Ομογενή γραμμικά αυτόνομα συστήματα Δ.Ε $1^{ης}$ τάξης, $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$

$\boxed{\dot{\bar{x}} = P\bar{x}}$, $\bar{x} = (x_1(t), \dots, x_n(t))^T$, $P = (a_{ij})$, $i,j = 1,\dots,n$

<u>Γενικά</u>, για $n \geq 2$, οι <u>λύσεις</u> του συστήματος προκύπτουν βάσει των <u>ιδιοτιμών</u> και <u>ιδιοδιανυσμάτων</u> του πίνακα συντελεστών P, ως εξής:

($\lambda \rightarrow$ ιδιοτιμή , $\bar{\xi} \rightarrow$ ιδιοδιάνυσμα)

λ <u>απλή</u> $\rightarrow \bar{\xi} \rightarrow \boxed{e^{\lambda t}\bar{\xi}}$ Θεμελιώδης λύση

λ <u>πολλαπλή **μη** εκφυλισμένη</u> $(g = m) \rightarrow$
γεωμετρική πολ/τητα
αλγεβρική πολ/τητα

$\bar{\xi}_1, \dots, \bar{\xi}_g$ γραμ. ανεξάρτητα $\rightarrow$

$\boxed{\{e^{\lambda t}\bar{\xi}_1, \dots, e^{\lambda t}\bar{\xi}_g\}}$ Θεμελιώδεις λύσεις

λ <u>πολλαπλή εκφυλισμένη</u> $(g < m) \rightarrow$

$\bar{\xi}_1, \dots, \bar{\xi}_g$ γραμ. ανεξάρτητα $\rightarrow$

$\{e^{\lambda t}\bar{\xi}_1, \dots, e^{\lambda t}\bar{\xi}_g\}$ Θεμελιώδεις λύσεις $\rightarrow$

<u>αναζητούμε</u> άλλες <u>$m-g$</u> γραμ. ανεξ. λύσεις.

Έτσι, εισάγοντας <u>νέα</u> διανύσματα (<u>γενικευμένα</u> ιδιοδιανύσματα), <u>υποθέτουμε</u> διαδοχικά συγκεκριμένες μορφές λύσεων, βάσει ενός <u>γενικού τύπου</u>

και αντικαθιστώντας κάθε φορά στο σύστημα, παίρνουμε τις εξισώσεις από τις οποίες προσδιορίζονται τα νέα αυτά διανύσματα.

Πιο συγκεκριμένα:

Λύσεις	Εξισώσεις προσδ/μού $\bar{\eta}_\kappa$
$e^{\lambda t}\left(\bar{\eta}_1 + t\bar{\xi}_1\right) = \bar{w}_1$	$(P-\lambda I)\bar{\eta}_1 = \bar{\xi}_1$
$e^{\lambda t}\left(\bar{\eta}_2 + t\bar{\eta}_1 + \frac{t^2}{2}\bar{\xi}_1\right) = \bar{w}_2$	$(P-\lambda I)\bar{\eta}_2 = \bar{\eta}_1$
$e^{\lambda t}\left(\bar{\eta}_3 + t\bar{\eta}_2 + \frac{t^2}{2}\bar{\eta}_1 + \frac{t^3}{6}\bar{\xi}_1\right) = \bar{w}_3$	$(P-\lambda I)\bar{\eta}_3 = \bar{\eta}_2$
$\vdots$	$\vdots$
$e^{\lambda t}\left(\bar{\eta}_\kappa + t\bar{\eta}_{\kappa-1} + \frac{t^2}{2}\bar{\eta}_{\kappa-2} + \dots \right.$ $\left. \dots + \frac{t^{\kappa-1}}{(\kappa-1)!}\bar{\eta}_1 + \frac{t^\kappa}{\kappa!}\bar{\xi}_1\right) = \bar{w}_\kappa$ ή $e^{\lambda t}\left(\sum_{p=0}^{\kappa-1}\frac{t^p}{p!}\bar{\eta}_{\kappa-p} + \frac{t^\kappa}{\kappa!}\bar{\xi}_1\right) = \bar{w}_\kappa$	$(P-\lambda I)\bar{\eta}_\kappa = \bar{\eta}_{\kappa-1}$

— Αν το $\bar{\xi}_1$ δεν μπορεί να δώσει όλες τις υπόλοιπες $m-g$ λύσεις που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή λ, συνεχίζουμε την ίδια διαδικασία (από την αρχή) χρησιμοποιώντας το $\bar{\xi}_2$, $\bar{\xi}_3$ κ.ο.κ., έως ότου συμπληρωθούν $m-g$ το πλήθος λύσεις.

– Γενικά, οι λύσεις $\{e^{\lambda t}\bar{\xi}, \bar{w}_1, \dots, \bar{w}_k\}$, $k \leq m-g$, για οποιοδήποτε ιδιοδιάνυσμα $\bar{\xi}$ της λ, είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Αυτό προκύπτει αποδεικνύοντας (όπως και στην περίπτωση $n=2$), ότι τα $\{\bar{\xi}, \bar{\eta}_1, \dots, \bar{\eta}_k\}$, $k \leq m-g$, είναι γραμμ. ανεξάρτητα.

– Αν $\lambda, \bar{\lambda} = r \pm i\omega$ ζεύγος μιγαδικών συζυγών ιδιοτιμών, τότε κάθε λύση της μορφής $e^{\lambda t}\vec{\xi}$ ($\bar{\xi}$ ιδιοδιάνυσμα της λ) ή $e^{\lambda t}\bar{w}_k$ (σε περίπτωση πολλαπλού εκφυλισμένου ζεύγους), παρέχει ένα ζεύγος πραγματικών θεμελιωδών λύσεων $\bar{v}_1, \bar{v}_2$ με:

$\bar{v}_1 + i\bar{v}_2 = e^{\lambda t}\bar{\xi}$ ή $\bar{v}_1 + i\bar{v}_2 = \bar{w}_k$

– Παραδείγματα ομογενών γραμμικών συστημάτων ΔΕ $1^{ης}$ τάξης, $n = 3$, με μία πραγματική και ένα ζεύγος μιγαδικών συζυγών ιδιοτιμών.

$$\dot{\bar{x}} = P\bar{x}, \quad x = (x(t), y(t), z(t))^T$$

a.

$$P = \begin{pmatrix} -4 & 5 & -3 \\ -\frac{17}{3} & \frac{4}{3} & \frac{7}{3} \\ \frac{23}{3} & -\frac{25}{3} & -\frac{4}{3} \end{pmatrix}_{3\times 3} \longrightarrow \underbrace{\lambda_1 = -2}, \quad \underbrace{\lambda_{2,3} = -1 \pm i8}$$

$$\underset{\sim}{\bar{\xi}_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \underset{\sim}{\bar{\xi}_2} = \begin{pmatrix} -1+i \\ -1-i \\ 2 \end{pmatrix}$$

Άρα:

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{-2t} & e^{-t}(-\cos 8t - \sin 8t) & e^{-t}(\cos 8t - \sin 8t) \\ e^{-2t} & e^{-t}(-\cos 8t + \sin 8t) & e^{-t}(-\cos 8t - \sin 8t) \\ e^{-2t} & 2e^{-t}\cos 8t & 2e^{-t}\sin 8t \end{pmatrix}$$

---

b.

$$P = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{29}{4} & -\frac{11}{2} \\ -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{5}{2} \\ \frac{5}{4} & \frac{11}{4} & -\frac{5}{2} \end{pmatrix}_{3\times 3} \longrightarrow \underbrace{\lambda_1 = -1}, \quad \underbrace{\lambda_{2,3} = \pm 4i}$$

$$\underset{\sim}{\bar{\xi}_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \bar{\xi}_2 = \begin{pmatrix} 2+i \\ i \\ 1 \end{pmatrix}$$

Άρα:

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} -e^{-t} & 2\cos 4t - \sin 4t & \cos 4t + 2\sin 4t \\ e^{-t} & -\sin 4t & \cos 4t \\ e^{-t} & \cos 4t & \sin 4t \end{pmatrix}$$

- Ασκήσεις για λύση

$5^{\eta}_{\rho\varsigma}$

$$P = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 6 & 4 & 6 \\ -5 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \bar{x}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \bar{x}(0) = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

– <u>Παράδειγμα υπολογισμού</u> ιδιοδιανύσματος μιγαδικής ιδιοτιμής (από Παράδειγμα 4, σελ. 7^{η}_{es} και Παράδειγμα 5, σελ. 8^{η}_{es})

$P = \begin{pmatrix} -0.5 & 1 \\ -1 & -0.5 \end{pmatrix}$, $\lambda_1 = -0.5 + i \rightarrow P - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} \rightarrow$

$(P - \lambda_1 I)\bar{\xi}_1 = \bar{0}$: $\left(\begin{array}{cc|c} -i & 1 & 0 \\ -1 & -i & 0 \end{array}\right)$. Για τον 2×2 πίνακα <u>δεν χρειάζονται</u> γραμμοπράξεις καθώς η λ_1 είναι ρίζα της $\det(P - \lambda_1 I) \Rightarrow$ η τάξη του $P - \lambda_1 I$ είναι < 2 (εδώ είναι ίση με 1) (δηλαδή οι γραμμοπράξεις θα μας δώσουν απλώς μία μηδενική γραμμή. Το <u>ίδιο</u> συμβαίνει και για <u>οποιονδήποτε</u> άλλο πίνακα $n \times n$, $n > 2$, όσον αφορά (<u>μόνο</u>) στην τελευταία <u>γραμμή</u>).

Έτσι εδώ, για τον υπολογισμό του $\bar{\xi}_1 = (a, \beta)^T$, χρησιμοποιούμε μόνο την πρώτη γραμμή: $-i a + 1 . \beta = 0 \rightarrow$ ένας ελεύθ. άγν. π.χ. ο $\beta \rightarrow a = -\frac{\beta}{-i} = -\beta i \rightarrow$

$\bar{\xi}_1 = \beta(-i, 1)^T \xrightarrow{\beta = 1} (-i, 1)^T$

$P = \begin{pmatrix} 1 & -2.5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $\lambda_1 = i2 \longrightarrow P - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} 1 - i2 & -2.5 \\ 2 & -1 - i2 \end{pmatrix} \rightarrow$

$(P - \lambda_1 I)\bar{\xi}_1 = \bar{0}$: $\left(\begin{array}{cc|c} 1-i2 & -2.5 & 0 \\ 2 & -1-i2 & 0 \end{array}\right) \rightarrow (1 - i2)a - 2.5\beta = 0 \rightarrow$

ένας ελεύθ. άγν. π.χ. ο $\beta \longrightarrow a = \frac{2.5\beta}{1 - i2} = \frac{2.5(1 + i2)\beta}{1^2 + 2^2}$

ή $a = (0.5 + i)\beta \longrightarrow \bar{\xi}_1 = \beta(0.5 + i, 1)^T \xrightarrow{\beta = 1} (0.5 + i, 1)^T$

Αν ο a ελευθ. άγν. $\xrightarrow{a = 1} \bar{\xi}_1 = (1, 0.4 - i0.8)^T$.