1ες

Ομογενή γραμμικά συστήματα διαφορικών εξισώσεων $1^{ης}$ τάξης με σταθερούς συντελεστές (αυτόνομα)

$x_i = x_i(t)$, "$\cdot$" $= \frac{d}{dt}$, $a_{ij} \in R$, $i,j = 1,\dots,n$

$$\left\{\begin{array}{l} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ \dot{x}_n = a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n \end{array}\right\} \text{ ή } \quad \boxed{\dot{\bar{x}} = P\bar{x}} \quad \left(\text{διανυσματική μορφή}\right)$$

$\bar{x} = \left(x_1(t), \dots, x_n(t)\right)^T$ <u>μεταβλητές κατάστασης</u>

$P = (a_{ij})$, $i,j = 1,\dots n$ <u>πίνακας συντελεστών</u>

$\boxed{n = 2}$

$x = x(t)$, $y = y(t)$, $A, B, C, D \in R$

$$\left\{\begin{array}{l} \dot{x} = Cx + Dy \\ \dot{y} = Ax + By \end{array}\right\} (1) \quad \text{Αν} \left\{\begin{array}{l} \dot{x} = Cx + Dy + F \\ \dot{y} = Ax + By + E \end{array}, \ (F, E) \neq (0,0) \right\}$$

τότε επιλύουμε το σύστημα:

$$\left.\begin{array}{l} Cx + Dy = -F \\ Ax + By = -E \end{array}\right\} \xrightarrow{BC - AD \neq 0} \text{μοναδική λύση } (x_0, y_0)$$

<u>Θέτοντας</u> $x' = x - x_0$, $y' = y - y_0$, <u>παραγωγίζοντας</u>, <u>αντικαθιστώντας</u> το σύστημα και <u>εν συνεχεία</u> τα x, y: $x = x' + x_0$, $y = y' + y_0$, καταλήγουμε σε ένα σύστημα της μορφής (1).

Αν $BC - AD = 0 \longrightarrow$ **επιλύουμε** τη μία από τις δύο ως προς x (ή y) και δίνοντας μία αυθαίρετη τιμή y_0 (ή x_0) παίρνουμε την x_0 (ή y_0) (<u>π.χ</u> $(x_0, y_0) = (-F/C, 0)$).

<u>Ακολουθώντας</u> την παραπάνω διαδικασία (<u>Θέτοντας</u> ...) <u>καταλήγουμε</u> πάλι σε ένα σύστημα της μορφής (1).

Άρα, αρκεί να επιλύσουμε το:

$$\boxed{\dot{\bar{x}} = P\bar{x}, \quad \bar{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} C & D \\ A & B \end{pmatrix}} \qquad (1)$$

$(x(t), y(t))^T$ οι μεταβλητές κατάστασης, P ο πίνακας συντελεστών.

- Επίλυση συστήματος (1)

Υποθέτουμε λύση της μορφής $e^{\lambda t}\bar{\xi}$ ($\bar{\xi}$ σταθερό διάνυσμα 2×1) $\xrightarrow{(1)}$

$$\lambda e^{\lambda t}\bar{\xi} = e^{\lambda t}P\bar{\xi} \longrightarrow (P - \lambda I_2)\bar{\xi} = \bar{0} \qquad (2)$$

όπου I_2 ο ταυτοτικός πίνακας 2×2.

(2) λ: οι ιδιοτιμές, $\bar{\xi}$: τα ιδιοδιανύσματα του P $\longrightarrow$ χαρακτ. εξίσωση: $\det(P - \lambda I_2) = 0$

$$\lambda^2 \underbrace{- (B + C)}_{-trP}\lambda + \underbrace{BC - AD}_{\det P} = 0 \qquad (3)$$

δευτεροβάθμια με διακρίνουσα $\Delta = (B-C)^2 + 4AD$ (3α)

Έτσι, διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

$\boxed{\Delta > 0}$

Δύο πραγματικές ιδιοτιμές λ_1, λ_2, $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ($g_i = 1 = m_i$, $i=1,2$) (g η γεωμετρική και m η αλγεβρική πολ/τα της ιδιοτιμής)

$\longrightarrow$ δύο λύσεις $e^{\lambda_1 t}\bar{\xi}_1$, $e^{\lambda_2 t}\bar{\xi}_2$, με $\bar{\xi}_i$ το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα της λ_i, $i=1,2$:

$$\det(e^{\lambda_1 t}\bar{\xi}_1, e^{\lambda_2 t}\bar{\xi}_2) = e^{(\lambda_1+\lambda_2)t}\det(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2) \neq 0, \qquad (4)$$

καθώς $\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2$ γραμ. ανεξάρτητα.

Άρα θεμελιώδεις, και ο θεμελιώδης πίνακας του (1) είναι:

$$\underline{\Phi(t)} = \left(e^{\lambda_1 t}\bar{\xi}_1 \; , \; e^{\lambda_2 t}\bar{\xi}_2 \right)_{2\times 2} \qquad (5)$$

δηλαδή η γενική λύση είναι $(\bar{c} = (c_1, c_2)^T)$:

$$\bar{x}(t) = \Phi\,\bar{c} \quad \text{ή} \quad \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 e^{\lambda_1 t}\bar{\xi}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t}\bar{\xi}_2 \qquad (5a)$$

$c_i \in R$

- Παράδειγμα 1

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{x} &= -0.1\,x + 0.075\,y \\ \dot{y} &= 0.1\,x - 0.2\,y \end{aligned} \right\} \quad \text{ή} \quad \dot{\bar{x}} = P\bar{x} \,, \quad P = \begin{pmatrix} -0.1 & 0.075 \\ 0.1 & -0.2 \end{pmatrix}$$

<u>χ.ε.</u> : $\det(P - \lambda I) = \lambda^2 - trP.\lambda + \det P = 0$

ή $\lambda^2 + 0.3\,\lambda + 0.0125 = 0 \,, \; \Delta = 0.04 > 0 \rightarrow$

$\underline{\lambda_1} = -0.25 \,, \; \underline{\lambda_2} = -0.05$ με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα:

$\underline{\bar{\xi}_1} = (-0.5\,,1)^T, \; \underline{\bar{\xi}_2} = (1.5\,,1)^T \qquad \left((P - \lambda I)\bar{\xi} = \bar{0} \right)$

Συνεπώς, ο θεμελιώδης πίνακας του συστήματος είναι:

$$\underline{\Phi(t)} = \begin{pmatrix} -0.5\,e^{-0.25t} & 1.5\,e^{-0.05t} \\ e^{-0.25t} & e^{-0.05t} \end{pmatrix}$$

και η γενική λύση γράφεται:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 e^{-0.25t} \begin{pmatrix} -0.5 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-0.05t} \begin{pmatrix} 1.5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Αν έχουμε <u>Π.Α.Τ</u>:

$$\{ \text{Σύστημα } (1), \quad (\text{Α.Σ}): \bar{x}(0) = \bar{x}_0 \} \qquad (6)$$

(για $n=2$: $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$)

τότε <u>υπολογίζουμε</u> το (μοναδικό) $\bar{c} = (c_1, c_2)^T$ <u>επιλύοντας</u> το σύστημα ($\det \phi(t) \neq 0$, $\forall t \in R$):

$$\bar{x}_0 = \phi(0)\bar{c} \quad \text{ή} \quad \bar{c} = \phi^{-1}(0)\bar{x}_0 \qquad (7)$$

<u>π.χ.</u> για το παραπάνω παράδειγμα, αν $x(0) = 0$, $y(0) = 1$, έχουμε

$$\left.\begin{aligned} -0.5\,c_1 + 1.5\,c_2 &= 0 \\ c_1 + c_2 &= 1 \end{aligned}\right\} \rightarrow (c_1, c_2) = (0.75, 0.25)$$

$\boxed{\Delta = 0}$

Γενικά έχουμε <u>μία διπλή</u> ιδιοτιμή $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ ($g = 1 < 2 = m$) δηλαδή <u>εκφυλισμένη</u> $\longrightarrow$ μία λύση $e^{\lambda t}\bar{f}$, με $\bar{f}$ το αντίστοιχο ιδν. Άρα <u>αναζητούμε</u> μία δεύτερη θεμελιώδη. Υποθέτουμε ότι είναι της μορφής $e^{\lambda t}(\bar{n} + t\bar{f})$, με $\bar{n}$ προσδιοριστέο διάνυσμα. Αντικαθιστώντας στο (1) παίρνουμε ($e^{\lambda t} \neq 0$)

$$\lambda(n + \cancel{t\bar{f}}) + \bar{f} = P\bar{n} + \cancel{tP\bar{f}} \qquad (P\bar{f} = \lambda\bar{f})$$

ή

$$(P - \lambda I_2)\bar{n} = \bar{f} \qquad (8)$$

Το $\bar{n}$ καλείται <u>γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα</u> της λ και προσδιορίζεται λύνοντας το σύστημα (8) (θέτουμε την ελεύθερη παράμετρο ίση με μηδέν).

Πρόταση 1

Ο πίνακας $\Phi(t) = e^{\lambda t}(\bar{\xi}, \bar{\eta}+t\bar{\xi})$ είναι __θεμελιώδης__ γιά το σύστημα (1) $(\Delta=0)$

__Απόδειξη__ (ως άσκηση: αποδεικνύουμε ότι τα $\bar{\xi}, \bar{\eta}$ είναι γραμ. ανεξάρτητα).

– __Ειδικές περιπτώσεις__

__a.__ $P = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \rightarrow B = C,\ A = D = 0 \rightarrow \Delta = 0,\ \lambda = C \rightarrow$

$P - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \bar{\xi}_1 = (1,0)^T,\ \bar{\xi}_2 = (0,1)^T$ γραμ. ανεξ.

$g = 2 = m \rightarrow \lambda$ __όχι__ εκφυλισμένη

Στη __μοναδική__ αυτή περίπτωση έχουμε:

$$\Phi(t) = e^{\lambda t} I_2 \rightarrow \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{\lambda t}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \qquad (9a)$$

__b.__ $P = \begin{pmatrix} c & D \\ 0 & c \end{pmatrix} \rightarrow B = C,\ A = 0,\ D \neq 0 \rightarrow \Delta = 0,\ \lambda = C \rightarrow$

$P - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} 0 & D \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \bar{\xi} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \bar{\eta} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{D} \end{pmatrix}$, άρα:

(γιά το γενικευμένο ιδν. θέτουμε την ελεύθερη παράμετρο ίση με μηδέν)

$$\Phi(t) = e^{\lambda t}\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & \frac{1}{D} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{\lambda t}\begin{pmatrix} c_1 + c_2 t \\ \frac{c_2}{D} \end{pmatrix} \qquad (9b)$$

---

c.

$$P = \begin{pmatrix} c & 0 \\ A & c \end{pmatrix} \rightarrow B = C,\ A \neq 0,\ D = 0 \rightarrow \Delta = 0,\ \lambda = C \rightarrow$$

$$P - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \bar{\xi} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ \bar{n} = \begin{pmatrix} \frac{1}{A} \\ 0 \end{pmatrix},\ \text{άρα:}$$

$$\underbrace{\Phi(t)} = e^{\lambda t}\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{A} \\ 1 & t \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{\lambda t}\begin{pmatrix} \frac{c_2}{A} \\ c_1 + c_2 t \end{pmatrix} \quad (9_c)$$

- Παράδειγμα 2

$$\dot{\bar{x}} = P\bar{x},\quad P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \underline{\text{χ.ε.}}:$$

$$\lambda^2 - trP.\lambda + \det P = 0 \quad \text{ή} \quad \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0,\ \Delta = 0 \rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 = \lambda_2 = \underbrace{\lambda} = 2, \quad \underbrace{\bar{\xi}} = (-1, 1)^T \\ (P - 2I_2)\bar{n} = \bar{\xi} \longrightarrow \underbrace{\bar{n}} = (1, 0)^T \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\underbrace{\Phi(t)} = e^{2t}\begin{pmatrix} -1 & 1-t \\ 1 & t \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{2t}\begin{pmatrix} -c_1 + c_2 - c_2 t \\ c_1 + c_2 t \end{pmatrix}$$

- Παράδειγμα 3

$$\dot{\bar{x}} = P\bar{x},\quad P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} : \text{Ειδική περίπτωση b:}$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \underbrace{\lambda} = -1,\ \underbrace{\bar{\xi}} = (1, 0)^T,\ \underbrace{\bar{n}} = (0, 1)^T \longrightarrow$$

$$\underbrace{\Phi(t)} = e^{-t}\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{-t}\begin{pmatrix} c_1 + c_2 t \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\Delta<0}$

Ένα ζεύγος μιγαδικών συζυγών ιδιοτιμών $\lambda_{1,2}=r\pm i\omega$, με αντίστοιχα (συζυγή) ιδιοδιανύσματα $\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2$.

Πρόταση 2

> Ο πίνακας $\underline{\Phi(t)}=(\bar{v}_1, \bar{v}_2)$, όπου
> $$\bar{v}_1+i\bar{v}_2=e^{\lambda_1 t}\bar{\xi}_1=e^{rt}(\cos\omega t+i\sin\omega t)\bar{\xi}_1$$
> (ή $\bar{v}_1+i\bar{v}_2=e^{\lambda_2 t}\bar{\xi}_2=e^{rt}(\cos\omega t-i\sin\omega t)\bar{\xi}_2$)
> είναι __θεμελιώδης__ για το σύστημα (1) ($\Delta<0$)

__Απόδειξη__ (ως άσκηση: Αποδεικνύουμε ότι $\bar{v}_1, \bar{v}_2$ είναι λύσεις του (1). Θέτουμε $\bar{\xi}_1=\bar{c}+i\bar{d}$, και γράφοντας κατάλληλα τα $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$, αποδεικνύουμε ότι $\det(\bar{v}_1,\bar{v}_2)\neq 0$, λαμβάνοντας υπ' όψη ότι τα $\bar{c}, \bar{d}$ είναι γραμμ. ανεξάρτ.)

- __Παράδειγμα 4__

$$\dot{\bar{x}}=P\bar{x}, \quad P=\begin{pmatrix}-0.5 & 1\\ -1 & -0.5\end{pmatrix} \rightarrow \underline{\text{χ.ε.}}:$$

$$\lambda^2-\mathrm{tr}P\,\lambda+\det P=0 \quad \text{ή} \quad \lambda^2+\lambda+1.25=0, \ \Delta<0 \rightarrow$$

$$\underline{\lambda_{1,2}}=-0.5\pm i, \quad \underline{\bar{\xi}_{1,2}}=(\mp i, 1)^T \longrightarrow$$

$$\bar{v}_1+i\bar{v}_2=e^{(-0.5+i)t}\bar{\xi}_1=e^{-0.5t}(\cos t+i\sin t)\begin{pmatrix}-i\\1\end{pmatrix}\longrightarrow$$

$$\underline{\Phi(t)}=e^{-0.5t}\begin{pmatrix}\sin t & -\cos t\\ \cos t & \sin t\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix}=c_1e^{-0.5t}\begin{pmatrix}\sin t\\ \cos t\end{pmatrix}+c_2e^{-0.5t}\begin{pmatrix}-\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}$$

– Παράδειγμα 5

$$\dot{\bar{x}} = P\bar{x}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & -2.5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \underline{\text{χ.ε.}}:$$

$$\lambda^2 - \text{tr}P\,\lambda + \det P = 0 \quad \acute{\eta} \quad \lambda^2 + 4 = 0, \quad \Delta < 0 \rightarrow$$

$$\underline{\lambda_{1,2}} = \pm i2, \quad \underline{\bar{J}_{1,2}} = (0.5 \pm i, \ 1)^T \longrightarrow$$

$$\bar{v}_1 + i\bar{v}_2 = e^{i2t}\,\bar{v}_1 = (\cos 2t + i\sin 2t)\begin{pmatrix} 0.5+i \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\underline{\Phi(t)} = \begin{pmatrix} 0.5\cos 2t - \sin 2t & \cos 2t + 0.5\sin 2t \\ \cos 2t & \sin 2t \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} 0.5\cos 2t - \sin 2t \\ \cos 2t \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} \cos 2t + 0.5\sin 2t \\ \sin 2t \end{pmatrix}$$

Μη ομογενή γραμμικά συστήματα

$$\boxed{\dot{\bar{x}} = P\bar{x} + \bar{r}(t)}\ , \quad \bar{x} = (x_1(t), \dots, x_n(t))^T, \quad P = (a_{ij}),\ i,j = 1, \dots, n$$

$\bar{r}(t) = (r_1(t), \dots, r_n(t))^T$ ο μη ομογενής όρος

Αν $\Phi(t)\bar{c}$ είναι η λύση του αντίστοιχου <u>ομογενούς</u>, <u>υποθέτουμε</u> μερική λύση του συστήματος της μορφής $\bar{x}_p = \Phi(t)\bar{f}(t)$, με $\bar{f}$ <u>προσδιορίσιμη</u> διανυσματική συνάρτηση: $\bar{f} : R \to R^n$, $\bar{f}(t) = (f_1(t), \dots, f_n(t))^T$
με $f_i : R \to R$

(<u>μέθοδος μεταβολής των παραμέτρων</u>)

Αντικαθιστώντας την $\bar{x}_p$ στο μη ομογενές σύστημα παίρνουμε

$$\dot{\Phi}\bar{f} + \Phi\dot{\bar{f}} = P\Phi\bar{f} + \bar{r} \rightarrow (\text{καθώς } \dot{\Phi} = P\Phi)$$

$$\cancel{P\Phi\bar{f}} + \Phi\dot{\bar{f}} = \cancel{P\Phi\bar{f}} + \bar{r} \rightarrow (\text{καθώς } \det\Phi \neq 0)$$

$$\boxed{\Phi(t)\dot{\bar{f}}(t) = \bar{r}(t)} \rightarrow \dot{\bar{f}}(t) = \Phi^{-1}(t)\bar{r}(t) \rightarrow \boxed{\bar{f}(t) = \int \Phi^{-1}(t)\bar{r}(t)\,dt}$$

$$\rightarrow \Phi_{n\times n}\begin{pmatrix} \dot{f}_1 \\ \vdots \\ \dot{f}_n \end{pmatrix}_{n\times 1} = \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}_{n\times 1} \rightarrow \boxed{f_i = \int \frac{W_i}{W}\,dt\ , \quad i = 1, \dots, n}$$

$$W = \det\Phi(t) \neq 0, \quad W_i = (\bar{v}_1, \dots, \underset{\text{i-θέση}}{\bar{r}}, \dots, \bar{v}_n)$$

με $\Phi(t) = (\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n)$.

Η <u>γενική λύση του μη ομογενούς συστήματος</u> είναι:

$$\boxed{\bar{x}(t) = \Phi(t)\bar{c} + \Phi(t)\bar{f}(t)} \quad \bar{c} = (c_1, \dots, c_n)^T,\ c_i \in R$$

– Παράδειγμα 6

$$\dot{\bar{x}} = P\bar{x} + \bar{r}, \quad P = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad \bar{r}(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ t \end{pmatrix}, \quad \bar{x} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

1. Λύση ομογενούς

$$\left.\begin{array}{l} \text{χ.ε}: \ \lambda^2 - 1 = 0 \to \lambda_1 = -1, \ \lambda_2 = 1 \\ (P - \lambda I)\bar{\xi} = \bar{0} \to \bar{\xi}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \bar{\xi}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & e^t \\ 3e^{-t} & e^t \end{pmatrix}$$

2. Μερική λύση μη ομογενούς

$\bar{x}_p = \Phi \bar{f}(t)$ όπου $\Phi \dot{\bar{f}}(t) = \bar{r}(t)$: $\left(\bar{f} = (f_1, f_2)^T\right)$

$$\begin{pmatrix} e^{-t} & e^t \\ 3e^{-t} & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{f}_1 \\ \dot{f}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \\ t \end{pmatrix} \to f_i = \int \frac{W_i}{W} dt, \quad i = 1, 2$$

$$W = \det\Phi = -2, \quad W_1 = \det\begin{pmatrix} e^t & e^t \\ t & e^t \end{pmatrix} = e^{2t} - te^t, \quad W_2 = \det\begin{pmatrix} e^{-t} & e^t \\ 3e^{-t} & t \end{pmatrix} = te^{-t} - 3$$

Άρα:

$$\left.\begin{array}{l} f_1 = \frac{1}{2}\int (te^t - e^{2t})\,dt = \frac{t-1}{2}e^t - \frac{e^{2t}}{4} \\ f_2 = \frac{1}{2}\int (3 - te^{-t})\,dt = \frac{3}{2}t + \frac{t+1}{2}e^{-t} \end{array}\right\} \longrightarrow$$

3. Γενική λύση μη ομογενούς:

$$\bar{x} = \Phi\bar{c} + \Phi\bar{f} \longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \underbrace{c_1 e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + c_2 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{γενική λύση ομογενούς}} + \underbrace{\left(\frac{t-1}{2} - \frac{e^t}{4}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \left(\frac{3}{2}te^t + \frac{t+1}{2}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} \frac{6t-1}{4}e^t + t \\ \frac{6t-3}{4}e^t + 2t - 1 \end{pmatrix} \ \text{μερική λύση}}$$

– Ασκήσεις μη ομογενών συστημάτων ($n=2$)

$$\dot{\bar{x}} = P\bar{x} + \bar{r}(t), \quad \bar{x} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \bar{r} = \begin{pmatrix} \sin t \\ t \end{pmatrix}$$

$$\bar{x}_p = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}(8t + \cos t - 3\sin t) \\ -1 - 3t + \sin t \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{r} = \begin{pmatrix} 4t+1 \\ \frac{3t^2}{2} \end{pmatrix}$$

$$\bar{x}_p = \begin{pmatrix} t + t^2 \\ -\frac{t^2}{2} \end{pmatrix}$$

Ακολουθώντας τα βήματα του Παραδείγματος 6, βρείτε τη γενική λύση των δύο παραπάνω συστημάτων. Δίνεται η μερική λύση (για επαλήθευση των υπολογισμών σας) και :

$$\int x e^x dx = e^x(x-1), \quad \int x e^{-x} dx = -e^{-x}(x+1)$$

$$\int x^2 e^x dx = (x^2 - 2x + 2)e^x, \quad \int x^2 e^{-x} dx = -(x^2 + 2x + 2)e^{-x}$$

$$\int e^{ax} \sin bx \, dx = e^{ax} \frac{a\sin bx - b\cos bx}{a^2 + b^2}$$

$$\int e^{ax} \cos bx \, dx = e^{ax} \frac{a\cos bx + b\sin bx}{a^2 + b^2}$$