« DS1 - Θεμελιώδεις Έννοιες »

1. Ορισμός

$\{x_1(t), x_2(t)\}$ που πληρούν τις εξισώσεις: $\left(\text{“}\,'\,\text{”} = \frac{d}{dt}\right)$

$$\left.\begin{cases} x_1'(t) = x_1^2 + 2t x_1 x_2 + \sin x_1 = f_1(t, x_1, x_2) \\ x_2'(t) = t x_1 - \dfrac{x_2^3}{x_1} - \cos 2x_2 = f_2(t, x_1, x_2) \end{cases}\right\} \xrightarrow{\bar{x} = (x_1, x_2)^T}$$

$$\left.\begin{cases} x_1' = f_1(t, \bar{x}) \\ x_2' = f_2(t, \bar{x}) \end{cases}\right\} \xrightarrow[f_i \,:\, R^3 \to R,\ i = 1,2]{\bar{f} = (f_1, f_2)^T :\ R^3 \to R^2} \underline{\bar{x}' = \bar{f}(t, \bar{x})}$$

<u>Γενικεύοντας:</u> Για n-μεταβλητές:

$\{x_1(t), \dots, x_n(t)\}$, δηλαδή $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$

το σύστημα των n-Δ.Ε $1^{ης}$ τάξης είναι:

$$\left.\begin{cases} x_1' = f_1(t, \bar{x}) \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \\ x_n' = f_n(t, \bar{x}) \end{cases}\right\} \xrightarrow[f_i \,:\, R^{1+n} \to R,\ i = 1, \dots, n]{\bar{f} = (f_1, \dots, f_n)^T :\ R^{1+n} \to R^n} \boxed{\bar{x}' = \bar{f}(t, \bar{x})} \tag{1}$$

- <u>Ειδικές περιπτώσεις συστημάτων</u>

<u>α</u>. Αν $\bar{f} = \bar{f}(x)$, δηλαδή $f_i = f_i(\bar{x})$, $i = 1, \dots, n$

το σύστημα καλείται <u>αυτόνομο</u>:

$$\boxed{\bar{x}' = \bar{f}(\bar{x})} \tag{2}$$

$\bar{f} : R^n \to R^n$, $\quad f_i : R^n \to R$, $\quad i = 1, \dots, n$

β. Έστω το σύστημα $(n=2)$:

$$\begin{cases} x_1' = t x_1 - x_2 + t^2 \\ x_2' = \cos t \, x_1 + \frac{1}{t^2} x_2 + 1 \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & -1 \\ \cos t & \frac{1}{t^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t^2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

και γενικότερα:

Αν
$$\begin{cases} x_1' = p_{11}(t) x_1 + \dots + p_{1n}(t) x_n + r_1(t) \\ x_2' = p_{21}(t) x_1 + \dots + p_{2n}(t) x_n + r_2(t) \\ \vdots \\ x_n' = p_{n1}(t) x_1 + \dots + p_{nn}(t) x_n + r_n(t) \end{cases}$$
ή

$$\boxed{\bar{x}' = P(t)\bar{x} + \bar{r}(t)} \qquad P(t) = \left(p_{ij}(t)\right)_{n\times n}, \; i,j = 1,\dots,n \qquad (3)$$
$$\bar{r}(t) = \left(r_1(t), \dots, r_n(t)\right)^T$$

το σύστημα καλείται γραμμικό,

μη ομογενές $(\bar{r} \neq \bar{0})$ ή ομογενές $(\bar{r} = \bar{0})$.

---

2. **Θεώρημα ύπαρξης & μοναδικότητας λύσης συστήματος n-Δ.Ε πρώτης τάξης**

Αν f_i, $f_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, $i,j = 1,\dots,n$, είναι συνεχείς σε μία περιοχή $D \subseteq \mathbb{R}^{1+n}$, και

$$\bar{x}(t_0) = \bar{x}_0 \quad \left(x_1(t_0) = x_{10}, \dots, x_n(t_0) = x_{n0}\right) \qquad (4)$$

με $(t_0, \bar{x}_0) \in D \implies \exists\, a > 0 : |t - t_0| < a : \exists$ μοναδική λύση του (1), που πληρεί την (4)

Εξ. (1) + Εξ. (4) = Πρόβλημα Αρχικών Τιμών (Π.Α.Τ)

$\downarrow$ σύστημα $\quad\quad$ $\searrow$ Αρχικές συνθήκες

Προφανώς για το γραμμικό σύστημα (3), αρκεί η συνέχεια των $p_{ij}(t)$, $i,j=1,\dots,n$ και $r_i(t)$, $i=1,\dots,n$, στο διάστημα ορισμού του t.

---

3. Ισοδυναμία Δ.Ε n-τάξης με σύστημα n-Δ.Ε 1ης τάξης

<u>α.</u> Έστω η εξίσωση (Van der Pol)

$$x'' - k(1-x^2)x' + x = 0 \quad , \quad x = x(t) \tag{5}$$

Θέτουμε: $x = z_1$, $x' = z_2$. Τότε γράφουμε:

$$\left\{\begin{aligned} z_1' &= z_2 \\ z_2' &= -z_1 + k(1-z_1^2)z_2 \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

δηλαδή ένα σύστημα δύο Δ.Ε 1ης τάξης, της μορφής (1):

$\underline{\bar{z}' = \bar{f}(\bar{z})}$, $\bar{z} = (z_1, z_2)^T$, $\bar{f} = (f_1, f_2)^T : R^2 \to R^2$

$f_i : R^2 \to R$, $i = 1, 2$

με $f_1(z_1, z_2) = z_2$, $f_2(z_1, z_2) = -z_2 + k(1-z_1^2)z_2$

Η Δ.Ε 2ης τάξης, (5), είναι <u>ισοδύναμη</u> με το σύστημα των δύο Δ.Ε 1ης τάξης, (6).

β. Έστω η (γραμμική) Δ.Ε

$$y'' + (x^2-1)\,y' - xy = xe^x, \qquad y = y(x) \qquad (7)$$

Θέτουμε: $y = z_1$, $y' = z_2$. Τότε γράφουμε:

$$\left\{\begin{array}{l} z_1' = z_2 \\ z_2' = x z_1 - (x^2-1) z_2 + x e^x \end{array}\right\} \qquad (8)$$

δηλαδή ένα (γραμμικό) σύστημα δύο Δ.Ε $1^{ης}$ τάξης, της μορφής (3):

$$\underline{\bar{z}' = P(x)\,\bar{z} + \bar{r}(x)}, \qquad \bar{z} = (z_1, z_2)^T$$

$$P(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ x & -x^2+1 \end{pmatrix}_{2\times 2}, \qquad \bar{r}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ xe^x \end{pmatrix}$$

Η Δ.Ε $2^{ης}$ τάξης, (7), είναι <u>ισοδύναμη</u> με το σύστημα των δύο Δ.Ε $1^{ης}$ τάξης, (8).

<u>Γενικεύοντας</u>, για μία γραμμική εξίσωση

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)\,y^{(n-1)} + \dots + p_0(x)\,y = r(x), \qquad y = y(x) \qquad (9)$$

Θέτοντας: $y = z_1$, $y' = z_2$, $\dots$, $y^{(n-1)} = z_n$, γράφουμε:

$$\left\{\begin{array}{l} z_1' = z_2 \\ z_2' = z_3 \\ \vdots \qquad \vdots \\ z_n' = -p_0 z_1 - p_1 z_2 - \dots - p_{n-1} z_n \end{array}\right\} \qquad (10)$$

δηλαδή ένα (γραμμικό) σύστημα n-Δ.Ε $1^{ης}$ τάξης, της μορφής (3):

$$\bar{z}' = P(x)\,\bar{z} + \bar{r}(x), \quad \bar{z} = (z_1, \ldots, z_n)^T$$

$$P(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -p_0 & -p_1 & \cdots & \cdots & -p_{n-1} \end{pmatrix}, \quad \bar{r}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ r(x) \end{pmatrix}$$

Η Δ.Ε n-τάξης, (9), είναι ισοδύναμη με το σύστημα των n-Δ.Ε $1^{\text{ης}}$ τάξης, (10).

Άσκηση: Μετατρέψτε το σύστημα των παρακάτω Δ.Ε

$$x^{(3)} + x'' + y'' - x = 0$$
$$y'' + x + 2y' = 0 \qquad x = x(t), \quad y = y(t)$$

σε ένα ισοδύναμο σύστημα Δ.Ε $1^{\text{ης}}$ τάξης

Συμπερασματικά, κάθε Δ.Ε n-τάξης, γραμμική ή μη γραμμική, είναι ισοδύναμη με (ανάγεται σε) ένα σύστημα n-Δ.Ε $1^{\text{ης}}$ τάξης, γραμμικών ή μη γραμμικών, αντίστοιχα.

---

4. Πρώτο ολοκλήρωμα – Ολοκληρωτική πολλαπλότητα Τροχιά φάσης – Πορτραίτο φάσης

(first integral – integral manifold – phase trajectory – phase portrait)

– Οι μεταβλητές $x_i(t)$, $i=1,\dots,n$ που εμπλέκονται στο σύστημα (1), ονομάζονται μεταβλητές φάσης (phase variables) του συστήματος, και ο χώρος των $x_1,\dots,x_n$ ονομάζεται χώρος φάσης (phase space) του συστήματος (επίπεδο φάσης (phase plane), αν $n=2$).

– Η ολική παράγωγος ως προς το χρόνο t, μίας συνάρτησης $F(x_1,\dots,x_n): R^n \to R$, όπου $x_i = x_i(t)$, $i=1,\dots,n$ είναι οι μεταβλητές φάσης του συστήματος Δ.Ε (1), ονομάζεται τροχιακή παράγωγος της F ως προς το σύστημα (1), και συμβολίζεται με $\mathcal{L}_t F$, δηλαδή

$$\mathcal{L}_t F = \frac{dF}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_k} x_k' = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_k} f_k(t,\bar{x}) \qquad \text{(orbital derivative)}$$

Έστω η ΔΕ

$$\ddot{x} + f(x) = 0 , \quad x = x(t) , \quad \text{“}\cdot\text{”} = \frac{d}{dt} \tag{11}$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω, η (11) είναι ισοδύναμη με το σύστημα των δύο Δ.Ε $1^{ης}$ τάξης

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= -f(z_1) \end{aligned} , \quad \text{όπου } z_1 = x, \ z_2 = \dot{x} \tag{12}$$

Με στόχο να πάρουμε μία εξίσωση της μορφής $F(z_1, z_2) = \Gamma =$ σταθερά, που επαληθεύει το σύστημα (12), δηλαδή μία εξίσωση $F(x, \dot{x}) = \Gamma$ που επαληθεύει την ΕΕ.(11), εργαζόμαστε στην εξίσωση ως εξής:

$$(11) \xrightarrow{\cdot \dot{x}} \dot{x}\ddot{x} + f(x)\dot{x} = 0$$

ή

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{x}^2}{2}\right) + f(x)\frac{dx}{dt} = 0 \xrightarrow{\cdot dt}$$

$$d\left(\frac{\dot{x}^2}{2}\right) + f(x)\,dx = 0 \xrightarrow{\int}$$

$$\frac{\dot{x}^2}{2} + \int f(x)\,dx = \Gamma = \text{σταθερά} \qquad (13)$$

δηλαδή

$$F(x, \dot{x}) = \frac{\dot{x}^2}{2} + \int f(x)\,dx \quad \text{ή} \quad F(z_1, z_2) = \frac{z_2^2}{2} + \int f(z_1)\,dz_1$$

Η εξίσωση (13) επαληθεύει την ΕΕ.(11) ή το σύστημα (12) $(x = z_1,\ \dot{x} = z_2)$, και η συνάρτηση $F: R^2 \to R$ καλείται πρώτο ολοκλήρωμα της (11) ή του (12).

Γενικότερα, ορίζουμε:

Η συνάρτηση $F(x_1, \dots, x_n): R^n \to R$, όπου η εξίσωση $F = \Gamma =$ σταθερά, επαληθεύει το σύστημα Δ.Ε (1), ονομάζεται πρώτο ολοκλήρωμα του συστήματος.

(Εναλλακτικά, πρώτο ολοκλήρωμα ενός συστήματος Δ.Ε $1^{ης}$ τάξης, καλείται η συνάρτηση $F(\bar{x})$, που η τροχιακή της παράγωγος, $L_t F$, ως προς το σύστημα, είναι ίση με μηδέν).

Η μονοπαραμετρική οικογένεια καμπύλων $F(\bar{x}) = \Gamma$, καλείται <u>ολοκληρωτική πολλαπλότητα</u> του συστήματος Δ.Ε (1).

Η προβολή της καμπύλης που αντιστοιχεί σε μία συγκεκριμένη τιμή του Γ, στον n-διάστατο χώρο φάσεων, ονομάζεται <u>τροχιά φάσης</u> του συστήματος, και το σύνολο των τροχιών φάσης καλείται <u>πορτραίτο φάσης</u> του συστήματος.

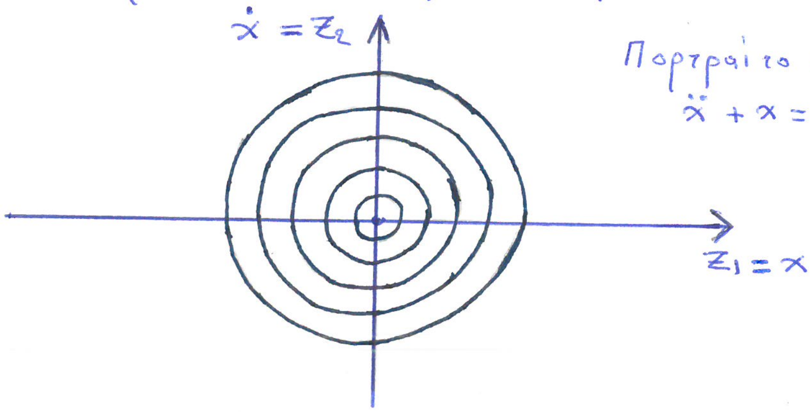
Για παράδειγμα, γιά το σύστημα (12) (ΕΞ.(11)), αν $f(z_1) = z_1$ $(f(x) = x)$, το <u>πρώτο ολοκλήρωμα</u> είναι η συνάρτηση

$$F(z_1, z_2) = \frac{z_1^2}{2} + \frac{z_2^2}{2} \qquad \left(F(x, \dot{x}) = \frac{x^2}{2} + \frac{\dot{x}^2}{2} \right)$$

και οι <u>τροχιές φάσης</u> είναι η προβολές των καμπύλων της <u>ολοκληρωτικής πολ/τητας</u> στο επίπεδο φάσης (z_1, z_2)

$$F(\bar{z}) = \frac{z_1^2}{2} + \frac{z_2^2}{2} = \Gamma \qquad (\Gamma > 0),$$

δηλαδή ομόκεντροι κύκλοι με κέντρο το $(0,0)$ και ακτίνα $\sqrt{2\Gamma}$



Πορτραίτο φάσης της $\ddot{x} + x = 0$ (αρμονική ταλάντωση).

Όλοι οι κύκλοι, $\forall$ τιμή του Γ, αποτελούν το <u>πορτραίτο φάσης</u> του συστήματος (12)

Αν $f(z_1)=\sin z_1$ $(f(x)=\sin x)$, τότε το πρώτο ολοκλήρωμα του συστήματος (12) (Εξ.(11)) είναι η συνάρτηση

$$F(z_1,z_2) = -\cos z_1 + \frac{z_2^2}{2} \qquad \left(F(x,\dot{x}) = -\cos x + \frac{\dot{x}^2}{2}\right)$$

και οι τροχιές φάσης έχουν εξίσωση

$$F(\bar{z}) = -\cos z_1 + \frac{z_2^2}{2} = \Gamma \ , \ \Gamma \in \mathbb{R}.$$

---

5. $\boxed{\text{Θεμελιώδεις λύσεις γραμμικών συστημάτων Δ.Ε}}$

Ομογενή συστήματα

Έστω το ομογενές γραμμικό σύστημα (3):

$$\bar{x}' = P(t)\,\bar{x} \ , \quad \bar{x} = (x_1,\dots,x_n)^T \ , \quad x_i = x_i(t),\ i=1,\dots,n$$

$$P(t) = (p_{ij}(t)) \ , \quad i,j=1,\dots,n$$

Καθώς

$$f_i(t,\bar{x}) = p_{i1}(t)x_1 + \dots + p_{in}(t)x_n \ , \quad i=1,\dots,n$$

και $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j} = p_{ij}(t)$, $i,j=1,\dots,n$

αν $p_{ij}(t)$, $i,j=1,\dots,n$ είναι συνεχείς συναρτήσεις του t σε ένα διάστημα (a,b), τότε και οι f_i, f_{ij}, $i,j=1,\dots,n$ είναι συνεχείς στο $(a,b)\times\mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{R}^{1+n}$, και το Θεώρημα Ύπαρξης - Μοναδικότητας ισχύει για ένα Π.Α.Τ σε οποιοδήποτε σημείο $(t_0,\bar{x}_0)\in(a,b)\times\mathbb{R}^n$.

Έχουμε τώρα το ακόλουθο **Θεώρημα**:

Αν $\bar{v}_1(t), \dots, \bar{v}_n(t)$ λύσεις ενός γραμμικού ομογενούς συστήματος $\bar{x}' = P(t)\bar{x}$, $P(t) = (p_{ij}(t))$, $i,j = 1,\dots,n$, όπου οι $p_{ij}(t)$ είναι συνεχείς συναρτήσεις του t σε ένα διάστημα (a,b) και $\det(\bar{v}_1,\dots,\bar{v}_n)(t_0) \neq 0$ γιά ένα $t_0 \in (a,b)$, τότε, κάθε λύση του συστήματος γράφεται σαν μοναδικός γραμμικός συνδυασμός $c_1\bar{v}_1(t) + \dots + c_n\bar{v}_n(t)$, $c_i \in \mathbb{R}$, $i=1,\dots,n$.

Απόδειξη:

- Έστω μια λύση του γραμμικού ομογενούς συστήματος, $\bar{\varphi}(t) = (\varphi_1(t),\dots,\varphi_n(t))^T$. Τότε η $\bar{\varphi}(t)$ είναι λύση του

Π.Α.Τ : $\quad \bar{x}' = P(t)\bar{x}, \quad \bar{x}(t_0) = (\varphi_1(t_0),\dots,\varphi_n(t_0))^T = \bar{x}_0 \qquad (14)$

- Επίσης, λόγω γραμμικότητας, ο γραμμικός συνδυασμός

$$\bar{\psi}(t) = c_1\bar{v}_1(t) + \dots + c_n\bar{v}_n(t) = \Phi(t)\,\bar{c} \qquad (15)$$

με $\Phi(t) = (\bar{v}_1(t),\dots,\bar{v}_n(t))_{n\times n}$ και $\bar{c} = (c_1,\dots,c_n)^T$, είναι λύση του συστήματος.

- Απαιτώντας τώρα

$$\bar{\psi}(t_0) = \Phi(t_0)\,\bar{c} = \bar{x}_0 \qquad (16)$$

καθώς $\det\Phi(t_0) \neq 0$ (από υπόθεση), το σύστημα (16) έχει μοναδική λύση $\bar{c}_0 = (c_{10},\dots,c_{n0})^T$. Συνεπώς, η $\bar{\psi}_0(t) = c_{10}\bar{v}_1(t) + \dots + c_{n0}\bar{v}_n(t)$ είναι λύση του Π.Α.Τ (14)

- Καθώς τώρα $p_{ij}(t)$, $i,j=1,\dots,n$, συνεχείς για $t \in (a,b)$ (από υπόθεση), από το Θεώρημα Ύπαρξης-Μοναδικότητας, έχουμε ότι το Π.Α.Τ (14) έχει μοναδική λύση σε ένα διάστημα (t_0-a, t_0+a), $a>0$.

Άρα $\bar{\varphi}(t) = \bar{\psi}_0(t) = c_{10}\,\bar{v}_1(t) + \dots + c_{n0}\,\bar{v}_n(t)$,

δηλαδή κάθε λύση του συστήματος γράφεται σαν μοναδικός γραμμικός συνδυασμός των $\bar{v}_i(t)$, $i=1,\dots,n$.

□

Βάσει του παραπάνω Θεωρήματος, διατυπώνουμε τώρα την ακόλουθη **Πρόταση**, που αφορά στις Θεμελιώδεις λύσεις ενός γραμμικού, ομογενούς συστήματος ΔΕ:

Αν $\bar{v}_i(t)$, $i=1,\dots,n$ λύσεις ενός γραμμικού ομογενούς συστήματος $\bar{x}' = P(t)\bar{x}$, $P(t) = (p_{ij}(t))$, $i,j=1,\dots,n$, με $p_{ij}(t)$ συνεχείς συναρτήσεις του t σε ένα διάστημα (a,b) και $\det(\bar{v}_1,\dots,\bar{v}_n)(t) \neq 0$, $\forall\, t \in (a,b)$, τότε, οι $\bar{v}_i(t)$, $i=1,\dots,n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες και κάθε λύση του συστήματος γράφεται ως

$$\boxed{\bar{x}(t) = \Phi(t)\,\bar{c}} \tag{17}$$

$$\Phi(t) = (\bar{v}_1(t), \dots, \bar{v}_n(t))_{n\times n}, \quad \bar{c} = (c_1, \dots, c_n)^T$$

με $\bar{c}$ μοναδικό.

Οι $\bar{v}_1(t), \dots, \bar{v}_n(t)$ καλούνται Θεμελιώδεις λύσεις του συστήματος (fundamental set of solutions) (παράγουν το χώρο των λύσεων – βάση λύσεων) και το $n\times n$ μητρώο $\Phi(t)$ Θεμελιώδης πίνακας λύσεων του συστήματος (fundamental matrix). Η (17) ονομάζεται και γενική λύση.

Μη ομογενή συστήματα

Αν έχουμε τις θεμελιώδεις λύσεις $\bar{v}_i(t)$, $i=1,\dots,n$, ενός γραμμικού ομογενούς συστήματος ΔΕ: $\bar{x}' = P(t)\bar{x}$, τότε καθώς $\frac{d\bar{v}_i}{dt} = P\bar{v}_i$, $i=1,\dots,n$, για το θεμελιώδη πίνακα του συστήματος, $\Phi(t) = (\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n)_{n\times n}$, ισχύει ότι

$$\boxed{\frac{d\Phi}{dt} = P.\Phi} \qquad (18)$$

Παραγωγίζοντας την εξίσωση $\Phi\Phi^{-1} = I_{n\times n}$ (ο Φ^{-1} υπάρχει καθώς $\det\Phi \neq 0$ $\forall t \in (a,b)$ όπου οι $p_{ij}(t)$, $i,j=1,\dots,n$ είναι συνεχείς), παίρνουμε (λόγω της (18))

$$\frac{d(\Phi\Phi^{-1})}{dt} = P\Phi\Phi^{-1} + \Phi\frac{d\Phi^{-1}}{dt} = P + \Phi\frac{d\Phi^{-1}}{dt} = 0$$

ή

$$\boxed{\frac{d\Phi^{-1}}{dt} = -\Phi^{-1}.P} \qquad (19)$$

Έτσι, γιά ένα γραμμικό μη ομογενές σύστημα Δ.Ε (Εξ.(3)), $\bar{x}' = P(t)\bar{x} + \bar{r}(t)$, έχουμε

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = P\bar{x} + \bar{r} \xrightarrow{\cdot\Phi^{-1}} \Phi^{-1}\frac{d\bar{x}}{dt} = \Phi^{-1}P\bar{x} + \Phi^{-1}\bar{r} \longrightarrow$$

$$\Phi^{-1}\frac{d\bar{x}}{dt} - \Phi^{-1}P\bar{x} = \Phi^{-1}\bar{r} \xrightarrow{(19)} \frac{d(\Phi^{-1}\bar{x})}{dt} = \Phi^{-1}\bar{r} \xrightarrow{\int dt}$$

$$\Phi^{-1}\bar{x} = \bar{c} + \int \Phi^{-1}\bar{r}\,dt \xrightarrow{\cdot\Phi}$$

$$\boxed{\bar{x}(t) = \Phi(t)\bar{c} + \Phi(t)\int \Phi^{-1}(t)\bar{r}(t)\,dt} \qquad (20)$$

Καθώς $\Phi \bar{c}$ αντιπροσωπεύει τη γενική λύση του ομογενούς συστήματος (ΕΞ.(17)), ο δεύτερος όρος του δεξιού μέλους της ΕΞ. (20)

$$\Phi(t)\,\bar{g}(t), \quad \bar{g}(t) = \int \Phi^{-1}(t)\,\bar{r}(t)\,dt \tag{21}$$

είναι μία <u>μερική λύση</u> του μη ομογενούς συστήματος.

Ο υπολογισμός της $\bar{g}(t)$, γίνεται:

<u>α</u>. Από τον τύπο της, δηλαδή βρίσκοντας τον αντίστροφο του θεμελιώδους πίνακα, $\Phi^{-1}(t)$, πολ/ζοντας με $\bar{r}(t)$ και ολοκληρώνοντας το προκύπτον διάνυσμα ως προς t,

<u>ή</u>

<u>β</u>. Παραγωγίζοντας τον τύπο της $\bar{g}(t)$, δηλαδή

$$\bar{g}'(t) = \Phi^{-1}(t)\,\bar{r}(t) \xrightarrow{\cdot\Phi} \Phi(t)\,\bar{g}'(t) = \bar{r}(t) \tag{22}$$

Έτσι η $\bar{g}(t)$ προκύπτει από την ολοκλήρωση των λύσεων του συστήματος (22) ($\det\Phi(t) \neq 0$). (Το σύστημα (22) αποκτάται και από την απαίτηση - υπόθεση ότι το διάνυσμα

$\Phi(t)\,\bar{g}(t)$, $\bar{g}(t) = (g_1(t), \ldots, g_n(t))^T$ είναι λύση του μη ομογενούς συστήματος).

Παρατηρήστε ότι το σύστημα (22), είναι αυτό που δίνει τις άγνωστες συναρτήσεις $f_i(t)$, $i=1,\ldots,n$ που εμπλέκονται στη μερική λύση μίας γραμμικής μη ομογενούς Δ.Ε n-τάξης, $\sum_{i=1}^{n} y_i f_i$ ($y_i(t)$ λύσεις της ομογενούς), οι οποίες στην αντίστοιχη θεωρία υπολογίζονται μέσω της <u>μεθόδου μεταβολής των παραμέτρων</u>.

Πράγματι, καθώς η Δ.Ε n-τάξης ανάγεται σε ένα σύστημα n-Δ.Ε $1^{ης}$ τάξης με μεταβλητές φάσης

$$z_1 = y, \quad z_2 = y', \quad \dots, \quad z_n = y^{(n-1)} \qquad (y = y(t))$$

αν $y_1(t), \dots, y_n(t)$ είναι θεμελιώδεις λύσεις της ομογενούς, η j-θεμελιώδης λύση του αντίστοιχου συστήματος, $j=1,\dots,n$ (η j-στήλη του θεμελιώδους πίνακα $\Phi(t)$), είναι:

$$\left(y_j, y_j', \dots, y_j^{(n-1)}\right)^T,$$ δηλαδή ο $\Phi(t)$ είναι ο πίνακας Wronski των $\{y_1, \dots, y_n\}$. Επίσης, οι άγνωστοι στο σύστημα (22) είναι οι συνιστώσες του διανύσματος $(f_1', \dots, f_n')^T$ και το δεξιό μέλος είναι το διάνυσμα $(0, \dots, 0, r(t))^T$.

<u>Άσκηση</u>

Αποδείξτε ότι για την γραμμική ομογενή Δ.Ε n-τάξης

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \dots + p_1(x)\, y' + p_0(x)\, y = 0$$

με $p_i(x)$, $i=0,\dots,n-1$ συνεχείς συναρτήσεις του x στο διάστημα (a,b), αν $y_1, \dots, y_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της εξίσωσης, τότε κάθε λύση της γράφεται σαν μοναδικός γραμμικός συνδυασμός των y_i, $i=1,\dots,n$.

(Μην χρησιμοποιήσετε την αναγωγή της εξίσωσης σε σύστημα n-Δ.Ε $1^{ης}$ τάξης).