βάση της λεγόμενης δυτικής σκέψης και του δυτικού πολιτισμού.
- Σύμφωνα με την κλασική δίτιμη λογική μια λογική πρόταση μπορεί να πάρει μόνον δύο τιμές, δηλ. μπορεί να είναι αληθής ή ψευδής (1 ή 0), αποκλείοντας τρίτη λύση (Αρχή της Απόκλεισης του Τρίτου). Έτσι σύμφωνα με τη Δίτιμη Λογική, αν μια λογική πρόταση δεν είναι αληθής (άσπρη) τότε θα είναι αναγκαία ψευδής (μαύρη), ενώ αν δεν είναι ψευδής τότε θα είναι αναγκαία αληθής.

ΕΝΑ ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΛΟΓΙΚΟ ΠΑΡΑΔΟΞΟ
της ΔΙΤΙΜΗΣ (Αριστοτέλειας) ΛΟΓΙΚΗΣ

► ***Το παράδοξο του Κρητικού Επιμενίδη***: ***"Κρῆτες ἀεὶ ψεῦσται - Οι Κρητικοί λένε πάντα ψέματα"*** **:**
Ο Επιμενίδης λέει ότι οι Κρητικοί λένε πάντα ψέματα
Ο Επιμενίδης όμως είναι Κρητικός
Άρα ο Επιμενίδης λέει ψέματα, ότι οι Κρητικοί ψεύδονται
Άρα οι Κρητικοί λένε την αλήθεια
Άρα και ο Επιμενίδης λέει την αλήθεια
Άρα οι Κρητικοί είναι ψεύτες, κ.ο.κ. (φαύλος κύκλος).

- **Δηλ. ο Κρητικός Επιμενίδης ψεύδεται όταν λέει ότι όλοι οι Κρητικοί λένε πάντα ψέματα; Εάν ψεύδεται, λέει την αλήθεια. Αλλά εάν λέει την αλήθεια, τότε ψεύδεται.**

Αντίφαση της δίτιμης Λογικής

Δίτιμη Λογική και Πλειότιμη-Ασαφής Λογική

Η δίτιμη Αριστοτέλεια λογική επικράτησε πλήρως από τον $10^{ο}$ αιώνα στον δυτικό πολιτισμό, για δύο κυρίως λόγους:

- **$1^{ο}$) γιατί απλουστεύει κατά πολύ τη συλλογιστική των προβλημάτων, και**
- **$2^{ο}$) γιατί αποδίδει απόλυτη «βεβαιότητα» στην απόδειξη και αποδοχή της «αλήθειας».**

Όμως αυτή η απόλυτη «βεβαιότητα» της δίτιμης λογικής καθώς και οι φυσικές ατέλειες της «ασπρόμαυρης» συλλογιστικής της, αποδείχθηκαν «ανθρωπο-λογικά» ανεπαρκείς για την ερμηνεία τόσο της φυσικής γλώσσας και της ανθρώπινης συμπεριφοράς, όσο και της συνήθως ασαφούς πραγματικότητας που μας περιβάλλει.

Η Ασαφής Λογική είναι επέκταση της Δίτιμης Λογικής, από το δίτιμο σύνολο {0,1} στο απειρότιμο [0,1]

- Η Ασαφής Λογική είναι η προσπάθεια των επιστημόνων και κυρίως αυτών που ασχολούνται με την ***“τεχνητή νοημοσύνη”*** να μελετήσουν και να μαθηματικοποιήσουν τη δομή της φυσικής γλώσσας του ανθρώπου.
- Με την ασαφή λογική θα θέλαμε ξεκινώντας από τη δίτιμη κλασική λογική (0 ή 1) να την επεκτείνουμε εισάγοντας, ασάφεια, αοριστία, αβεβαιότητα κτλ, έτσι ώστε αφενός να προσεγγίζει την εκφραστική δύναμη και απλότητα της φυσικής γλώσσας, αλλά και αφετέρου να περισώζει όσον το δυνατόν περισσότερο τη γνωστή μαθηματική δομή της κλασικής λογικής.

- Έτσι, τα αίτια που έκαναν αναπόφευκτη την επέκταση της δίτιμης λογικής και οδήγησαν στη δημιουργία πλειό-τιμων λογικών όπως η Ασαφής Λογική (δηλ. σε λογικές με πάνω από δύο τιμές), ήταν κυρίως η ανάγκη μαθηματικοποίησης της φυσικής-καθομιλουμένης γλώσσας του ανθρώπου και της φυσικής ασάφειας που διέπει την ανθρώπινη νοημοσύνη-συμπεριφορά, καθώς και η αναγκαιότητα για μια πιο ρεαλιστική θεώρηση της έννοιας της αβεβαιότητας στην πράξη.
- Στην Ασαφή Λογική λοιπόν εκτός των δύο τιμών αληθείας 0 και 1, έχουμε ως τιμή αλήθειας *(αληθοτιμή)* και κάθε αριθμό στο κλειστό απειρο-διάστημα [0,1].

- **Τελικά το 1965, ο *Lotfi Zadeh* δημοσίευσε την εμπνευσμένη εργασία του με τίτλο *“Fuzzy Sets-Ασαφή Σύνολα”*, όπου εισήγαγε για πρώτη φορά την έννοια του Ασαφούς Συνόλου με πεδίο αληθοτιμών το απειροδιάστημα [0,1] και τον όρο *fuzzy* στη διεθνή βιβλιογραφία, ανοίγοντας παράλληλα το δρόμο και για τις πρακτικές εφαρμογές της (αρχικά στη ψυχολογία, κοινωνιολογία, φιλοσοφία, κτλ).**
- Μετά την αρχική δυσπιστία και τις πρώτες φυσιολογικές αμφισβητήσεις της νέας Θεωρίας, σύντομα ακολούθησαν και οι τεχνολογικές εφαρμογές της Ασαφούς Λογικής, κυρίως στα δυναμικά μη-γραμμικά συστήματα ελέγχου (non-linear control systems), όπου συνήθως τα συμβατικά μαθηματικά μοντέλα δεν ισχύουν πια.

- Ένας από τους πρώτους που χρησιμοποίησε την Ασαφή Λογική για την κατασκευή ενός **Ασαφούς Συστήματος Ελέγχου** στη λειτουργία μιας ατμομηχανής, ήταν ο Βρετανός μηχανικός *Ebrahim Mamdani* κατά τη δεκαετία του 1970. Ακολούθησαν το 1978 στη Δανία οι *P. Hoenblad* και *Jens-Jorgen Ostergaard* που κατάφεραν και έφτιαξαν το πρώτο **ασαφές σύστημα αυτόματου ελέγχου** για τη διαδικασία παραγωγής τσιμέντου.

Η εισαγωγή της Ασαφούς Λογικής και η σύλληψη της σχετικά απλής ιδέας του Ασαφούς Συνόλου έγινε από τον Περσικής καταγωγής, Αμερικανό Καθηγητή ***Lotfi Zadeh***. ένα βράδυ του Ιούλη του 1964 στην Νέα Υόρκη και δημοσιεύθηκε στη διάσημη πια εργασία του το 1965, (Βλ. Fuzzy Sets, *Information and Control*, 8 (1965) 338–353).

.

Ο Zadeh γεννήθηκε το 1921 στο Baku του τότε Σοβιετικού Αζερμπαϊτζάν. Το 1931 η οικογένειά του μετακόμισε στην Τεχεράνη και το 1943 πτυχιούχος μηχανικός ήδη στις ΗΠΑ. Πήρε το Masters degree από το MIT το 1944 και το διδακτορικό του από το Columbia το 1949.

Lotfi A. Zadeh

Περσο-Αμερικανός Μηχανικός
Θεμελιωτής της Ασαφούς Λογικής

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ της ΑΣΑΦΟΥΣ ΛΟΓΙΚΗΣ

Σήμερα είναι πολυάριθμες σε όλο τον κόσμο οι Τεχνολογικές και Θεωρητικές εφαρμογές της Ασαφούς Λογικής.

Μια σημαντική εφαρμογή είναι το σύστημα αυτομάτου ελέγχου του μετρό της Ιαπωνικής πόλης *Sendai* των *Miyamoto & Yasonubu*. Το μετρό αυτό λειτούργησε γύρω στο 1987, και είναι το πιο απαλό και ήπιο στην κίνηση μετρό του κόσμου! ενώ εξοικονομεί ενέργεια και μειώνει το κόστος κατά 10 έως 25%.

Σήμερα έχει κυριολεκτικά πλημμυρίσει η αγορά με συσκευές που ενσωματώνουν ασαφείς ελεγκτές (πλυντήρια, ψυγεία, κλιματιστικά, κιβώτια ταχυτήτων, ABS, κλπ), όπως και ασαφείς ελεγκτές μη-επανδρωμένων οχημάτων-αεροσκαφών, λειτουργίας τσιμεντοβιομηχανιών, βιντεοκαμερών, ρομπότ, ιατρικής διάγνωσης, αναισθησίας, χειρουργικής, κτλ.

Τέλος, δεν υπάρχει ίσως επιστημονικός κλάδος σήμερα που να μην επεκτείνεται ραγδαία σε έννοιες και εφαρμογές της Ασαφούς Λογικής, όπως: Μαθηματικά (ασαφής Άλγεβρα ή Τοπολογία, ασαφείς Πιθανότητες), Οικονομία, Στατιστική, Φιλοσοφία, Σεισμολογία, Ιατρική, Ρομποτική, Βιολογία, Ψυχολογία, Οικολογία, Διαστημική, Κοινωνιολογία, Πυρηνική, Γενετική, κτλ.

Ασαφής Λογική (1/2)

Ο θεωρητικός φορέας για την υλοποίηση μιας μεγάλης κατηγορίας Ευφυών Συστημάτων είναι η **Ασαφής Λογική** (Fuzzy Logic), που εισήχθη από τον Lotfi A. Zadeh στα μέσα της δεκαετίας του 1960. Η θεωρία της Ασαφούς Λογικής βασίζεται στην προϋπόθεση ότι ο περιβάλλων χώρος απαρτίζεται από στοιχεία που ανήκουν σε σύνολα με διαφορετικούς βαθμούς συμμετοχής. Η ασάφεια δημιουργεί μια πλειότιμη έννοια στο χώρο της αβεβαιότητας, παραδείγματα της οποίας είναι η αλήθεια, το ψεύδος και οι ενδιάμεσες έννοιες.

Ασαφής Λογική (2/2)

Η Ασαφής Λογική είναι κατάλληλη τόσο για την αναπαράσταση της γνώσης και εμπειρίας, όσο και για τη δημιουργία μηχανισμών συμπερασμού ή συμπερασμάτων που χρησιμοποιούν τη διαθέσιμη κωδικοποιημένη γνώση και τις τρέχουσες τιμές των μεταβλητών της ελεγχόμενης διαδικασίας για να συμπεράνουν τη δράση ελέγχου που θα πρέπει να επιβληθεί στη διαδικασία.

<u>ΑΣΑΦΗΣ ΛΟΓΙΚΗ</u>

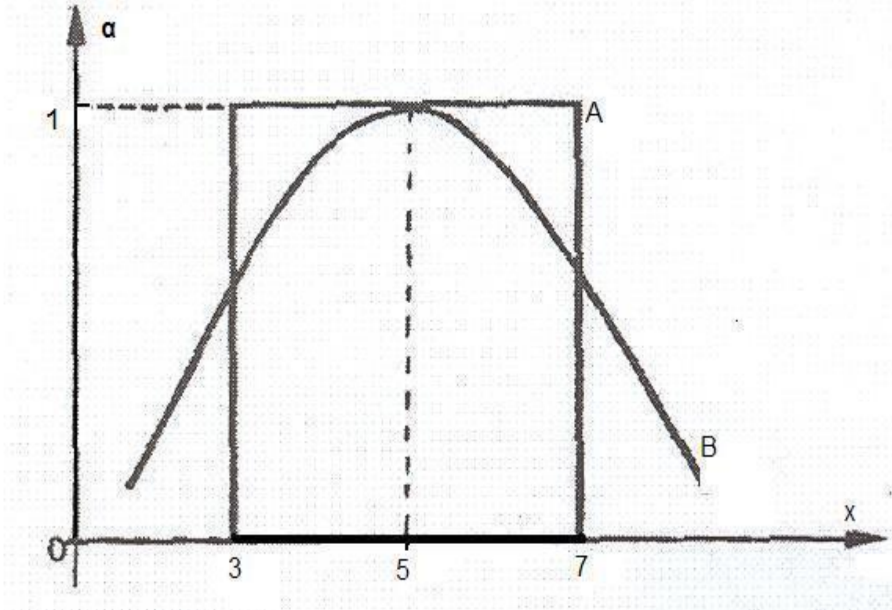
<u>Βασικές έννοιες-ορισμοί</u>

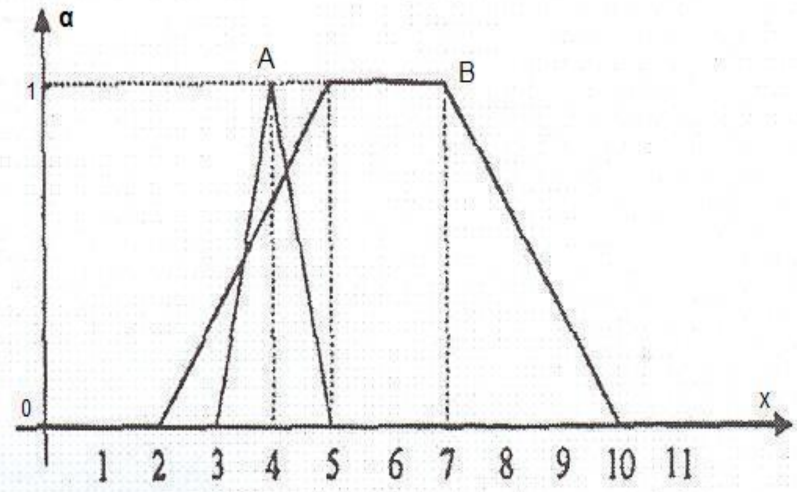
- Η Ασαφής Λογική βασίζεται στην επέκταση της έννοιας ***του Δίτιμου Συνόλου*** (1), στη γενικευμένη έννοια ***του Ασαφούς Συνόλου*** (2):

$$I_A : X \rightarrow \{0,1\}, \quad \mu\varepsilon \quad I_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν} \quad x \in A \\ 0, & \text{αν} \quad x \notin A \end{cases}, \qquad (1)$$

$$\mu_A : X \rightarrow [0,1], \qquad \mu\varepsilon \qquad \mu_A(x) = \alpha \in [0,1], \qquad (2)$$

Σύγκριση κλασικού και ασαφούς συνόλου





Κλασικό Σύνολο, A = {3, 5, 7}

Ασαφές Σύνολο, B = {περίπου 5}

Συνήθη στη πράξη, ασαφή σύνολα :

A, Τριγωνικό, "περίπου 4"

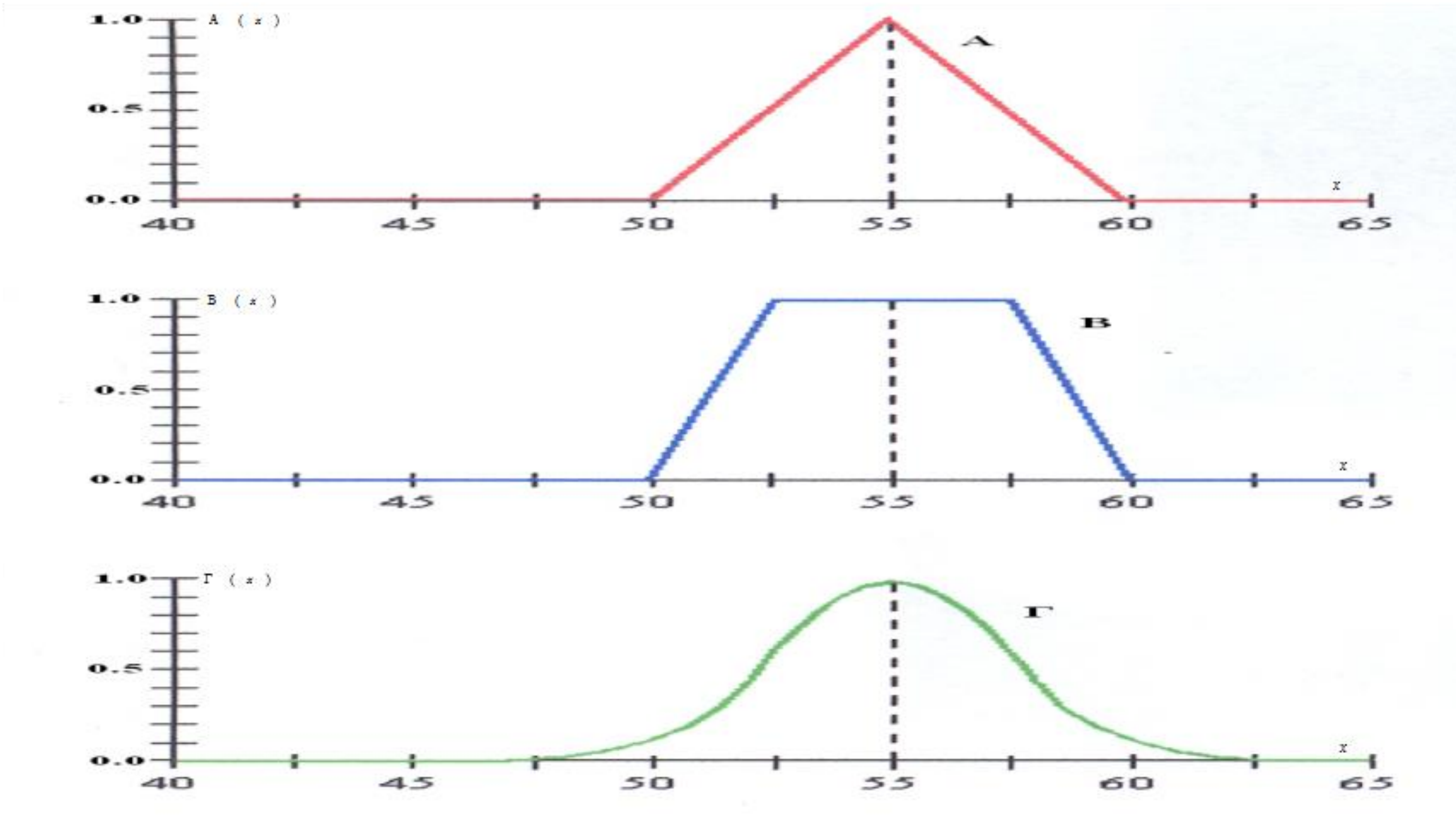
B, Τραπεζοειδές, "περίπου μεταξύ 5 και 7"

2.3. <u>ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΣΥΝΗΘΩΝ ΣΤΗΝ ΠΡΑΞΗ ΑΣΑΦΩΝ ΣΥΝΟΛΩΝ</u>*:*

Α-*Τριγωνικού,* Β-*Τραπεζοειδούς και* Γ-*καμπανοειδούς,*

που εκφράζουν την ίδια ασαφή έννοια, «x περίπου 55»,

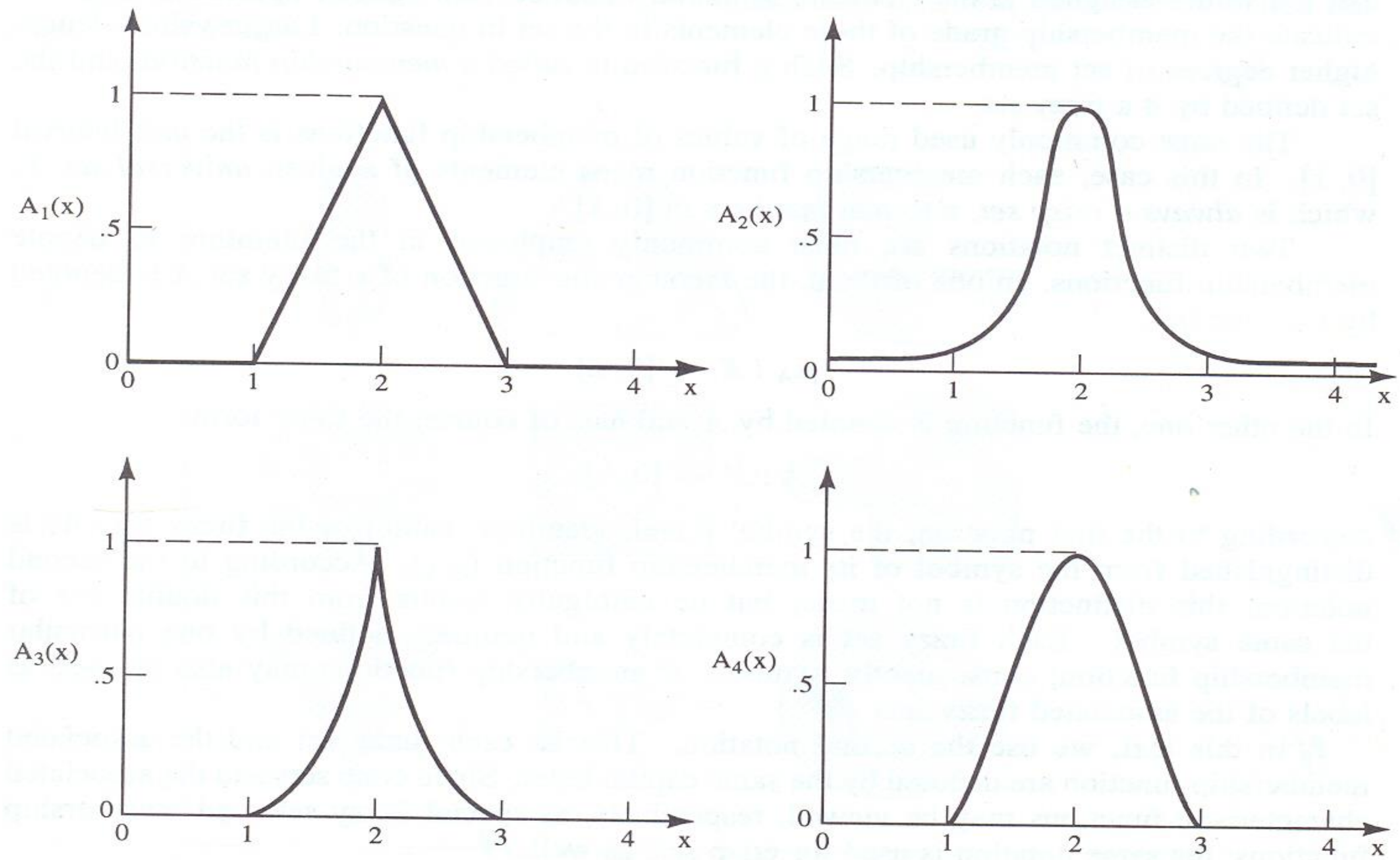
π.χ. "όριο ταχύτητας 55 km/h»



Τέσσερα διαφορετικά ασαφή σύνολα, που εκφράζουν την ίδια ασαφή έννοια: A={x είναι περίπου 2}.

Η ίδια ασαφής έννοια μπορεί να εκφράζεται από πολλά και διαφορετικά ασαφή σύνολα-(α.σ.), σε αντίθεση με τα κλασικά σύνολα.

Η επιλογή του κατάλληλου α.σ. είναι γενικά υποκειμενική. Δηλ. τα α.σ. μπορούν να εκφράζουν υποκειμενικές απόψεις με «αντικειμενικό-μαθηματικό» τρόπο, αφού τα όρια ενός α.σ. είναι ασαφή και εξαρτώνται τελικά από την κρίση του παρατηρητή.



Ερμηνεία των Ασαφών Συνόλων
Η «Αντικειμενική Υποκειμενικότητα» των Ασαφών Συνόλων

- Η ***συνάρτηση συμμετοχής ενός α.σ.*** μπορεί να εκφράσει υποκειμενικές απόψεις για την ίδια έννοια, σε αντίθεση με τη ***χαρακτηριστική συνάρτηση ενός κλασικού συνόλου*** που εκφράζει μια απόλυτη, οριστική έννοια, ανεξάρτητη από παρατηρητές (με την έννοια ότι όλοι οι παρατηρητές θα εξέφραζαν με τον ίδιο τρόπο μια απόλυτη έννοια).

π.χ. για το α.σ. **A={x είναι περίπου 2},** η μορφή του εξαρτάται από το «μάτι» του παρατηρητή, οπότε μπορεί να έχουμε διαφορετικές συναρτήσεις συμμετοχής που να εκφράζουν την ίδια ασαφή έννοια *A*.

- Αντίθετα, το κλασικό σύνολο, π.χ. $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid 3 < x < 10\}$

εκφράζει μια απόλυτη έννοια και η σημασία του είναι ανεξάρτητη από υποκειμενικές ερμηνείες.

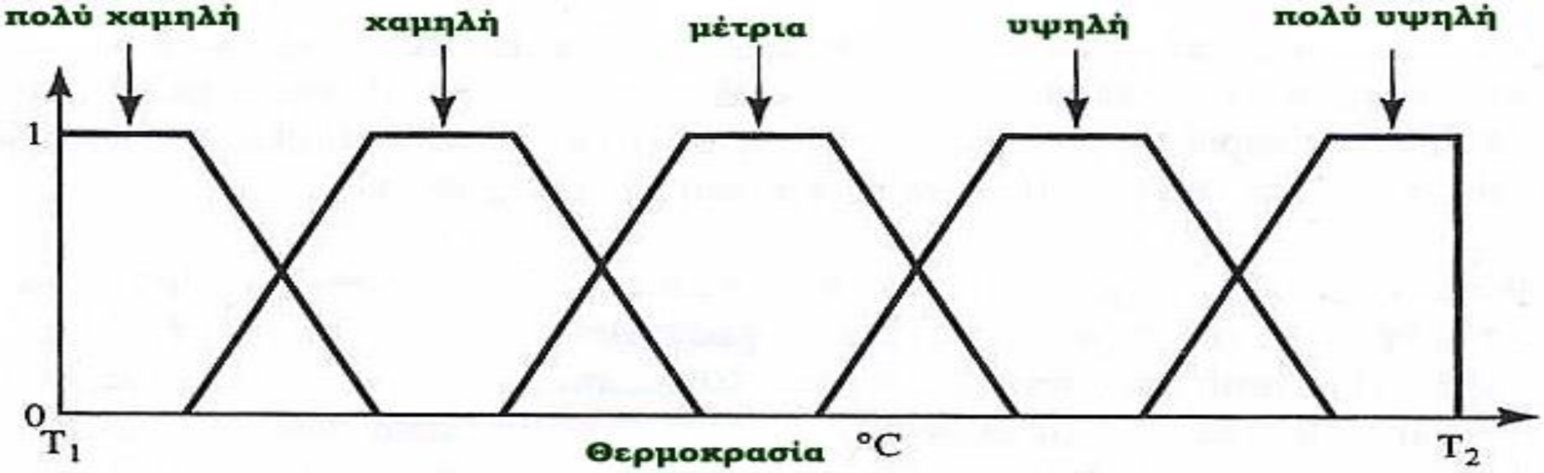
ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΑΣΑΦΟΥΣ & ΚΛΑΣΙΚΗΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

- Η σημαντικότητα των ***γλωσσικών (ασαφών) μεταβλητών*** έγκειται στο ότι διευκολύνουν βαθμιαίες μεταβάσεις μεταξύ διαφορετικών ασαφών καταστάσεων, μέσω των ***οριακών επικαλύψεων-overlaps (Ασαφής Διαμέριση)*** και συνεπώς έχουν τη φυσική ικανότητα να εκφράζουν και να αποδίδουν καλύτερα την αβεβαιότητα ή την υποκειμενικότητα, συγκριτικά με τις κλασικές μεταβλητές που δεν έχουν προφανώς αυτή την ικανότητα.
- Αντίθετα στις κλασικές μεταβλητές, οι διαδοχικά ασαφείς και φυσικά αλληλοεπικαλυπτόμενες μεταβατικές καταστάσεις (πολύ χαμηλή θερμοκρασία, χαμηλή, μέτρια, κτλ), εκλαμβάνονται από τα κλασικά σύνολα ως αυστηρά διαχωρισμένες μεταξύ τους καταστάσεις σε ένα συγκεκριμένο σημείο, μέσω μιας απόλυτης (ασπρόμαυρης) ***δίτιμης - κλασικής διαμέρισης***. Πράγμα προφανώς που δεν εκφράζει τη συνεχώς αλληλομεταβαλλόμενη πραγματικότητα.

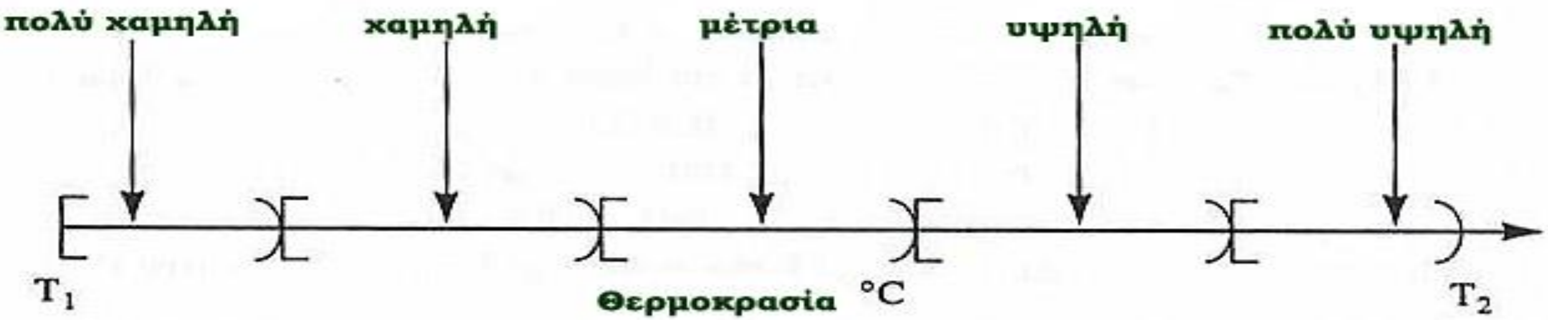
ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ, π.χ. «Θερμοκρασία στην περιοχή [T_1,T_2]», που εκφράζεται:

(a) ως <u>ΑΣΑΦΗΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ</u>-ασαφής διαμέριση, (μέσω ασαφών αριθμών) και

(b) ως <u>ΚΛΑΣΙΚΗ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ</u>-κλασική διαμέριση, (μέσω συνήθων αριθμών).



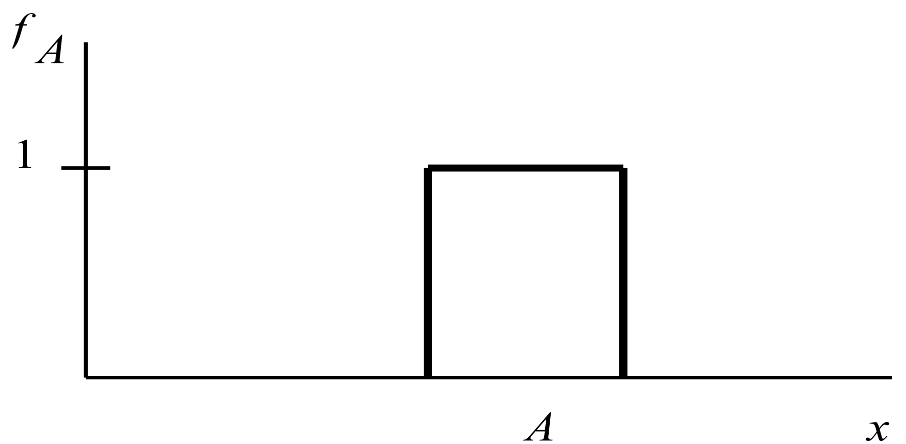
(a)



(b)

Βασικοί Όροι Ασαφούς Λογικής

Στην κλασική θεωρία συνόλων, ένα σύνολο αποτελείται από έναν πεπερασμένο ή άπειρο αριθμό στοιχείων. Τα στοιχεία όλων των συνόλων υπό μελέτη ανήκουν σε ένα υπερσύνολο αναφοράς (universe of discourse). Τα στοιχεία ενός υπερσυνόλου αναφοράς που περιέχει το σύνολο υπό μελέτη ανήκουν ή όχι στο υπό μελέτη σύνολο A.



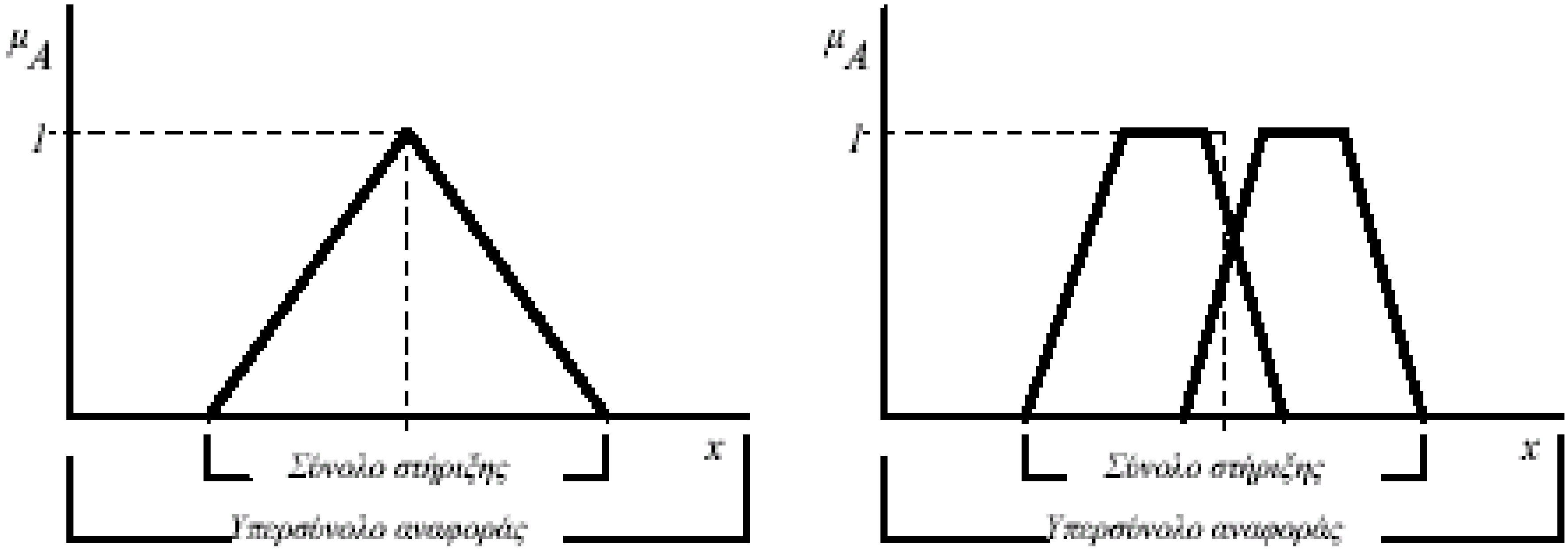
Αυτό μπορεί να εκφραστεί με τη χαρακτηριστική συνάρτηση του Boole $f_A(x)$ του σαφούς συνόλου A:

$$f_A(x) = 1 \text{ αν } x \in A$$

$$= 0 \text{ αν } x \notin A$$

Ασαφή Σύνολα (1/2)

Η ασάφεια μπορεί να εισαχθεί στη θεωρία των συνόλων, αν γενικευτεί η χαρακτηριστική συνάρτηση για να λαμβάνει άπειρο αριθμό τιμών στο διάστημα [0,1].



Σχήμα 5.2 Παραδείγματα τριγωνικού και τραπεζοειδών ασαφών συνόλων

Ασαφή Σύνολα (2/2)

Αν X είναι το υπερσύνολο αναφοράς με επί μέρους στοιχεία x, τότε X={x}. Ένα ασαφές σύνολο (fuzzy set) A του υπερσυνόλου αναφοράς X μπορεί να εκφραστεί συμβολικά ως ένα σύνολο διατεταγμένων ζευγών (ordered pairs):

$$A=\int \{\mu_A(x)/x\} \quad ή \quad \Sigma\{\mu_A(x)/x\} \text{ για } x\in X$$

για τη συνεχή και τη διακριτή περίπτωση αντιστοίχως. Εδώ $\mu_A(x)$ καλείται η συνάρτηση συμμετοχής (membership function) του x στο σύνολο A και είναι η απεικόνιση του υπερσυνόλου αναφοράς X στο κλειστό διάστημα [0,1]. Η συνάρτηση συμμετοχής υποδεικνύει το βαθμό κατά τον οποίον το σύνολο x ανήκει στο σύνολο A, δηλαδή $\mu_A(x): X\rightarrow[0,1]$

Συνάρτηση Συμμετοχής

Το σύνολο στήριξης (support set) ενός ασαφούς συνόλου A είναι το σύνολο των στοιχείων του υπερσυνόλου αναφοράς X για το οποίο $\mu_A(x)>0$. Ένα ασαφές σύνολο ουσιαστικά είναι η απεικόνιση του συνόλου στήριξης στο κλειστό διάστημα [0,1]. Ως παράδειγμα, η συνάρτηση συμμετοχής του ασαφούς συνόλου A={χαμηλή} στο υπερσύνολο αναφοράς των θετικών ακέραιων αριθμών από [0,100] που αναφέρεται σε θερμοκρασία μπορεί, εναλλακτικά να έχει διακριτές τιμές, όπως:

$$\mu_A(0)= \mu_A(5)= \mu_A(10)= \mu_A(15)= \mu_A(20)=1,0$$

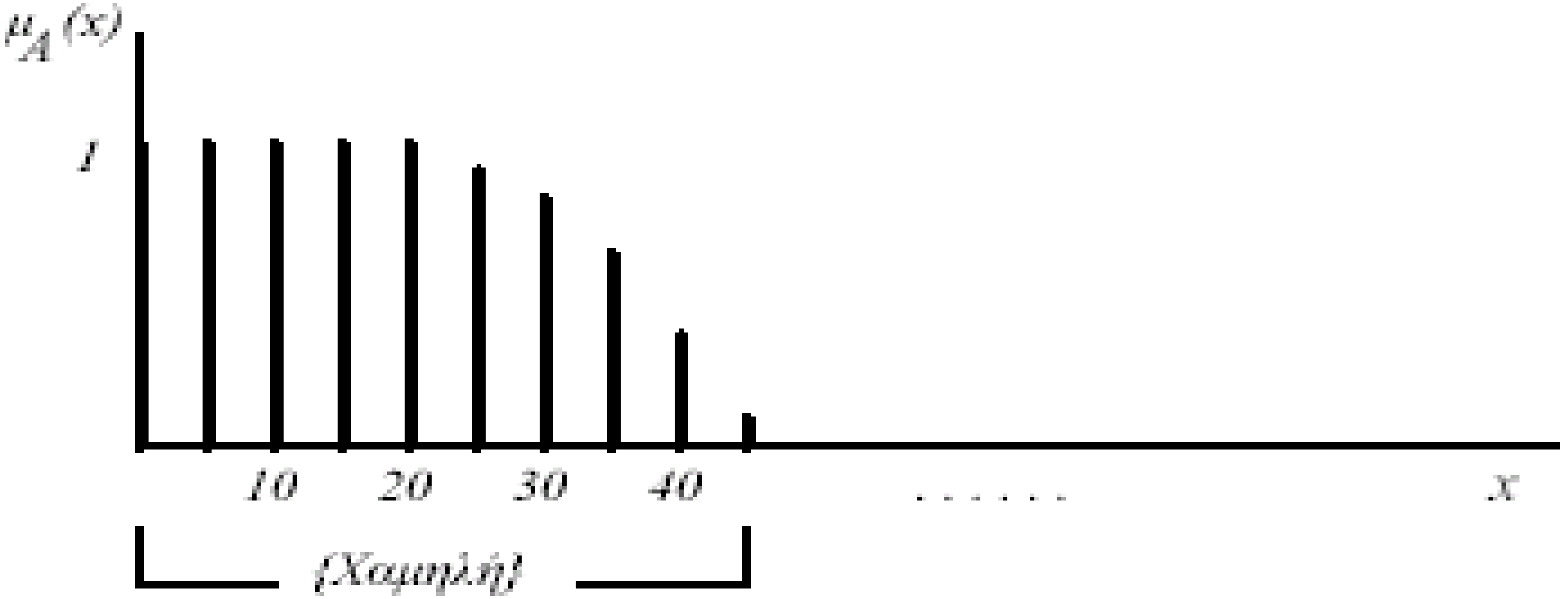
$$\mu_A(25)=0,9 \quad \mu_A(30)=0,8 \quad \mu_A(35)=0,6 \quad \mu_A(40)=0,3 \quad \mu_A(45)=0,1$$

$$\mu_A(50)= \mu_A(55)= \ldots\ldots \mu_A(100)=0.$$

Παράδειγμα Συνάρτησης Συμμετοχής

Επίσης μπορεί εναλλακτικά να εκφραστεί ως το διακριτό ασαφές σύνολο:

$$\mu_A(x) = \{1|0 + 1/5 + 1|10 + 1|15 + 1|20 + 0,9/25 + 0,8|30 + 0,6|35 + 0,3|40 + 0,1|45 + 0|50 + 0/55 + \ldots. 0|100\}$$



Σχήμα 5.3 Διακριτή συνάρτηση συμμετοχής του ασαφούς συνόλου Α={Χαμηλή}

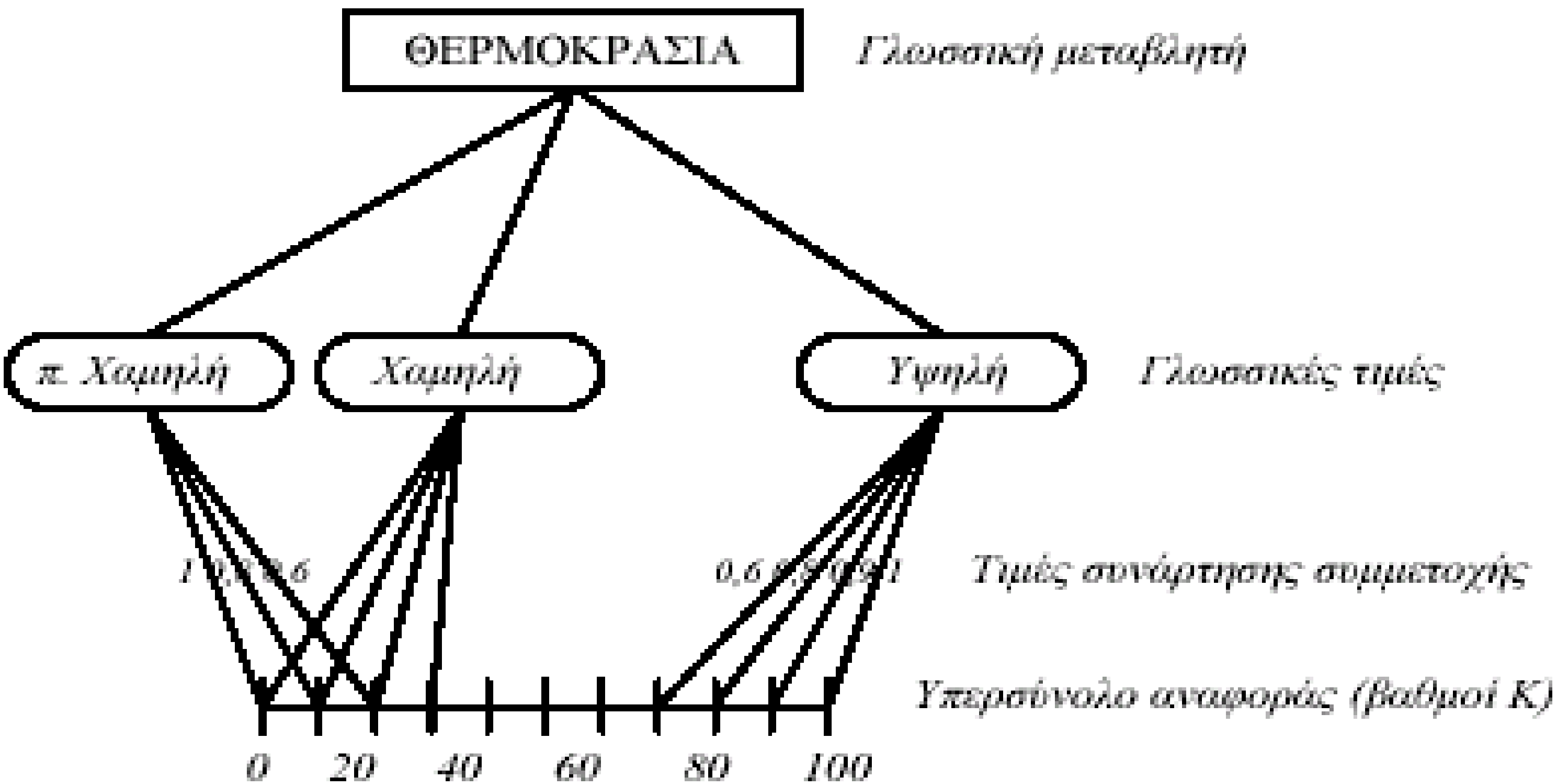
Παράδειγμα Ασαφών Μεταβλητών

Οι τιμές μιας ασαφούς μεταβλητής (fuzzy variable) μπορούν να θεωρηθούν ετικέτες (labels) ασαφών συνόλων. ΄Ετσι, για παράδειγμα, η ΘΕΡΜΟΚΡΑΣΙΑ σε κάποιο σημείο μιας διαδικασίας μπορεί να θεωρηθεί ως ασαφής μεταβλητή που μπορεί να πάρει λεκτικές τιμές Κανονική, Χαμηλή, Μέση, Υψηλή και πολύ_Υψηλή. Οι λεκτικές τιμές αυτές μπορούν εύκολα να περιγραφούν με ασαφή σύνολα όπως θα φανεί στη συνέχεια.

Λεκτικές Μεταβλητές

Γενικότερα, οι τιμές μιας ασαφούς μεταβλητής μπορεί να είναι προτάσεις σε κάποια προδιαγεγραμμένη γλώσσα με συνδυασμό ασαφών μεταβλητών, λεκτικών περιγραμμάτων (linguistic descriptors) και υπεκφυγών (hedges). Οι τιμές της μεταβλητής ΘΕΡΜΟΚΡΑΣΙΑ του παραδείγματος μπορούν έτσι να εκφραστούν ως Υψηλή, όχι_Υψηλή, σχετικά_Υψηλή, όχι_πολύ_Υψηλή, πάρα_πολύ_Υψηλή, αρκετά_Υψηλή κ.ά. δηλαδή με προτάσεις αποτελούμενες από την ετικέτα Υψηλή, την άρνηση όχι, τα συνδετικά και άλλα καθώς και τα περιγράμματα πολύ, σχετικά, αρκετά κ.ά. Κατά τον τρόπο αυτό η μεταβλητή ΘΕΡΜΟΚΡΑΣΙΑ είναι μια λεκτική μεταβλητή.

Λεκτική Μεταβλητή- ΘΕΡΜΟΚΡΑΣΙΑ



Ασαφής Εξαρτημένη Δήλωση (1/3)

Η εξάρτηση μιας λεκτικής μεταβλητής από μια άλλη, περιγράφεται από μια ασαφή εξαρτημένη δήλωση (fuzzy conditional statement) που έχει τη μορφή:

$$R : \text{ΑΝ } \Delta_1 \text{ ΤΟΤΕ } \Delta_2$$

ή συμβολικά

$$\Delta_1 \rightarrow \Delta_2$$

όπου Δ_1 και Δ_2 είναι ασαφείς δηλώσεις της μορφής

$$\Delta : \text{X είναι A}$$

και A είναι ένα ασαφές υποσύνολο του υπερσυνόλου αναφοράς X.

Ασαφής Εξαρτημένη Δήλωση (2/3)

Στο υποσύνολο Α μπορεί να δοθεί μια λεκτική έννοια που ορίζει την τιμή του Χ, για παράδειγμα:

‘ΑΝ το ΦΟΡΤΙΟ είναι Μικρό ΤΟΤΕ η ΡΟΠΗ είναι Πολύ_Μεγάλη’

ή

‘ΑΝ το ΣΦΑΛΜΑ είναι Μεγάλο_Αρνητικό ΤΟΤΕ η ΕΞΟΔΟΣ είναι Μεγάλη_Θετική’.

Δύο ή περισσότερες ασαφείς εξαρτημένες δηλώσεις μπορούν να συνδυαστούν (η μια να ενσωματώνεται στην άλλη) ώστε να σχηματίσουν μια ένθετη ασαφή εξαρτημένη δήλωση της μορφής:

$$R : \text{ΑΝ } \Delta_1 \text{ ΤΟΤΕ } (\text{ΑΝ } \Delta_2 \text{ ΤΟΤΕ } \Delta_3).$$

Ασαφής Εξαρτημένη Δήλωση (3/3)

Η προηγούμενη δήλωση μπορεί να εκφραστεί επίσης ως δύο συνδεδεμένες εξαρτημένες δηλώσεις ως εξής:

$$R^1 : \text{ΑΝ } \Delta_1 \text{ ΤΟΤΕ } R^2 \text{ και } R^2 : \text{ΑΝ } \Delta_2 \text{ ΤΟΤΕ } \Delta_3.$$

Για παράδειγμα:

‘ΑΝ το ΣΦΑΛΜΑ είναι Μεγάλο_Αρνητικό ΤΟΤΕ (ΑΝ η

ΜΕΤΑΒΟΛΗ_ΤΟΥ_ΣΦΑΛΜΑΤΟΣ είναι Μεγάλη_Θετική ΤΟΤΕ η

ΕΞΟΔΟΣ είναι Μεγάλη_Θετική)’

μπορεί να εκφραστεί ως:

R^1 : ΑΝ το ΣΦΑΛΜΑ είναι Μεγάλο_Αρνητικό ΤΟΤΕ R^2

R^2 :ΑΝ η ΜΕΤΑΒΟΛΗ_ΤΟΥ_ΣΦΑΛΜΑΤΟΣ είναι Μεγάλη_Θετική ΤΟΤΕ η ΕΞΟΔΟΣ είναι Μεγάλη_Θετική.

Ασαφείς Κανόνες

if x is A then y is B

x, y : λεκτικές μεταβλητές

A, B : λεκτικές τιμές (ασαφή σύνολα)

Κλασσικός κανόνας

if speed is >100 then stop-distance is >50

Ασαφής κανόνας

if speed is fast then stop-distance is long

Πιό σύνθετοι κανόνες: χρήση AND ή/και OR στις συνθήκες, ύπαρξη περισσότερων του ενός συμπερασμάτων.

Τελεστές Ασαφούς Λογικής (1/2)

Οι τελεστές *min* και *max* δύο στοιχείων *α* και *β* ορίζονται ως:

$$\alpha \wedge \beta = min\,(\alpha,\beta) = \alpha \text{ αν } \alpha \leq \beta$$

$$= \beta \text{ αν } \alpha > \beta$$

$$\alpha \vee \beta = max\,(\alpha,\beta) = \alpha \text{ αν } \alpha \geq \beta$$

$$= \beta \text{ αν } \alpha < \beta$$

Γνωστά παραδείγματα των παραπάνω είναι οι λογικές πύλες ΄Η (OR) και ΚΑΙ (AND)

Ή (∨ max)

$\alpha \backslash \beta$	0	1
0	0	1
1	1	1

ΚΑΙ (∧ min)

$\alpha \backslash \beta$	0	1
0	0	0
1	0	1

Τελεστές Ασαφούς Λογικής (2/2)

Οι τελεστές min και max δύο συνόλων A και B έχουν ως αποτέλεσμα τα σύνολα Γ και Δ αντίστοιχα, δηλαδή

$$\Gamma = A \wedge B = \{\min(\alpha,\beta)\} \ \forall \ \alpha \in A, \ \beta \in B$$

$$\Delta = A \vee B = \{\max(\alpha,\beta)\} \ \forall \ \alpha \in A, \ \beta \in B$$

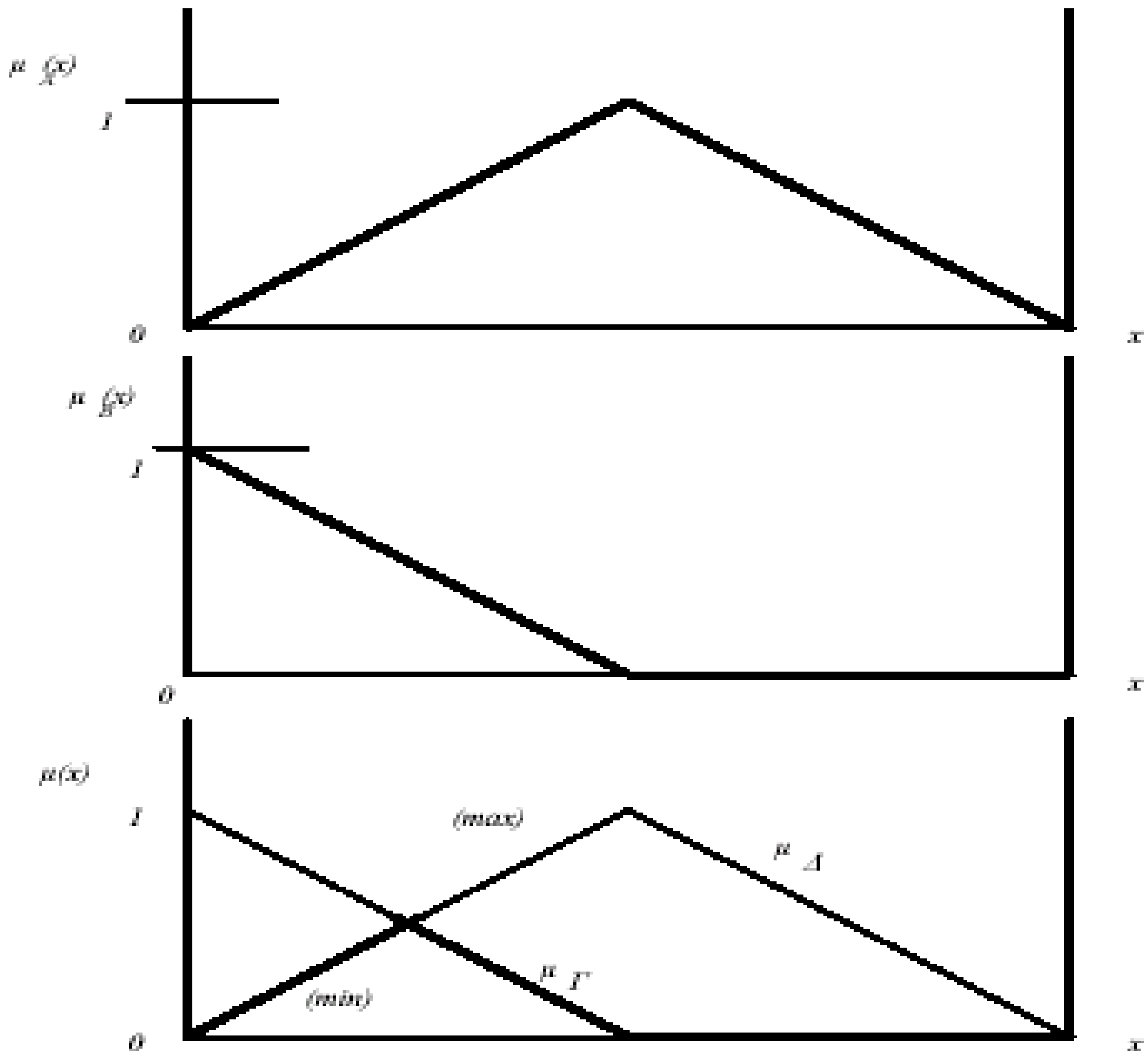
όπως φαίνονται στο παρακάτω Σχήμα.

΄Οταν οι τελεστές χρησιμοποιούνται ενιαία υπονοούν το ελάχιστο (inf ή infinum) ή το μέγιστο (sup ή supremum) όλων των στοιχείων ενός συνόλου, π.χ.

$$\alpha = \wedge A = \inf(A) \quad \alpha \in A$$

$$\alpha = \vee A = \sup(A) \quad \alpha \in A$$

Γραφική Παράσταση των Πράξεων min & max



Πράξεις με Ασαφή Σύνολα (1/2)

Ένα ασαφές σύνολο A του X θεωρείται κενό (null) αν η συνάρτηση συμμετοχής του είναι μηδενική παντού, δηλαδή

$$A = \varnothing \text{ αν } \mu_A(x) = 0 \quad \forall\, x \in X.$$

Το συμπλήρωμα (complement) $\overline{\mathrm{A}}$ ενός ασαφούς συνόλου ορίζεται ως:

$$\mu_{\overline{A}} = 1 - \mu_A(x) \quad \forall\, x \in X.$$

Πράξεις με Ασαφή Σύνολα (2/2)

Ένα ασαφές σύνολο B είναι υποσύνολο (subset) ενός συνόλου A αν η συνάρτηση συμμετοχής του B είναι μικρότερη ή ίση με αυτή του A παντού στο X, δηλαδή

$$B \subseteq A \text{ αν } \mu_B(x) \leq \mu_A(x) \; \forall \; x \in X$$

Η ένωση (union) δύο ασαφών συνόλων A και B στο X ορίζεται ως:

$$\mu_{A \cup B}(x) = \mu_A(x) \vee \mu_B(x) \; \forall \; x \in X$$

Η τομή (intersection) δύο ασαφών συνόλων A και B στο X ορίζεται ως:

$$\mu_{A \cap B}(x) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x) \; \forall \; x \in X$$

Το γινόμενο (product) δύο ασαφών συνόλων A και B στο X ορίζεται ως: $\mu_{A \bullet B}(x) = \mu_A(x) \bullet \mu_B(x) \; \forall \; x \in X$

Λεκτικές Μεταβλητές

Η τιμή μιας λεκτικής μεταβλητής είναι ένας σύνθετος όρος αποτελούμενος από ατομικούς όρους. Οι όροι αυτοί έχουν τις εξής υποκατηγορίες:

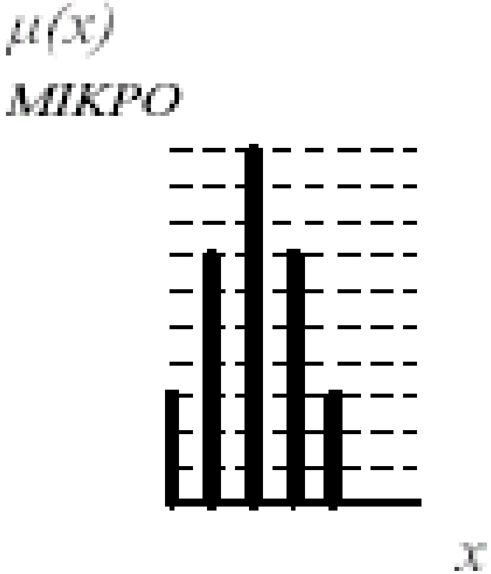
• πρωτεύοντες όροι (primary terms) που είναι ετικέτες ασαφών συνόλων του υπερσυνόλου αναφοράς (π.χ. Υψηλό, Χαμηλό, Μικρό, Μέσο, Μεγάλο, Μηδέν),

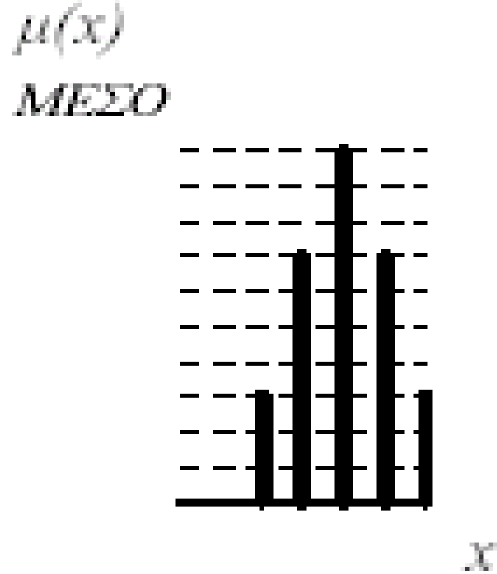
• την άρνηση (negation) ΟΧΙ (NOT) και τα συνδετικά (connectives) ΚΑΙ (AND) και ΄Η (OR),

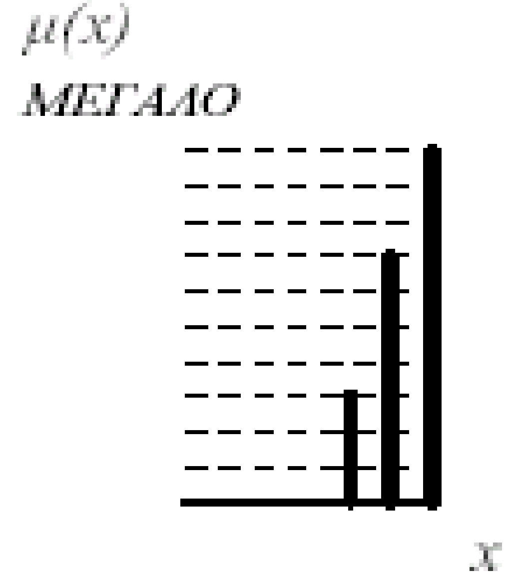
• λεκτικά περιγράμματα (linguistic descriptors) όπως πολύ, ελαφρά, σχεδόν, αρνητικό και

• δείκτες (markers), όπως οι παρενθέσεις.

Διακριτές Συναρτήσεις Συμμετοχής







Για παράδειγμα αν: $X = \{0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6\}$

οι διακριτές συναρτήσεις συμμετοχής για τους όρους Μικρό, Μέσο και Μεγάλο ορίζονται στο παράδειγμα ως:

$$\mu_{Μικρό}(x) = \{0,3 + 0,7 + 1 + 0,7 + 0,3 + 0 + 0\}$$

$$\mu_{Μέσο}(x) = \{0 + 0 + 0,3 + 0,7 + 1 + 0,7 + 0,3\}$$

$$\mu_{Μεγάλο}(x) = \{0 + 0 + 0 + 0 + 0,3 + 0,7 + 1\}$$

Συνδετικά- ΚΑΙ

Η άρνηση ΟΧΙ και τα συνδετικά ΚΑΙ και ΄Η μπορούν να οριστούν μέσω των πράξεων του συμπληρώματος, τομής $\wedge$ και ένωσης $\vee$ αντίστοιχα. Συνήθως το συνδετικό ΚΑΙ χρησιμοποιείται με μεταβλητές που έχουν διαφορετικά υπερσύνολα αναφοράς. Αν

$$A = \{\mu_A(x)/x\} \quad \text{για } x \in X$$

$$B = \{\mu_B(y)/y\} \quad \text{για } y \in Y$$

τότε

$$A \text{ ΚΑΙ } B = \mu_A(x) \wedge \mu_B(y)/\ (x,y) \text{ για } x \in X,\ y \in Y$$

$$= \mu_{A \cap B}\ (x,y)/\ (x,y)$$

Συνδετικά-΄Η

Το συνδετικό ΄Η μπορεί να συνδέσει λεκτικές τιμές της ίδιας μεταβλητής. Είναι προφανές ότι θα πρέπει και οι δύο μεταβλητές να ανήκουν στο ίδιο υπερσύνολο αναφοράς. Για παράδειγμα αν

$$A = \{\mu_A(x)/x\} \text{ για } x \in X$$

$$B = \{ \mu_B(x)/x\} \text{ για } x \in X$$

Τότε $A \text{ ΄Η } B = \mu_A(x) \vee \mu_B(x)/(x) = \mu_{A \cup B}(x)/(x)$ για $x \in X$

Το συνδετικό ΄Η μπορεί να χρησιμοποιηθεί με μεταβλητές σε διαφορετικά υπερσύνολα αναφοράς αν οι μεταβλητές βρίσκονται στο μέρος της συνθήκης μιας σχέσης της μορφής ‘ΑΝ .... ΤΟΤΕ’. Για παράδειγμα:

‘ΑΝ η ΠΙΕΣΗ είναι υψηλή Ή η ΤΑΧΥΤΗΤΑ είναι μεγάλη ΤΟΤΕ

η ΠΑΡΟΧΗ_ΚΑΥΣΙΜΟΥ θα πρέπει να γίνει μηδέν’.

Συνδετικά- ΟΧΙ

Η πράξη ΟΧΙ είναι συνώνυμη με την άρνηση στη φυσική γλώσσα. Έτσι αν

$$A = \{\mu_A(x)/x\} \quad \text{για } x \in X$$

$$\text{ΟΧΙ } A = \overline{A} = \{1 - \mu_A(x)/x\}$$

Είναι προφανές ότι η πρόταση ‘η ΠΙΕΣΗ είναι ΟΧΙ υψηλή’ είναι συνώνυμη με την πρόταση ‘η ΠΙΕΣΗ ΔΕΝ είναι υψηλή’.

Λεκτικά Περιγράμματα

Λεκτικά περιγράμματα (linguistic descriptors) χρησιμεύουν στη δημιουργία ενός ευρύτερου συνόλου λεκτικών τιμών μιας λεκτικής μεταβλητής από μια μικρότερη συλλογή πρωτευόντων όρων. Χρησιμοποιώντας το περίγραμμα πολύ σε συνδυασμό με τα συνδετικά ΟΧΙ, ΚΑΙ και τον πρωτεύοντα όρο μεγάλο, μπορούμε να δημιουργήσουμε τα επιπλέον ασαφή σύνολα πολύ μεγάλο, πάρα πολύ μεγάλο, ΟΧΙ πολύ μεγάλο, μεγάλο ΚΑΙ ΟΧΙ πολύ μεγάλο κ.ά. Με τον τρόπο αυτό μπορούμε να υπολογίσουμε τη συνάρτηση συμμετοχής σύνθετων όρων, όπως π.χ.

Α = ΟΧΙ μικρό ΚΑΙ ΟΧΙ μεγάλο

η συνάρτηση συμμετοχής της οποίας είναι απλώς

$$\mu_{Α}(x) = [1 - \mu_{ΜΙΚΡΟ}(x)] \wedge [1 - \mu_{ΜΕΓΑΛΟ}(x)].$$

Ασαφής Λογική - Γενικά

- Αφορά την αναπαράσταση ανακριβούς (imprecise) ή αδιευκρίνιστης (ambiguous) γνώσης (π.χ. ο Γιάννης είναι ψηλός)

- Στηρίζεται στη θεωρία των ασαφών συνόλων (θεμελιωτής L. A. Zadeh, 1965) Χρησιμοποιεί την έννοια του βαθμού συμμετοχής/αλήθεια (degrees of membership /truth) και όχι τον κάθετο διαχωρισμό αλήθεια-ψεύδος

- Ασχολείται με την ασάφεια (fuzziness της γνώσης (θεωρία δυνατοτήτων), όχι με την τυχαιότητά της (randomness)(θεωρία πιθανοτήτων)

Λεκτικές Μεταβλητές (1/2)

- Ένα ασαφές σύνολο παριστάνει μια ασαφή ή λεκτική τιμή (fuzzy or linguistic value). Π.χ. low (χαμηλή).
- Μεταβλητές που παίρνουν ασαφείς τιμές λέγονται ασαφείς ή λεκτικές μεταβλητές (fuzzy or linguistic variables). Π.χ. speed is low (η ταχύτητα είναι χαμηλή).
- Η περιοχή των δυνατών τιμών μιας λεκτικής μεταβλητής αποτελεί το σύνολο αναφοράς των λεκτικών τιμών της μεταβλητής. Π.χ. U_{speed}=(0,220) (km/h).

Λεκτικές Μεταβλητές (2/2)

- Οι τιμές μιας λεκτικής μεταβλητής είναι ασαφή υποσύνολα του συνόλου αναφοράς. Π.χ. low, medium, high είναι ασαφή υποσύνολα του Uspeed.
- Οι ασαφείς τιμές/σύνολα μπορούν να παρασταθούν με δύο τρόπους

(α) Με αναλυτική έκφραση/απεικόνιση

(β) Σαν σύνολο ζευγών

Παράδειγμα:

Λεκτική μεταβλητή: height (ύψος)

Σύνολο αναφοράς: 0.20-2.30 m

Ασαφείς τιμές: short, average, tall