ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΕΙΣ ΜΙΓΑΔΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Έστω $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Τότε η μιγαδική εκθετική συνάρτηση, η οποία συμβολίζεται με e^z ή $\exp(z)$, ορίζεται από τη σχέση:

$$\boxed{e^z = e^x(\cos y + i\sin y)}$$

Από τον τύπο του Euler έχουμε ότι $e^{iy} = \cos y + i\sin y$. Άρα $e^z = e^x e^{iy}$. Επομένως

$$\boxed{e^{x+iy} = e^x e^{iy} \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}}$$

και συνεπώς $|e^z| = e^x$, $\arg(e^z) = y$ (δηλ. <u>ένα</u> όρισμα του e^z είναι το $y \in \mathbb{R}$).

Επίσης αν για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ θέσουμε $u(x, y) = e^x \cos y$ και $v(x, y) = e^x \sin y$, τότε έχουμε αμέσως ότι

$$e^z = u(x, y) + i\, v(x, y)$$

Παρατηρούμε τώρα ότι

- $u_x = e^x \cos y$ και $u_y = -e^x \sin y$. Άρα οι συναρτήσεις u_x, u_y είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}^2$ και επομένως η συνάρτηση u είναι C^1.
- $v_x = e^x \sin y$ και $v_y = e^x \cos y$. Άρα οι συναρτήσεις v_x, v_y είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}^2$ και επομένως η συνάρτηση v είναι C^1.
- $u_x = v_y$ και $u_y = -v_x$ (δηλ. ισχύουν οι συνθήκες Cauchy-Riemann).

Άρα η συνάρτηση e^z είναι ολόμορφη για κάθε $z \in \mathbb{C}$ (δηλ. είναι ακέραια) και μάλιστα για κάθε $z \in \mathbb{C}$ ισχύει:

$$(e^z)' = u_x + i\, v_x = e^x \cos y + i\, e^x \sin y = e^x(\cos y + i\sin y) = e^z$$

Επομένως

$$\boxed{(e^z)' = e^z \text{ για κάθε } z \in \mathbb{C}}$$

Θα αναφέρουμε τώρα κάποιες ιδιότητες της εκθετικής συνάρτησης:

- Έστω $z = x + yi \in \mathbb{C}$. Τότε $\left|e^{z}\right| = \left|e^{x}\right|\left|e^{iy}\right| = e^{x} \neq 0$. Άρα

$$\boxed{e^{z} \neq 0 \text{ για κάθε } z \in \mathbb{C}}$$

- Έστω $z \neq 0$ και θ όρισμα του z, τότε $e^{\ln|z|+i\theta} = e^{\ln|z|}e^{i\theta} = |z|e^{i\theta} = z$. Άρα για κάθε $z \in \mathbb{C}^{*}$ έχουμε

$$z = e^{\ln|z|+i\theta} \text{ για κάθε } \theta \text{ όρισμα του } z$$

- Έστω $z_1 = x_1 + y_1 i$, $z_2 = x_2 + y_2 i$ δύο μιγαδικοί αριθμοί. Τότε

$$e^{z_1}e^{z_2} = e^{x_1}\left(\cos y_1 + i\sin y_1\right)e^{x_2}\left(\cos y_2 + i\sin y_2\right) = e^{x_1+x_2}\left(\cos\left(y_1+y_2\right) + i\sin\left(y_1+y_2\right)\right) =$$
$$= e^{(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)} = e^{z_1+z_2}$$

Άρα

$$\boxed{e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2} \text{ για κάθε } z_1, z_2 \in \mathbb{C}}$$

Επομένως $e^{z_1}e^{z_2}\ldots e^{z_n} = e^{z_1+z_2+\ldots+z_n}$ για κάθε $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ ($n \in \mathbb{N}$).

- Όμοια δείχνουμε ότι

$$\boxed{\frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1-z_2} \text{ για κάθε } z_1, z_2 \in \mathbb{C}}$$

Επομένως

  - $\dfrac{1}{e^{z}} = e^{-z}$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$, και
  - $\left(e^{z}\right)^{n} = e^{nz}$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$ και για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.

- Έστω $z = x + yi \in \mathbb{C}$. Τότε

$$\overline{e^{z}} = \overline{e^{x}\left(\cos y + i\sin y\right)} = e^{x}\overline{\left(\cos y + i\sin y\right)} = e^{x}\left(\cos y - i\sin y\right) = e^{x}\left(\cos(-y) + i\sin(-y)\right) =$$
$$= e^{x-iy} = e^{\bar{z}}$$

Άρα

$$\overline{e^{z}} = e^{\bar{z}} \text{ για κάθε } z \in \mathbb{C}$$

Επομένως $\overline{e^{ix}} = e^{-ix}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- Έστω $z = x + yi \in \mathbb{C}$. Τότε

$$e^{z} = 1 \Leftrightarrow e^{x}e^{iy} = 1e^{0i} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} e^{x} = 1 \\ y - 0 = 2\kappa\pi,\ \kappa \in \mathbb{Z} \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} x = 0 \\ y = 2\kappa\pi,\ \kappa \in \mathbb{Z} \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow z = 2\kappa\pi i,\ \kappa \in \mathbb{Z}$$

Άρα για $z \in \mathbb{C}$ ισχύει

$$\boxed{e^z = 1 \Leftrightarrow z = 2\kappa\pi i\,,\ \kappa \in \mathbb{Z}}$$

- Έστω $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Τότε

$$e^{z_1} = e^{z_2} \Leftrightarrow \frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = 1 \Leftrightarrow e^{z_1 - z_2} = 1 \Leftrightarrow z_1 - z_2 = 2\kappa\pi i,\ \kappa \in \mathbb{Z}$$
$$\Leftrightarrow z_1 = z_2 + 2\kappa\pi i,\ \kappa \in \mathbb{Z}$$

Άρα για $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ ισχύει

$$\boxed{e^{z_1} = e^{z_2} \Leftrightarrow z_1 = z_2 + 2\kappa\pi i,\ \kappa \in \mathbb{Z}}$$

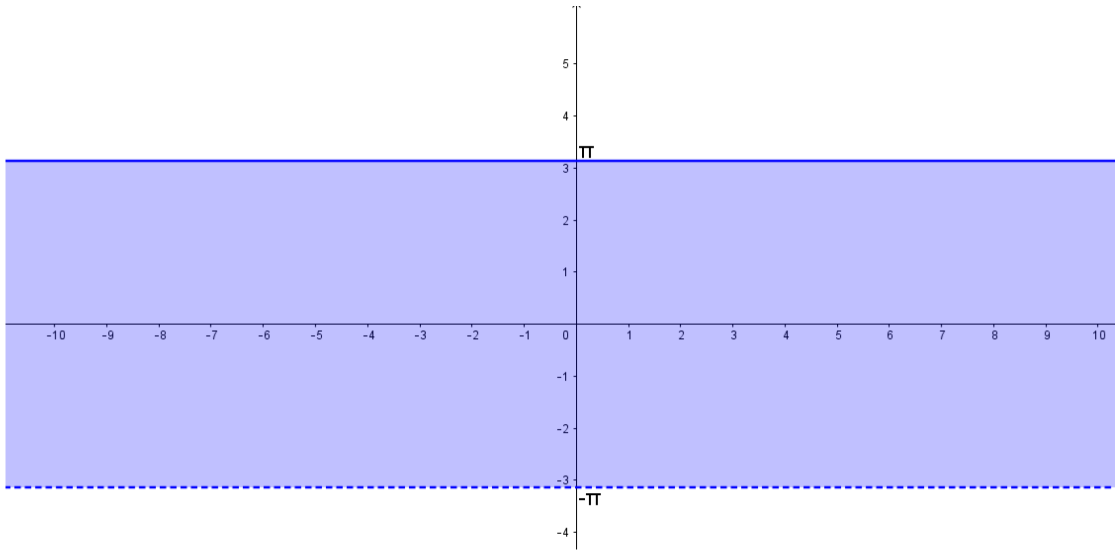
Αυτό σημαίνει ότι η εκθετική συνάρτηση είναι περιοδική με περίοδο $2\pi i$

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ

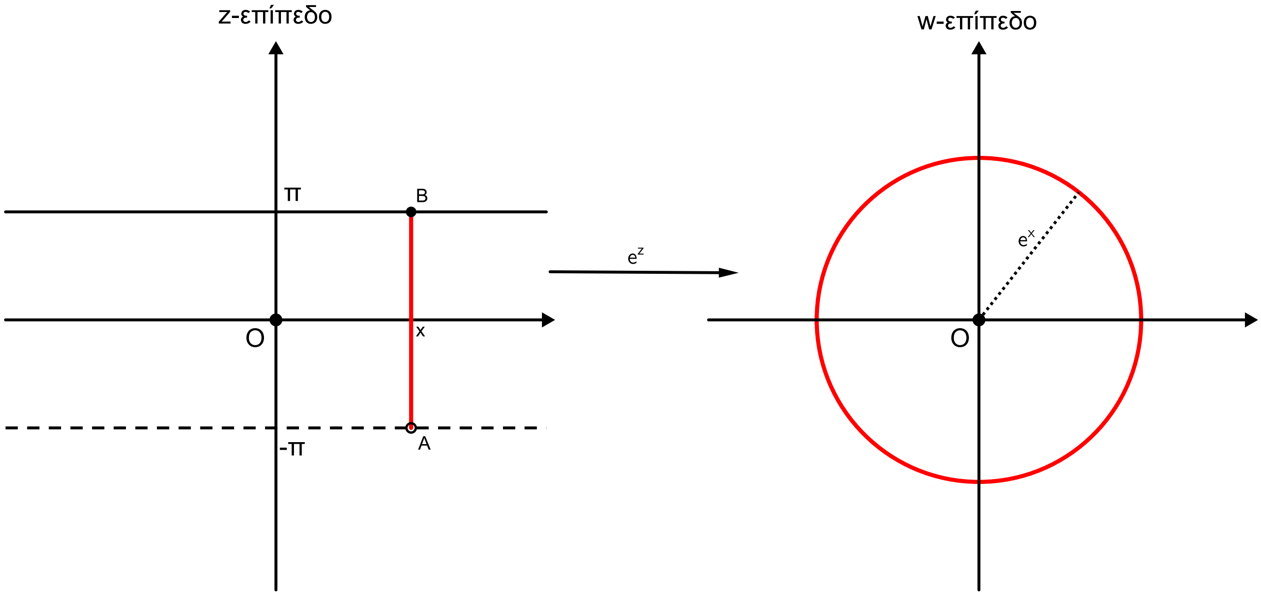
Δείξαμε πριν ότι η εκθετική συνάρτηση είναι περιοδική με περίοδο $2\pi i$. Επομένως για τη συμπεριφορά της αρκεί να τη μελετήσουμε σε μία άπειρη λωρίδα πλάτους 2π παράλληλη προς τον πραγματικό άξονα. Μία τέτοια λωρίδα είναι η

$$\mathbb{R} \times (-\pi, \pi] = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, y \in (-\pi, \pi] \right\}$$

η οποία καλείται **θεμελιώδης** λωρίδα:

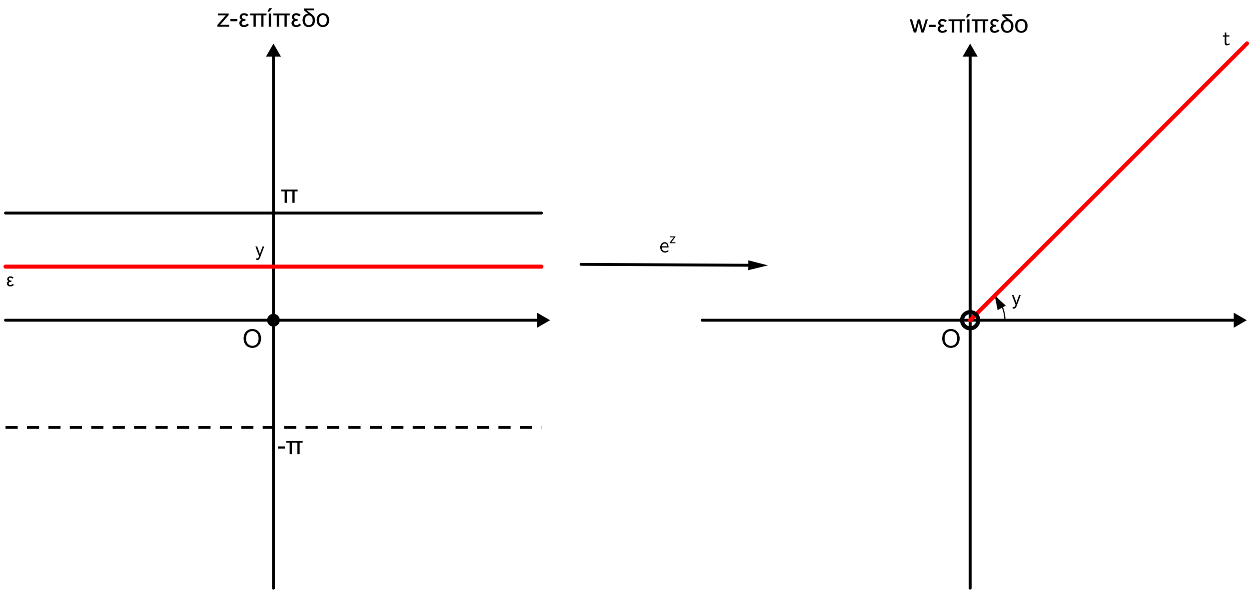


Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ το ευθύγραμμο τμήμα $z = x + iy$, $y \in (-\pi, \pi]$ της προηγούμενης λωρίδας απεικονίζεται, μέσω της εκθετικής συνάρτησης, στον κύκλο $w = e^x e^{iy}$ με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα e^x:



Καθώς το ευθύγραμμο τμήμα AB (το οποίο είναι κάθετο στον $x'x$ και τα άκρα του βρίσκονται πάνω στις ευθείες $y = \pi$ και $y = -\pi$) "σαρώνει" αριστερά - δεξιά όλη τη θεμελιώδη λωρίδα στο z-επίπεδο, οι αντίστοιχοι κύκλοι στο w-επίπεδο αυξομειώνουν τις ακτίνες τους "σαρώνοντας" όλο το $\mathbb{C}^*$ (δηλ. όλο το μιγαδικό επίπεδο εκτός της αρχής των αξόνων).

Επίσης για κάθε $y \in (-\pi, \pi]$ η ευθεία $z = x + iy$, $x \in \mathbb{R}$ της θεμελιώδους λωρίδας απεικονίζεται, μέσω της εκθετικής συνάρτησης, στην ημιευθεία $w = e^x e^{iy}$ η οποία έχει αρχή την αρχή των αξόνων (δεν περιλαμβάνεται στην ημιευθεία) και σχηματίζει με τον άξονα Ox γωνία y:



Καθώς η ευθεία (ε) (η οποία είναι κάθετη στον $y'y$) "σαρώνει" πάνω - κάτω όλη τη θεμελιώδη λωρίδα στο z-επίπεδο, οι αντίστοιχες ημιευθείες στο w-επίπεδο περιστρέφονται γύρω από την αρχή των αξόνων "σαρώνοντας" όλο το $\mathbb{C}^*$ (δηλ. όλο το μιγαδικό επίπεδο εκτός της αρχής των αξόνων).

Από τα παραπάνω είναι φανερό ότι η μιγαδική εκθετική συνάρτηση περιορισμένη στη θεμελιώδη λωρίδα είναι 1-1 και έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{C}^*$. Προφανώς τα ίδια ισχύουν και για οποιαδήποτε λωρίδα της μορφής $\mathbb{R}\times(\alpha,\alpha+2\pi]$, $\alpha\in\mathbb{R}$. Άρα η μιγαδική εκθετική συνάρτηση έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{C}^*$ και δεν είναι 1-1 στο $\mathbb{C}$ (εν αντιθέσει με την πραγματική μιγαδική συνάρτηση που είναι 1-1 στο $\mathbb{R}$).

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Ημίτονο - Συνημίτονο

Έστω $x\in\mathbb{R}$. Τότε από τον τύπο του Euler έχουμε $e^{ix}=\cos x+i\,\sin x$. Άρα $e^{-ix}=\cos x-i\,\sin x$. Τότε

- $e^{ix} - e^{-ix} = 2i \cdot \sin x \Leftrightarrow \boxed{\sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}}$

- $e^{ix} + e^{-ix} = 2\cos x \Leftrightarrow \boxed{\cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}}$

Επεκτείνοντας τα παραπάνω στο $\mathbb{C}$, ορίζουμε για κάθε $z \in \mathbb{C}$

$$\boxed{\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad \text{και} \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}}$$

Επειδή οι συναρτήσεις e^{iz} και e^{-iz} είναι ακέραιες (ως σύνθεση ακέραιων συναρτήσεων), τότε και οι συναρτήσεις $\sin z$ και $\cos z$ είναι ακέραιες (ως πράξεις ακέραιων συναρτήσεων). Μάλιστα ισχύουν:

➢ $\boxed{(\sin z)' = \cos z}$

$$(\sin z)' = \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)' = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)' = \frac{1}{2i}\left(\left(e^{iz}\right)' - \left(e^{-iz}\right)'\right) = \frac{1}{2i}\left(e^{iz}(iz)' - e^{-iz}(-iz)'\right) =$$
$$= \frac{1}{2i}\left(ie^{iz} + ie^{-iz}\right) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z$$

➢ $\boxed{(\cos z)' = -\sin z}$

(αποδεικνύεται με όμοιο τρόπο όπως αποδείξαμε τη σχέση $(\sin z)' = \cos z$).

Στηριζόμενοι στις ιδιότητες της συνάρτησης e^z και στον ορισμό των συναρτήσεων $\sin z$ και $\cos z$, μπορούμε εύκολα να αποδείξουμε τις ακόλουθες

<u>ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ</u>

o $\boxed{\sin(z + 2\kappa\pi) = \sin z,\ \cos(z + 2\kappa\pi) = \cos z \ \text{ για κάθε } z \in \mathbb{C} \text{ και } \kappa \in \mathbb{Z}}$

Επομένως οι συναρτήσεις $\sin z$ και $\cos z$ είναι περιοδικές με περίοδο 2π. Συνεπώς για τη συμπεριφορά τους αρκεί να τις μελετήσουμε στη λωρίδα $(-\pi, \pi] \times \mathbb{R}$ (ή και σε οποιαδήποτε άλλη λωρίδα πλάτους 2π η οποία είναι παράλληλη προς το φανταστικό άξονα).

o $\boxed{\sin(-z) = -\sin z,\ \cos(-z) = \cos z \ \text{ για κάθε } z \in \mathbb{C}}$

- $\boxed{\sin^2 z+\cos^2 z=1 \text{ για κάθε } z\in\mathbb{C}}$
- $\sin(z_1\pm z_2)=\sin z_1\cos z_2\pm\sin z_2\cos z_1$ για κάθε $z_1,z_2\in\mathbb{C}$.
- $\cos(z_1\pm z_2)=\cos z_1\cos z_2\mp\sin z_1\sin z_2$ για κάθε $z_1,z_2\in\mathbb{C}$.
- $\sin 2z=2\sin z\cos z$, $\cos 2z=\cos^2 z-\sin^2 z$.

Παράδειγμα

1. Για $z\in\mathbb{C}$ να δείξετε ότι

i) $\boxed{\sin z=0\Leftrightarrow z=\kappa\pi,\ \kappa\in\mathbb{Z}}$

ii) $\boxed{\cos z=0\Leftrightarrow z=\kappa\pi+\frac{\pi}{2},\ \kappa\in\mathbb{Z}}$

iii) $\boxed{\sin z=1\Leftrightarrow z=2\kappa\pi+\frac{\pi}{2},\ \kappa\in\mathbb{Z}}$

Λύση:

i)

$$\sin z=0\Leftrightarrow\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=0\Leftrightarrow e^{iz}=e^{-iz}\Leftrightarrow iz=-iz+2\kappa\pi i,\ \kappa\in\mathbb{Z}$$
$$\Leftrightarrow z=\kappa\pi,\ \kappa\in\mathbb{Z}$$

ii)

$$\cos z=0\Leftrightarrow\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}=0\Leftrightarrow e^{iz}=-e^{-iz}\Leftrightarrow e^{iz}=e^{i\pi}e^{-iz}\Leftrightarrow e^{iz}=e^{i\pi-iz}\Leftrightarrow iz=i\pi-iz+2\kappa\pi i,\ \kappa\in\mathbb{Z}$$
$$\Leftrightarrow z=\kappa\pi+\frac{\pi}{2},\ \kappa\in\mathbb{Z}$$

iii)

$$\sin z=1\Leftrightarrow\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=1\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow e^{2iz}-2ie^{iz}-1=0\Leftrightarrow\left(e^{iz}-i\right)^2=0\Leftrightarrow e^{iz}=i\Leftrightarrow e^{iz}=e^{i\frac{\pi}{2}}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow iz=i\frac{\pi}{2}+2\kappa\pi i,\ \kappa\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow z=\frac{\pi}{2}+2\kappa\pi,\ \kappa\in\mathbb{Z}$$

□

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να αποδείξετε τις 6 ιδιότητες των συναρτήσεων $\sin z$ και $\cos z$ που αναφέραμε παραπάνω.

2. Να λύσετε στο $\mathbb{C}$ την εξίσωση $\cos z = 1$.

3. Έστω $z = x + yi \in \mathbb{C}$. Να δείξετε ότι

i) $|\sin z| \geq \dfrac{|e^y - e^{-y}|}{2}$

ii) η συνάρτηση $\sin z$ <u>δεν</u> είναι φραγμένη στο $\mathbb{C}$

(ακριβώς τα ίδια αποτελέσματα ισχύουν και για τη συνάρτηση $\cos z$ - στην πραγματική περίπτωση οι συναρτήσεις $\sin x$ και $\cos x$ είναι ως γνωστόν φραγμένες) □

Εφαπτομένη - Συνεφαπτομένη

Ορίζουμε:

- $\boxed{\tan z = \dfrac{\sin z}{\cos z} \text{ για } z \neq \kappa\pi + \dfrac{\pi}{2},\ \kappa \in \mathbb{Z}}$
- $\boxed{\cot z = \dfrac{\cos z}{\sin z} \text{ για } z \neq \kappa\pi,\ \kappa \in \mathbb{Z}}$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

- $\boxed{\tan z \cdot \cot z = 1 \text{ για } z \neq \kappa\pi,\ \kappa\pi + \dfrac{\pi}{2},\ \kappa \in \mathbb{Z}}$
- $\boxed{(\tan z)' = \dfrac{1}{\cos^2 z} = 1 + \tan^2 z \text{ για } z \neq \kappa\pi + \dfrac{\pi}{2},\ \kappa \in \mathbb{Z}}$
- $\boxed{(\cot z)' = -\dfrac{1}{\sin^2 z} = -1 - \cot^2 z \text{ για } z \neq \kappa\pi,\ \kappa \in \mathbb{Z}}$
- $\boxed{\tan(z + \lambda\pi) = \tan z,\ \lambda \in \mathbb{Z}\ \left(z \neq \kappa\pi + \dfrac{\pi}{2},\ \kappa \in \mathbb{Z}\right)}$
- $\boxed{\cot(z + \lambda\pi) = \cot z,\ \lambda \in \mathbb{Z}\ (z \neq \kappa\pi,\ \kappa \in \mathbb{Z})}$

Επομένως οι συναρτήσεις $\tan z$ και $\cot z$ είναι περιοδικές με περίοδο π. Συνεπώς για τη συμπεριφορά της αρκεί να τις μελετήσουμε σε μία λωρίδα πλάτους π παράλληλη προς το φανταστικό άξονα η οποία βρίσκεται στο πεδίο ορισμού τους.

<u>Άσκηση:</u> Να αποδείξετε τις 4 ιδιότητες που αναφέραμε παραπάνω. □

<u>ΥΠΕΡΒΟΛΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ</u>

Το υπερβολικό ημίτονο και συνημίτονο ορίζονται παρόμοιο τρόπο με αυτόν στην πραγματική περίπτωση.

Έστω $z \in \mathbb{C}$. Τότε ορίζουμε:

$$\boxed{\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \text{ και } \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}}$$

<u>ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ</u>

- $\sinh(z + 2\kappa\pi i) = \sinh z$, $\cosh(z + 2\kappa\pi i) = \cosh z$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$ και $\kappa \in \mathbb{Z}$.

  Επομένως οι συναρτήσεις $\sinh z$ και $\cosh z$ είναι περιοδικές με περίοδο 2πi. Συνεπώς για τη συμπεριφορά τους αρκεί να τις μελετήσουμε στη λωρίδα $\mathbb{R} \times (-\pi, \pi]$ (ή και σε οποιαδήποτε άλλη λωρίδα πλάτους 2πi η οποία είναι παράλληλη προς τον πραγματικό άξονα).
- $(\sinh z)' = \cosh z$, $(\cosh z)' = \sinh z$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$
- $\sinh(iz) = i \cdot \sin z$, $\cosh(iz) = \cos z$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$

  Άρα $\sinh z = -i \cdot \sin(iz)$, $\cosh z = \cos(iz)$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$
- $\sinh(z_1 + z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 + \sinh z_2 \cosh z_1$ για κάθε $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$
- $\cosh(z_1 + z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 + \sinh z_1 \sinh z_2$ για κάθε $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$
- $\sinh(-z) = -\sinh z$, $\cosh(-z) = \cosh z$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$
- $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$
- Αν $z = x + yi \in \mathbb{C}$, τότε

  $$\sinh z = \sinh x \cos y + i \cdot \cosh x \sin y \text{ και } \cosh z = \cosh x \cos y + i \cdot \sinh x \sin y$$

Παράδειγμα

Για $z \in \mathbb{C}$ να δείξετε ότι

i) $\boxed{\sinh z = 0 \Leftrightarrow z = \kappa\pi i\,,\ \kappa \in \mathbb{Z}}$

ii) $\boxed{\cosh z = 0 \Leftrightarrow z = \left(\kappa + \frac{1}{2}\right)\pi i\,,\ \kappa \in \mathbb{Z}}$

iii) $\boxed{\cosh z = 1 \Leftrightarrow z = 2\kappa\pi i\,,\ \kappa \in \mathbb{Z}}$

Λύση:

i)

$$\sinh z = 0 \Leftrightarrow \frac{e^z - e^{-z}}{2} = 0 \Leftrightarrow e^z = e^{-z} \Leftrightarrow z = -z + 2\kappa\pi i,\ \kappa \in \mathbb{Z}$$
$$\Leftrightarrow z = \kappa\pi i,\ \kappa \in \mathbb{Z}$$

ii)

$$\cosh z = 0 \Leftrightarrow \frac{e^z + e^{-z}}{2} = 0 \Leftrightarrow e^z = -e^{-z} \Leftrightarrow e^z = e^{i\pi}e^{-z} \Leftrightarrow e^z = e^{i\pi - z} \Leftrightarrow z = i\pi - z + 2\kappa\pi i,\ \kappa \in \mathbb{Z}$$
$$\Leftrightarrow z = \left(\kappa + \frac{1}{2}\right)\pi i,\ \kappa \in \mathbb{Z}$$

iii)

$$\cosh z = 1 \Leftrightarrow \frac{e^z + e^{-z}}{2} = 1 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow e^{2z} - 2e^z + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(e^z - 1\right)^2 = 0 \Leftrightarrow e^z = 1 \Leftrightarrow z = 2\kappa\pi i,\ \kappa \in \mathbb{Z}$$

□

Επίσης με παρόμοιο τρόπο με αυτόν της πραγματικής περίπτωσης ορίζονται και οι συναρτήσεις υπερβολική εφαπτομένη:

- $\boxed{\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z} \text{ για } z \neq \left(\kappa + \frac{1}{2}\right)\pi i\,,\ \kappa \in \mathbb{Z}}$
- $\boxed{\coth z = \frac{\cosh z}{\sinh z} \text{ για } z \neq \kappa\pi i\,,\ \kappa \in \mathbb{Z}}$

<u>ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ</u>

- $(\tanh z)' = \frac{1}{\cosh^2 z} = 1 - \tanh^2 z$ για $z \neq \left(\kappa + \frac{1}{2}\right)\pi i\,,\ \kappa \in \mathbb{Z}$
- $(\coth z)' = -\frac{1}{\sinh^2 z} = 1 - \coth^2 z$ για $z \neq \kappa\pi i\,,\ \kappa \in \mathbb{Z}$

- o $\tanh(z+\lambda\pi i)=\tanh z$, $\lambda\in\mathbb{Z}$ ($z\neq\left(\kappa+\dfrac{1}{2}\right)\pi i$, $\kappa\in\mathbb{Z}$)
- o $\coth(z+\lambda\pi i)=\tanh z$, $\lambda\in\mathbb{Z}$ ($z\neq\kappa\pi i$, $\kappa\in\mathbb{Z}$)

  Επομένως οι συναρτήσεις $\tanh z$ και $\coth z$ είναι περιοδικές με περίοδο πi. Συνεπώς για τη συμπεριφορά τους αρκεί να τις μελετήσουμε σε μία λωρίδα πλάτους π η οποία είναι παράλληλη προς τον πραγματικό άξονα και περιέχεται στο πεδίο ορισμού τους.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να αποδείξετε τις 8 ιδιότητες των συναρτήσεων $\sinh z$ και $\cosh z$ που αναφέραμε παραπάνω.
2. Να λύσετε στο $\mathbb{C}$ την εξίσωση $\sinh z=1$.
3. Να δείξετε τις 4 ιδιότητες των συναρτήσεων $\tanh z$ και $\coth z$ που αναφέραμε παραπάνω. □

ΛΟΓΑΡΙΘΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Έστω $z\in\mathbb{C}$ με $z\neq 0$. Θα προσπαθήσουμε να λύσουμε την εξίσωση $e^w=z$ με άγνωστο το w:

$$\begin{aligned} e^w=z &\Leftrightarrow e^w=|z|e^{iArg(z)} \Leftrightarrow e^w=e^{\ln|z|}e^{iArg(z)} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow e^w=e^{\ln|z|+iArg(z)} \Leftrightarrow w=\ln|z|+iArg(z)+2\kappa\pi i,\ \kappa\in\mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow w=\ln|z|+i(Arg(z)+2\kappa\pi),\ \kappa\in\mathbb{Z} \end{aligned}$$

Το <u>σύνολο</u> των μιγαδικών αριθμών $\ln|z|+i(Arg(z)+2\kappa\pi)$, $\kappa\in\mathbb{Z}$ καλείται λογάριθμος του z και συμβολίζεται με $\log z$. Για κάθε $\kappa\in\mathbb{Z}$ ορίζεται ο κ-κλάδος του λογάριθμου:

$$\log_\kappa:\mathbb{C}-\{0\}\to\mathbb{C} \text{ με } \log_\kappa(z)=\ln|z|+i(Arg(z)+2\kappa\pi)$$

Ιδιαίτερα για $\kappa=0$ ορίζεται ο **κύριος κλάδος** ή **κύρια τιμή** του λογαρίθμου που συμβολίζεται με $Log(z)$:

$$\boxed{Log:\mathbb{C}-\{0\}\to\mathbb{C} \text{ με } Log(z)=\ln|z|+iArg(z)}$$

Παράδειγμα

Να υπολογιστούν οι λογάριθμοι $\mathrm{Log}(i)$, $\mathrm{Log}(-1)$

Λύση:

$$\mathrm{Log}(i) = \ln|i| + i\mathrm{Arg}(i) = 0 + \frac{\pi}{2}i = \frac{\pi}{2}i$$

$$\mathrm{Log}(-1) = \ln|-1| + i\mathrm{Arg}(-1) = 0 + \pi i = \pi i$$

Παρατηρούμε ότι ο μιγαδικός λογάριθμος ορίζεται και για αρνητικούς πραγματικούς αριθμούς σε αντίθεση με το λογάριθμο πραγματικών αριθμών. □

Στη συνέχεια θα αναφέρουμε κάποιες ιδιότητες της συνάρτησης $\mathrm{Log}(z)$.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

- $\log_\kappa(z) = \mathrm{Log}(z) + 2\kappa\pi i$ για κάθε $\kappa \in \mathbb{Z}$ και για κάθε $z \in \mathbb{C}^*$.
- Έστω $x \in \mathbb{R} - \{0\}$.

  α) Αν $x > 0$, τότε $\mathrm{Log}(x) = \ln x$.

  β) Αν $x < 0$, τότε $\mathrm{Log}(x) = \ln|x| + \pi i$.
- Η συνάρτηση $\mathrm{Log}(z)$ είναι 1-1:

  Έστω $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$. Τότε

$$\mathrm{Log}(z_1) = \mathrm{Log}(z_2) \Leftrightarrow \ln|z_1| + i\mathrm{Arg}(z_1) = \ln|z_2| + i\mathrm{Arg}(z_2) \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} \ln|z_1| = \ln|z_2| \\ \mathrm{Arg}(z_1) = \mathrm{Arg}(z_2) \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} |z_1| = |z_2| \\ \mathrm{Arg}(z_1) = \mathrm{Arg}(z_2) \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow z_1 = z_2$$

- Το σύνολο τιμών της συνάρτησης $\mathrm{Log}(z)$ είναι το υποσύνολο $\mathbb{R} \times (-\pi, \pi]$ του μιγαδικού επιπέδου.
- Το σύνολο στο οποίο η συνάρτηση $\mathrm{Log}(z)$ είναι συνεχής είναι το $\mathbb{C} - \{x \in \mathbb{R} / x \leq 0\}$.
- $(\mathrm{Log}(z))' = \dfrac{1}{z}$ για κάθε z στο σύνολο $\mathbb{C} - \{x \in \mathbb{R} / x \leq 0\}$.
- $\mathrm{Log}(1) = 0$.

- $\text{Log}\left(\frac{1}{z}\right) = -\text{Log}(z)$ για κάθε z στο σύνολο $\mathbb{C} - \{x \in \mathbb{R} / x \le 0\}$.
- $e^{\text{Log}(z)} = z$ για κάθε $z \in \mathbb{C}^*$.
- Για $z = x + iy$ ισχύει:

$$\text{Log}\left(e^z\right) = z \Leftrightarrow y \in (-\pi, \pi]$$

- Για $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$ ισχύει
  - $\text{Log}(z_1 z_2) = \text{Log}(z_1) + \text{Log}(z_2) \Leftrightarrow \text{Arg}(z_1 z_2) = \text{Arg}(z_1) + \text{Arg}(z_2) \Leftrightarrow$

    $\Leftrightarrow \text{Arg}(z_1) + \text{Arg}(z_2) \in (-\pi, \pi]$
  - $\text{Log}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \text{Log}(z_1) - \text{Log}(z_2) \Leftrightarrow \text{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \text{Arg}(z_1) - \text{Arg}(z_2) \Leftrightarrow$

    $\Leftrightarrow \text{Arg}(z_1) - \text{Arg}(z_2) \in (-\pi, \pi]$

Μιγαδική δύναμη

Με τη βοήθεια του μιγαδικού λογαρίθμου μπορούμε να ορίσουμε τη δύναμη μιγαδικού αριθμού. Έχουμε και εδώ κλάδους της μιγαδικής δύναμης. Θα ορίσουμε μόνο τον κύριο κλάδο της.

Έστω $z \in \mathbb{C}^*$ και $\lambda \in \mathbb{C}$. Τότε ο **κύριος κλάδος** της μιγαδικής δύναμης ορίζεται ως εξής:

$$\boxed{z^\lambda = e^{\lambda \text{Log}(z)}}$$

(δηλ. $z^\lambda = e^{\lambda(\ln|z| + i\text{Arg}(z))}$). Π.χ. ο κύριος κλάδος της δύναμης i^i είναι

$$i^i = e^{i\text{Log}(i)} = e^{i(\ln|i| + i\text{Arg}(i))} = e^{i\left(0 + \frac{\pi}{2}i\right)} = e^{-\frac{\pi}{2}}$$

(παρατηρήστε ότι $i^i \in \mathbb{R}$).

ΣΧΟΛΙΟ: Ο ορισμός του κύριου κλάδου της μιγαδικής δύναμης που δόθηκε παραπάνω εφαρμόζεται κυρίως για $\lambda \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}$ αφού για $\lambda \in \mathbb{Z}$ ο κύριος κλάδος της μιγαδικής δύναμης συμπίπτει με το συνηθισμένο ορισμό της δύναμης μιγαδικού αριθμού (απόδειξη; - μάλιστα αν $\lambda \in \{1, 2, 3, \ldots\}$ τότε η μιγαδική δύναμη ορίζεται ως γνωστόν σε όλο το $\mathbb{C}$). □

Θα αναφέρουμε τώρα κάποιες πολύ χρήσιμες ιδιότητες του κύριου κλάδου της μιγαδικής δύναμης.

<u>ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ</u>

- $z^0 = 1$ για κάθε $z \in \mathbb{C} - \{0\}$
- $z^\lambda z^\mu = z^{\lambda+\mu}$ για κάθε $z \in \mathbb{C}^*$ και για κάθε $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$
- $\dfrac{z^\lambda}{z^\mu} = z^{\lambda-\mu}$ για κάθε $z \in \mathbb{C}^*$ και για κάθε $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$
- $\dfrac{1}{z^\mu} = z^{-\mu}$ για κάθε $z \in \mathbb{C}^*$ και για κάθε $\mu \in \mathbb{C}$
- $\left(z^\lambda\right)' = \lambda z^{\lambda-1}$ για κάθε z στο σύνολο $\mathbb{C} - \{x \in \mathbb{R} / x \leq 0\}$ και για κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$.

<u>Άσκηση:</u> Να αποδείξετε τις πέντε τελευταίες ιδιότητες της συνάρτησης $\mathrm{Log}(z)$ και τις πέντε ιδιότητες του κύριου κλάδου της μιγαδικής δύναμης που αναφέραμε παραπάνω. □