<u>ΣΕΙΡΕΣ LAURENT</u>

Έστω $\ldots, \alpha_{-2},\ \alpha_{-1},\ \alpha_0,\ \alpha_1,\ \alpha_2, \ldots$ μία ακολουθία μιγαδικών αριθμών και $z_0 \in \mathbb{C}$. Μία σειρά της μορφής

$$\boxed{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n (z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n} (z-z_0)^{-n}} \qquad (*)$$

ονομάζεται **σειρά Laurent** με κέντρο το z_0 (έχει προφανώς νόημα για $z \neq z_0$). Η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (z-z_0)^n$ καλείται **κανονικό μέρος** της σειράς $(*)$ ενώ η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n} (z-z_0)^{-n}$ καλείται **κύριο μέρος** της σειράς $(*)$.

<u>Ορισμός 1:</u> Η σειρά $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n (z-z_0)^n$ συγκλίνει αν οι σειρές $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (z-z_0)^n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n} (z-z_0)^{-n}$ συγκλίνουν (και επομένως τότε η τιμή της σειράς $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n (z-z_0)^n$ ισούται με το άθροισμα των τιμών των σειρών $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (z-z_0)^n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n} (z-z_0)^{-n}$). □

Επομένως αν για κάποιο $z \neq z_0$ έχουμε ότι η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (z-z_0)^n$ δεν συγκλίνει ή η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n} (z-z_0)^{-n}$ δεν συγκλίνει, τότε και η σειρά $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n (z-z_0)^n$ δεν συγκλίνει.

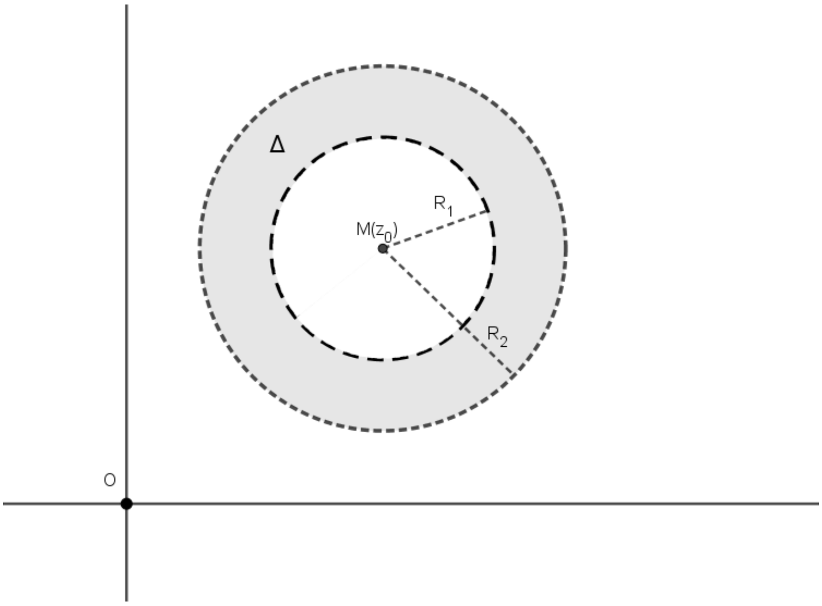
<u>Θεώρημα 2:</u> Έστω A ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{C}$, $z_0 \in \mathbb{C}$ και $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n (z-z_0)^n$ σειρά Laurent με κέντρο το z_0 η οποία συγκλίνει για κάθε $z \in A$. Τότε η $f(z)$ είναι ολόμορφη συνάρτηση στο A. □

Έστω τώρα $R_1, R_2 \in [0,+\infty) \cup \{+\infty\}$ με $R_1 < R_2$ (θεωρούμε ότι $\alpha < +\infty$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$) και $z_0 \in \mathbb{C}$. Τότε το σύνολο

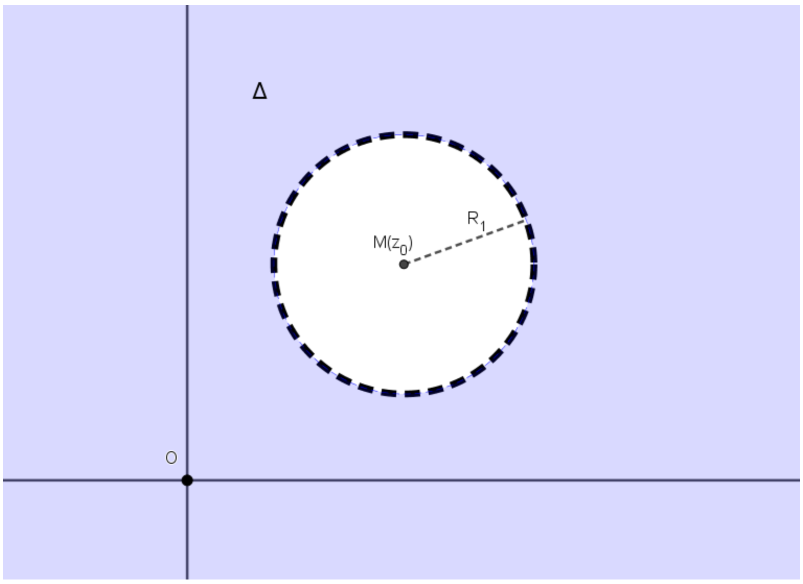
$$\Delta = \{ z \in \mathbb{C} \, / \, R_1 < |z - z_0| < R_2 \}$$

παριστάνει τον εξής (γενικευμένο) **δακτύλιο** με κέντρο το z_0:

- Αν $R_2 \neq +\infty$



- Αν $R_2 = +\infty$



Σε αυτήν την περίπτωση γράφουμε πιο απλά $\Delta = \{ z \in \mathbb{C} \, / \, R_1 < |z - z_0| \}$.

Θεώρημα 3: Έστω $z_0 \in \mathbb{C}$, $0 \le R_1 < R_2 \le +\infty$ και $f(z)$ συνάρτηση η οποία είναι ολόμορφη στο δακτύλιο $\Delta = \{z \in \mathbb{C} / R_1 < |z - z_0| < R_2\}$. Τότε στο δακτύλιο Δ η $f(z)$ αναπτύσσεται κατά <u>μοναδικό</u> τρόπο σε σειρά Laurent με κέντρο το z_0. □

Με τις προϋποθέσεις του προηγούμενου Θεωρήματος έχουμε ότι υπάρχουν <u>μοναδικοί</u> μιγαδικοί αριθμοί α_n, $n \in \mathbb{Z}$ τέτοιοι ώστε

$$\boxed{f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n (z - z_0)^n \text{ για κάθε } z \in \Delta} \qquad (1)$$

Παρατήρηση:

i) Το κανονικό μέρος $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (z - z_0)^n$ και το κύριο μέρος $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n} (z - z_0)^{-n}$ της σειράς (1) συγκλίνουν απόλυτα για κάθε $z \in \Delta$.

ii) Στη σειρά (1) <u>δεν</u> ισχύει γενικά ότι $\alpha_n = \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ για κανένα $n = 0, 1, 2, \ldots$ αφού η $f(z)$ <u>δεν</u> ορίζεται γενικά στο z_0. □

Παραδείγματα

1. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(z) = \dfrac{2z+1}{z^2 + z - 2}$. Να αναπτύξετε (επιλέγοντας όπου χρειάζεται κατάλληλο κέντρο) τη συνάρτηση $f(z)$ σε σειρά Laurent

i) στο δακτύλιο $\Delta_1 = \{z \in \mathbb{C} / 1 < |z| < 2\}$.

ii) στο δακτύλιο $\Delta_2 = \{z \in \mathbb{C} / 2 < |z|\}$.

iii) στο δακτύλιο $\Delta_3 = \{z \in \mathbb{C} / 0 < |z - 1| < 3\}$.

iv) στο δακτύλιο $\Delta_4 = \{z \in \mathbb{C} / 3 < |z - 1|\}$.

v) στους μεγαλύτερους δακτυλίους με κέντρο το $z_0 = 1$ που μπορεί αυτό να γίνει.

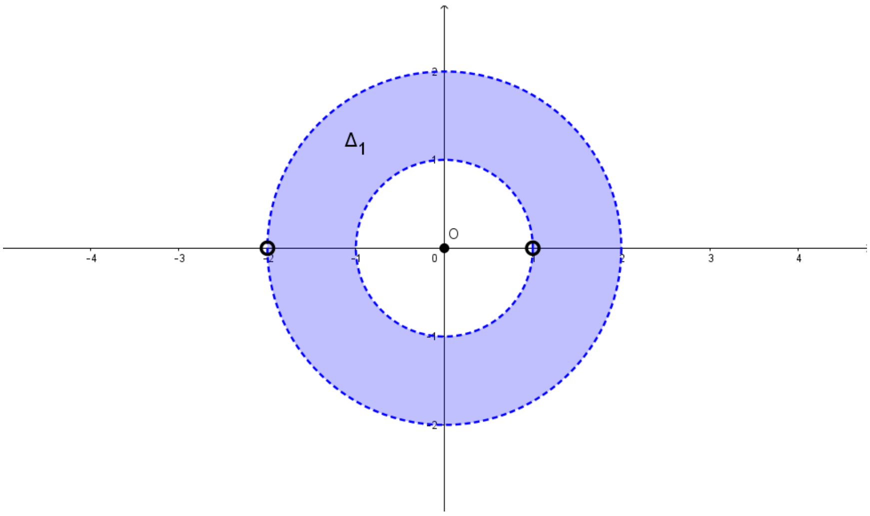
Λύση: Επειδή $z^2 + z - 2 = (z+2)(z-1)$, τότε έχουμε ότι

$$z^2 + z - 2 = 0 \Leftrightarrow z = -2 \text{ ή } z = 1$$

Άρα το πεδίο ορισμού της $f(z)$ είναι το σύνολο $A=\mathbb{C}-\{-1,\ 2\}$ το οποίο είναι προφανώς ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{C}$. Η $f(z)$ είναι ολόμορφη στο A ως ρητή συνάρτηση. Επίσης έχουμε

$$f(z)=\frac{2z+1}{z^2+z-2}=\frac{2z+1}{(z+2)(z-1)}=\ldots=\frac{1}{z+2}+\frac{1}{z-1}$$

i) Ο δακτύλιος Δ_1 είναι το χρωματισμένο μέρος στο παρακάτω σχήμα



από το οποίο διαπιστώνουμε αμέσως ότι $\Delta_1\subseteq A$ και επομένως η $f(z)$ είναι ολόμορφη στο Δ_1. Συνεπώς, σύμφωνα με το Θεώρημα 3, η $f(z)$ αναπτύσσεται στο δακτύλιο Δ_1 σε σειρά Laurent με κέντρο το $z_1=0$.

Έστω τώρα $z\in\Delta_1$. Αυτό σημαίνει ότι $1<|z|<2$.

- Έχουμε ότι $\dfrac{1}{z+2}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{1-\left(-\dfrac{z}{2}\right)}$.

  Επειδή

$$\left|-\frac{z}{2}\right|=\frac{|z|}{2}\underset{(|z|<2)}{<}1$$

  τότε έχουμε

$$\frac{1}{z+2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\left(-\dfrac{z}{2}\right)}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z}{2}\right)^n=\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}z^n$$

Η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}z^n$ είναι η σειρά Maclaurin της $\frac{1}{z+2}$.

- Έχουμε ότι $\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}$.

  Επειδή

$$\left|\frac{1}{z}\right|=\frac{1}{|z|}\underset{(1<|z|)}{<}1$$

  τότε έχουμε

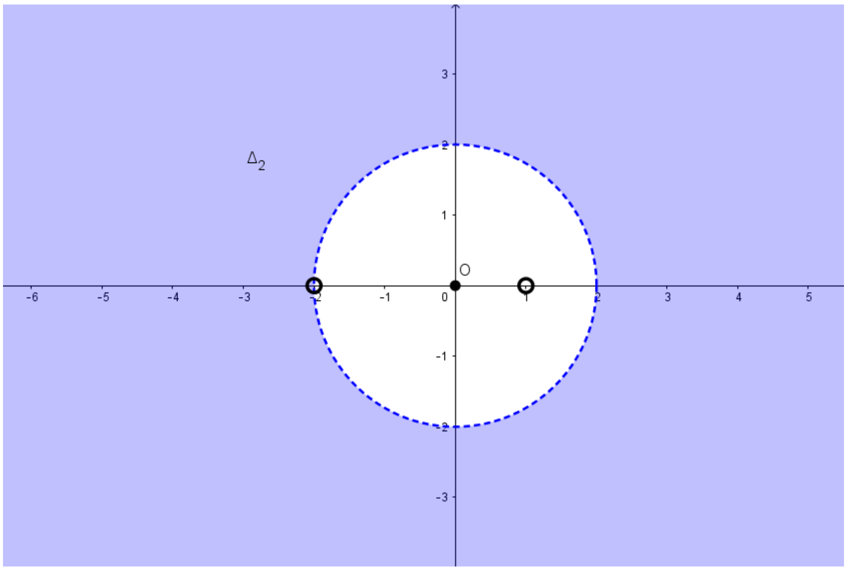
$$\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}\underset{(m=n+1)}{=}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{z^m}$$

Άρα για κάθε $z\in\Delta_1$ έχουμε

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}z^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}$$

(δηλ. η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}z^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}$ είναι η σειρά Laurent της $f(z)$ με κέντρο το $z_1=0$ στο δακτύλιο Δ_1).

ii) Ο δακτύλιος Δ_2 είναι το χρωματισμένο μέρος στο παρακάτω σχήμα



από το οποίο διαπιστώνουμε αμέσως ότι $\Delta_2 \subseteq A$ και επομένως η $f(z)$ είναι ολόμορφη στο Δ_2. Συνεπώς, σύμφωνα με το Θεώρημα 3, η $f(z)$ αναπτύσσεται στο δακτύλιο Δ_2 σε σειρά Laurent με κέντρο το $z_1 = 0$.

Έστω τώρα $z \in \Delta_2$. Αυτό σημαίνει ότι $2 < |z|$.

- Έχουμε ότι $\dfrac{1}{z+2} = \dfrac{1}{z} \cdot \dfrac{1}{1-\left(-\frac{2}{z}\right)}$.

  Επειδή

$$\left|-\frac{2}{z}\right| = \frac{2}{|z|} \underset{(2<|z|)}{<} 1$$

  τότε έχουμε

$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\left(-\frac{2}{z}\right)} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{2}{z}\right)^n = \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n}{z^{n+1}} \underset{(m=n+1)}{=} \sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-2)^{m-1}}{z^m}$$

- Έχουμε ότι $\dfrac{1}{z-1} = \dfrac{1}{z} \cdot \dfrac{1}{1-\frac{1}{z}}$.

  Επειδή

$$\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|} \underset{(2<|z|)}{<} \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \left|\frac{1}{z}\right| < 1$$

  τότε έχουμε

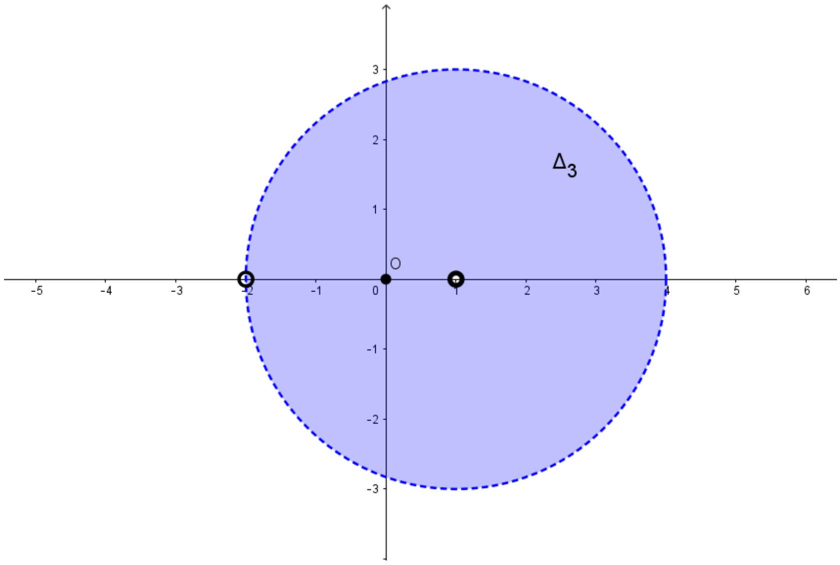
$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}} \underset{(m=n+1)}{=} \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{z^m}$$

Άρα για κάθε $z \in \Delta_2$ έχουμε

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^{n-1}}{z^n} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\left((-2)^{n-1}+1\right)\frac{1}{z^n}$$

(δηλ. η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left((-2)^{n-1}+1\right)\frac{1}{z^n}$ είναι η σειρά Laurent της $f(z)$ με κέντρο το $z_1 = 0$ στο δακτύλιο Δ_2 - δεν υπάρχει κανονικό μέρος).

iii) Ο δακτύλιος Δ_3 είναι το χρωματισμένο μέρος στο παρακάτω σχήμα



από το οποίο διαπιστώνουμε αμέσως ότι $\Delta_3 \subseteq A$ και επομένως η $f(z)$ είναι ολόμορφη στο Δ_3. Συνεπώς, σύμφωνα με το Θεώρημα 3, η $f(z)$ αναπτύσσεται στο δακτύλιο Δ_3 σε σειρά Laurent με κέντρο το $z_2 = 1$.

Έστω τώρα $z \in \Delta_3$. Αυτό σημαίνει ότι $0 < |z-1| < 3$.

Έχουμε ότι

$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{(z-1)+3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\left(-\frac{z-1}{3}\right)}$$

Επειδή

$$\left|-\frac{z-1}{3}\right| = \frac{|z-1|}{3} \underset{(|z-1|<3)}{<} 1$$

τότε έχουμε

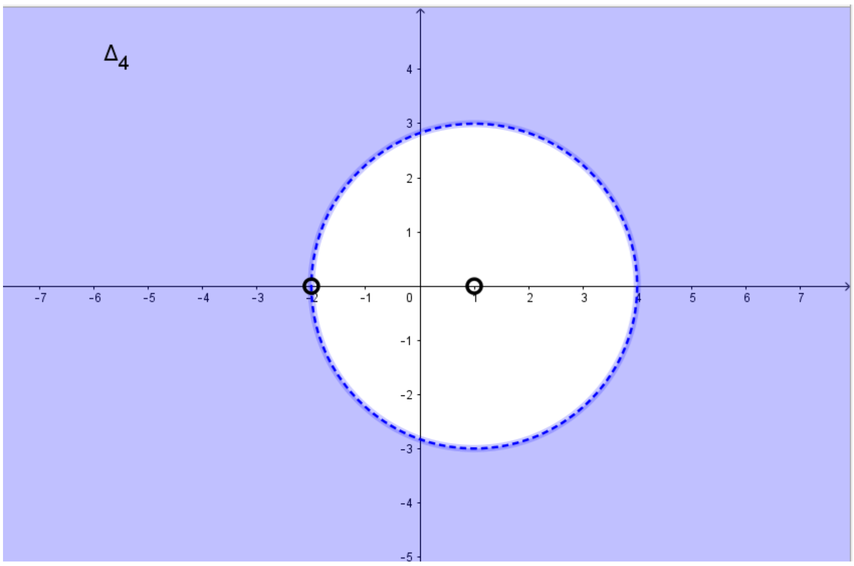
$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\left(-\frac{z-1}{3}\right)} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z-1}{3}\right)^n = \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}(z-1)^n$$

Άρα για κάθε $z \in \Delta_3$ έχουμε

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}(z-1)^n + \frac{1}{z-1}$$

(δηλ. η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}(z-1)^n+\frac{1}{z-1}$ είναι η σειρά Laurent της $f(z)$ με κέντρο το $z_2=1$ στο δακτύλιο Δ_3).

iv) Ο δακτύλιος Δ_4 είναι το χρωματισμένο μέρος στο παρακάτω σχήμα



από το οποίο διαπιστώνουμε αμέσως ότι $\Delta_4 \subseteq A$ και επομένως η $f(z)$ είναι ολόμορφη στο Δ_4. Συνεπώς, σύμφωνα με το Θεώρημα 3, η $f(z)$ αναπτύσσεται στο δακτύλιο Δ_4 σε σειρά Laurent με κέντρο το $z_2=1$.

Έστω τώρα $z\in\Delta_4$. Αυτό σημαίνει ότι $3<|z-1|$.

Έχουμε ότι

$$\frac{1}{z+2}=\frac{1}{(z-1)+3}=\frac{1}{z-1}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{3}{z-1}\right)}$$

Επειδή

$$\left|-\frac{3}{z-1}\right|=\frac{3}{|z-1|}\underset{(3<|z-1|)}{<}1$$

τότε έχουμε

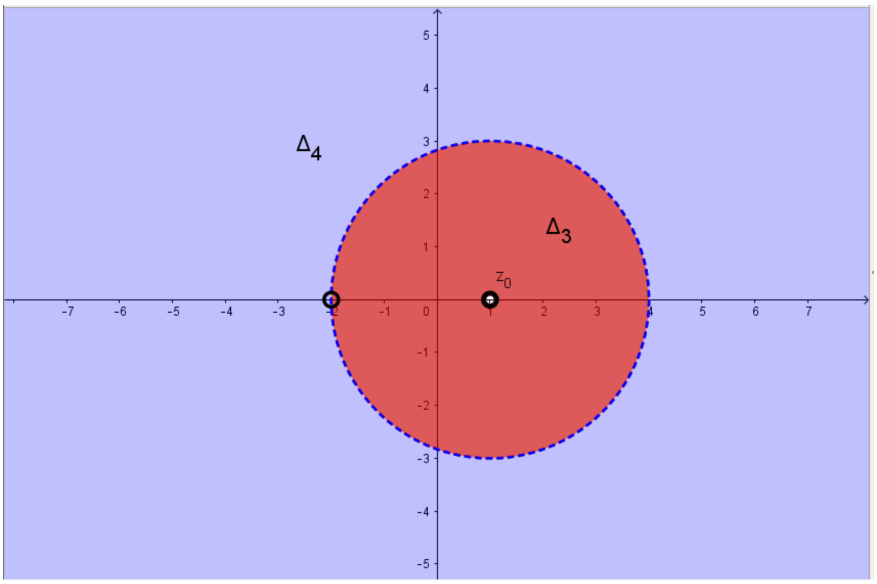
$$\frac{1}{z+2}=\frac{1}{z-1}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{3}{z-1}\right)}=\frac{1}{z-1}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{3}{z-1}\right)^{n}=\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-3)^{n}}{(z-1)^{n+1}}\underset{\left(\substack{m=n+1\Leftrightarrow\\ \Leftrightarrow n=m-1}\right)}{=}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-3)^{m-1}}{(z-1)^{m}}$$

Άρα για κάθε $z\in\Delta_4$ έχουμε

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^{n-1}}{(z-1)^{n}}+\frac{1}{z-1}=\ldots=\frac{2}{z-1}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-3)^{n-1}}{(z-1)^{n}}$$

(δηλ. η σειρά $\frac{2}{z-1}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-3)^{n-1}}{(z-1)^{n}}$ είναι η σειρά Laurent της $f(z)$ με κέντρο το $z_2=1$ στο δακτύλιο Δ_4 - δεν υπάρχει κανονικό μέρος).

v) Επειδή η $f(z)$ είναι ολόμορφη στο A, τότε είναι φανερό ότι για να βρούμε το ανάπτυγμα Laurent της $f(z)$ σε ένα δακτύλιο Δ πρέπει ισοδύναμα $\Delta\subseteq A$. Οι μεγαλύτεροι δακτύλιοι με κέντρο το $z_0=1$ που περιέχονται στο A, όπως φαίνεται και από το παρακάτω σχήμα

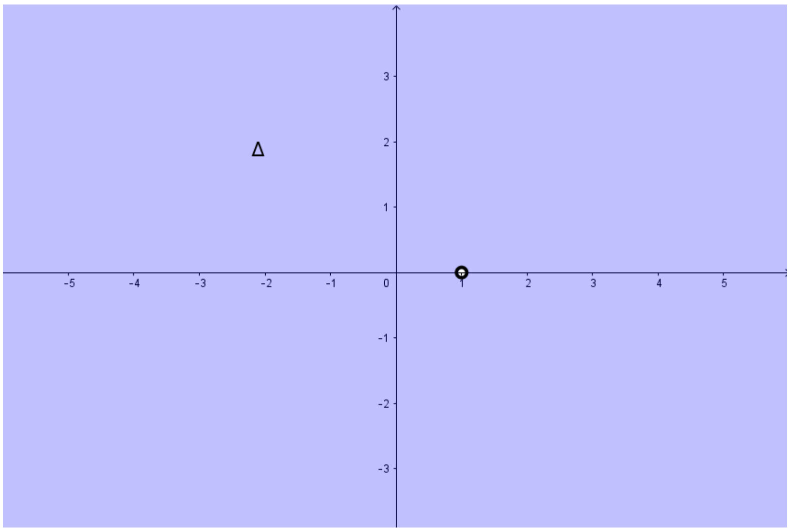


είναι οι Δ_3, Δ_4. Επομένως πρέπει να βρούμε τα αναπτύγματα Laurent της $f(z)$ στους δακτυλίους Δ_3 και Δ_4 τα οποία βρήκαμε στα ερωτήματα iii), iv).

Άσκηση: *Να απαντήσετε στο ίδιο ερώτημα για $z_0=0$. Σε ποιο δακτύλιο το ανάπτυγμα Laurent της $f(z)$ ταυτίζεται με ανάπτυγμα Maclaurin της $f(z)$;* □

2. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(z)=\dfrac{e^{3z}}{z^2-2z+1}$. Επιλέγοντας κατάλληλο κέντρο, να αναπτύξετε τη συνάρτηση $f(z)$ σε σειρά Laurent σε <u>όλο</u> το πεδίο ορισμού της.

<u>**Λύση:**</u> Επειδή $z^2-2z+1=(z-1)^2$, τότε έχουμε ότι το πεδίο ορισμού της $f(z)$ είναι το σύνολο $A=\mathbb{C}-\{1\}$ το οποίο είναι προφανώς ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{C}$. Η $f(z)$ είναι ολόμορφη στο Α ως πηλίκο ολόμορφων συναρτήσεων. Θεωρούμε το δακτύλιο $\Delta=\{z\in\mathbb{C}\,/\,0<|z-1|\}$ ο οποίος είναι το χρωματισμένο μέρος στο παρακάτω σχήμα



Από το παραπάνω σχήμα συμπεραίνουμε αμέσως ότι $A=\Delta$ και επομένως η $f(z)$ είναι ολόμορφη στο Δ. Συνεπώς, σύμφωνα με το Θεώρημα 3, η $f(z)$ αναπτύσσεται στο δακτύλιο Δ (δηλ. σε όλο το πεδίο ορισμού της Α) σε σειρά Laurent με κέντρο το $z_0=1$.

Έστω τώρα $z\in\Delta$. Παρατηρούμε ότι

$$e^{3z}=e^{3(z-1+1)}=e^3e^{3(z-1)}=e^3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(3(z-1))^n}{n!}=e^3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{n!}(z-1)^n$$

(είναι το ανάπτυγμα Taylor της e^{3z} στο 1).

Άρα

$$f(z)=\frac{e^{3z}}{z^2-2z+1}=\ldots=\frac{e^3}{(z-1)^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{n!}(z-1)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^ne^3}{n!}(z-1)^{n-2}=$$

$$=\frac{e^3}{(z-1)^2}+\frac{3e^3}{z-1}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{3^ne^3}{n!}(z-1)^{n-2}\underset{(m=n-2)}{=}\frac{e^3}{(z-1)^2}+\frac{3e^3}{z-1}+\sum_{m=0}^{\infty}\frac{3^{m+2}e^3}{(m+2)!}(z-1)^m$$

Συνεπώς για κάθε $z\in\Delta$ έχουμε

$$f(z)=\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^{n+2}e^{3}}{(n+2)!}(z-1)^{n}}_{\text{κανονικό μέρος}}+\underbrace{\frac{3e^{3}}{z-1}+\frac{e^{3}}{(z-1)^{2}}}_{\text{κύριο μέρος}}$$ □

<u>ΑΣΚΗΣΕΙΣ</u>

1. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(z)=\dfrac{2z^2-3z}{z^2-3z+2}$. Να αναπτύξετε (επιλέγοντας, όπου χρειάζεται, κατάλληλο κέντρο) τη συνάρτηση $f(z)$ σε σειρά Laurent

i) στο δακτύλιο $\Delta_1=\{z\in\mathbb{C}/1<|z|<2\}$

ii) στο δακτύλιο $\Delta_2=\{z\in\mathbb{C}/0<|z-1|<1\}$

iii)στο δακτύλιο $\Delta_3=\{z\in\mathbb{C}/0<|z-2|<1\}$

iv)στο δακτύλιο $\Delta_4=\{z\in\mathbb{C}/2<|z-3|\}$

v) στους μεγαλύτερους δακτυλίους με κέντρο το $z_0=1$ που μπορεί αυτό να γίνει.

2. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(z)=\dfrac{\sin z}{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^3}$. Επιλέγοντας κατάλληλο κέντρο, να αναπτύξετε τη συνάρτηση $f(z)$ σε σειρά Laurent σε <u>όλο</u> το πεδίο ορισμού της.

□