Σημεία δίνης μη γραμμικού συστήματος: Κέντρα ή Ασθενείς Εστίες – Θεώρημα Ευστάθειας Lyapunov

Αν για κάποιο σημείο ισορροπίας $\bar{x}^0$ ενός μη γραμμικού συστήματος, οι ιδιοτιμές της Ιακωβιανής (γραμμικοποιημένο σύστημα) είναι φανταστικές, τότε, ενώ για ένα γραμμικό σύστημα, το σημείο αυτό είναι πάντοτε κέντρο (center), με ελλειπτικές τροχιές φάσης γύρω από αυτό, για το μη γραμμικό σύστημα όπου ισχύει η συνθήκη γραμμικοποίησης (το σύστημα γραμμικοποιείται τοπικά γύρω από το κρίσιμο αυτό σημείο), το σημείο αυτό είναι:

- κέντρο (center), με κλειστές τροχιές γύρω από αυτό, που τείνουν σε ελλείψεις όταν οι (Α.Σ.) $\bar{x}_0$ τείνουν στο $\bar{x}^0$, ή
- ασθενής εστία (weak focus), με σπειροειδείς τροχιές, πιό ανοιχτές κοντά στο $\bar{x}^0$ (λόγω επικράτησης των γραμμικών όρων) και πιό πυκνές όσο απομακρυνόμαστε από αυτό (οι μη γραμμικοί όροι δεν είναι πλέον αμελητέοι και επηρεάζουν τις λύσεις). Η εστία αυτή χαρακτηρίζεται μη γραμμικά ευσταθής (nonlinearly stable) αν $\bar{x}(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} \bar{x}^0$ ή μη γραμμικά ασταθής (nonlinearly unstable) αν $\bar{x}(t) \xrightarrow[t\to-\infty]{} \bar{x}^0$.

Το κρίσιμο σημείο $\bar{x}^0$ ονομάζεται σημείο δίνης (vortex point).

- Μέθοδος πολικών συντεταγμένων

Μία συνήθης μέθοδος εντοπισμού του αν ένα σημείο δίνης είναι κέντρο ή ασθενής εστία, είναι η χρήση πολικών συντεταγμένων με αρχή το σημείο $\bar{x}^0$. Μέσω αυτών υπολογίζουμε τη χρονική παράγωγο της πολικής ακτίνας ρ, $\dot{\rho}=d\rho/dt$, και η διατήρηση ή όχι του προσήμου της, καθορίζει το είδος της δίνης. Πιο συγκεκριμένα, καθώς μεταβάλλεται το t,

- αν το πρόσημο της $\dot{\rho}$ παραμένει σταθερό, η τροχιά απομακρύνεται ($\dot{\rho}>0$) ή πλησιάζει ($\dot{\rho}<0$) στο $\bar{x}^0$, άρα το $\bar{x}^0$ είναι ασθενής εστία, μη γραμμικά ασταθής ή ευσταθής, αντίστοιχα
- αν το πρόσημο της $\dot{\rho}$ αλλάζει, δηλαδή το ρ αυξομειώνεται, η τροχιά είναι κλειστή, άρα το $\bar{x}^0$ είναι κέντρο.

Ο πιο απλός τρόπος προσδιορισμού της μεταβολής του προσήμου, αφορά στην περίπτωση που η $\dot{\rho}$ μπορεί να γραφεί ως $\dot{\rho}=F(\rho)G(\theta)$, όπου $F(\rho)$ έχει σταθερό πρόσημο, συνεπώς η $\dot{\rho}$ εξαρτάται μόνο από το θ. Έτσι, με δοκιμή τιμών του θ ή μέσω γραφικής παράστασης, η μεταβολή ή όχι του προσήμου της $G(\theta)$ οδηγεί στον προσδιορισμό του είδους του σημείου δίνης $\bar{x}^0$.

- Παράδειγμα 1

$$\left\{\begin{array}{l} \dot{x} = -x+2xy \\ \dot{y} = y - x^2 - y^2 \end{array}\right. \begin{array}{l} = p(x,y) \\ = q(x,y) \end{array} \quad p = q = 0 \rightarrow$$

Σημεία ισορροπίας:

$A(0,0)$, $B(0,1)$, $\Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\Delta\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

Οι p, q αναλυτικές $\rightarrow \ldots$ γραμμικοποιημένο σύστημα:

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \end{pmatrix} = J_0 \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} \xi = x - x^0 \\ \eta = y - y^0 \end{array} \qquad J_0 = \begin{pmatrix} -1+2y & 2x \\ -2x & 1-2y \end{pmatrix}_{(x^0, y^0)}$$

Γιά το σημείο $\Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ έχουμε

$$J_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \underbrace{\lambda_{1,2} =}\ \pm i \rightarrow \text{το } \Gamma \text{ είναι } \underline{\text{σημείο δίνης}}.$$

Μεταφέρουμε το σύστημα στο σημείο Γ, θέτοντας

$$\left.\begin{array}{l} \xi = x - \frac{1}{2} \\ \eta = y - \frac{1}{2} \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x = \xi + \frac{1}{2} \\ y = \eta + \frac{1}{2} \end{array}$$

και αντικαθιστώντας στο σύστημα, παίρνουμε

$$\left.\begin{array}{l} \dot{\xi} = -\xi - \frac{1}{2} + 2\left(\xi + \frac{1}{2}\right)\left(\eta + \frac{1}{2}\right) \\ \dot{\eta} = \eta + \frac{1}{2} - \left(\xi + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\eta + \frac{1}{2}\right)^2 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \dot{\xi} = \eta + 2\xi\eta \\ \dot{\eta} = -\xi - \xi^2 - \eta^2 \end{array}$$

Εισάγοντας τώρα πολικές συντεταγμένες (ρ, θ) στο (ξ, η), δηλαδή

$$\xi = \rho\cos\theta, \quad \eta = \rho\sin\theta$$

και παραγωγίζοντας τη σχέση $\rho^2 = \xi^2 + \eta^2$ ως προς t, έχουμε

$$\rho\dot{\rho} = \xi\dot{\xi} + \eta\dot{\eta}$$

Τέλος, απαλείφοντας στην τελευταία τις παραγώγους των ξ και η ως προς t, μέσω του συστήματος με αρχή το Γ, προκύπτει

$$\rho\dot{\rho} = (\xi^2-\eta^2)\eta$$

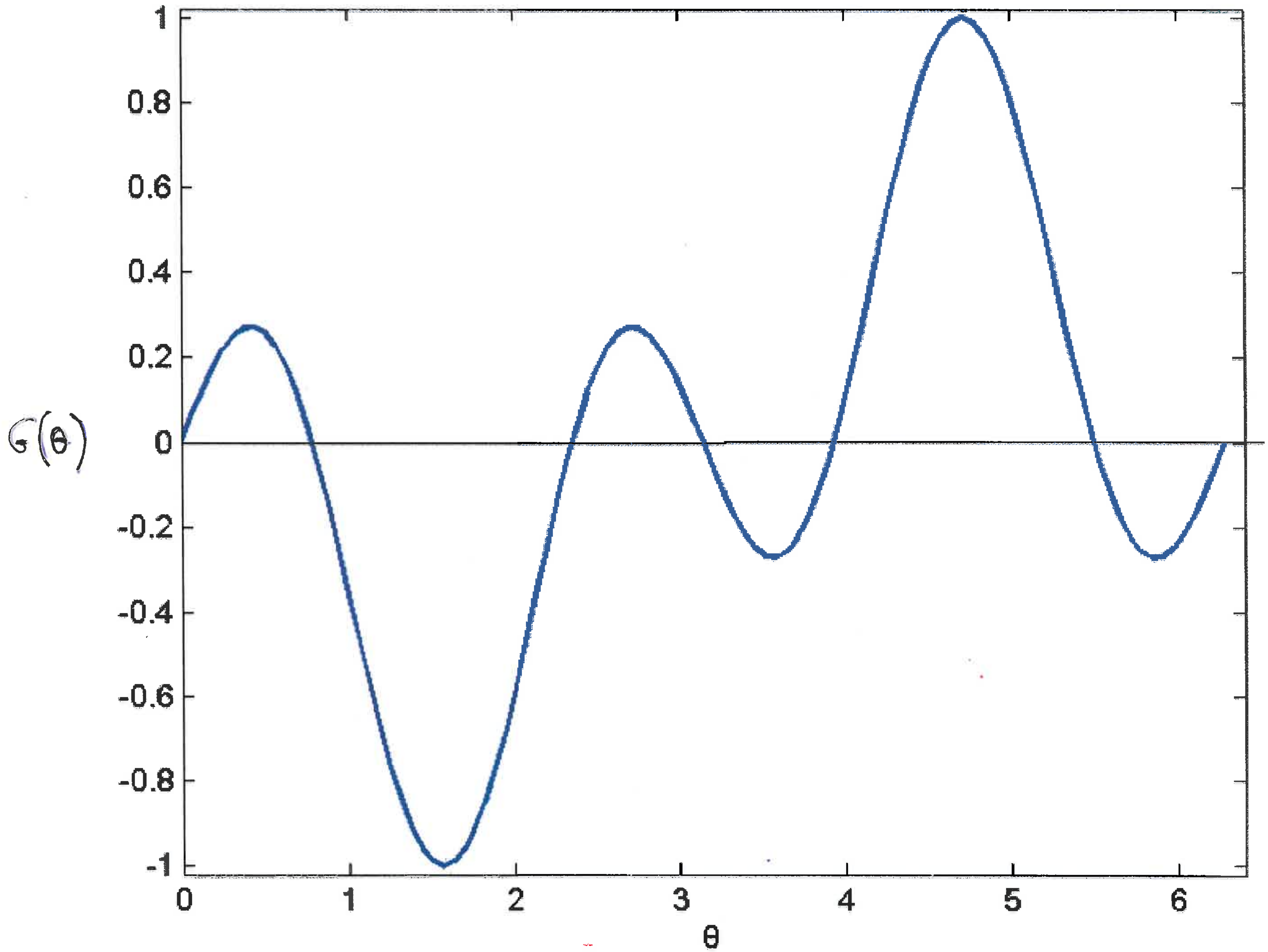
ή σε πολικές συντεταγμένες

$$\rho\dot{\rho} = \rho^3\cos 2\theta \sin\theta \longrightarrow \dot{\rho} = \rho^2\cos 2\theta \sin\theta .$$

Επομένως, το πρόσημο της $\dot{\rho}$ είναι το πρόσημο της $G(\theta) = \cos 2\theta \sin\theta$. Η $G(\theta)$ προφανώς αλλάζει πρόσημο καθώς το θ μεταβάλλεται με το χρόνο, αλλά μπορούμε να το διαπιστώσουμε είτε με δοκιμή τιμών, π.χ

$$G\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 \ , \qquad G\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 1$$

είτε μέσω της γραφικής παράστασης της G συναρτήσει του θ (δες παρακάτω), $\theta \in [0, 2\pi]$. Έτσι, προκύπτει ότι το κρίσιμο σημείο Γ είναι <u>κέντρο</u>.



nlv5

– Παράδειγμα 2

$$\left\{\begin{array}{l}\dot{x} = -(2+y)(x+y) \\ \dot{y} = -y(1-x)\end{array}\right\} \begin{array}{l} = p(x,y) \\ = q(x,y)\end{array} \Bigg\} \quad p = q = 0 \rightarrow$$

Σημεία ισορροπίας:

$A(1,-2)$, $B(0,0)$, $\Gamma(1,-1)$

Οι p, q αναλυτικές $\rightarrow \ldots$ γραμμικοποιημένο σύστημα:

$$\begin{pmatrix}\dot{\xi}\\ \dot{\eta}\end{pmatrix} = J_0 \begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l}\xi = x - x^0 \\ \eta = y - y^0\end{array}, \quad J_0 = \begin{pmatrix}-2-y & -2-x-2y \\ y & -1+x\end{pmatrix}_{(x^0,y^0)}$$

Γιά το σημείο $A(1,-2)$ έχουμε

$$J_0 = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -2 & 0\end{pmatrix} \rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{2} \rightarrow \text{το } A \text{ είναι } \underline{\text{σημείο δίνης}}.$$

Όπως στο Παράδειγμα 1, θέτοντας

$$\left.\begin{array}{l}\xi = x-1\\ \eta = y+2\end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x = \xi + 1 \\ y = \eta - 2\end{array}$$

και αντικαθιστώντας στο σύστημα, παίρνουμε

$$\dot{\xi} = \eta - \xi\eta - \eta^2$$

$$\dot{\eta} = -2\xi + \xi\eta$$

Έτσι, με χρήση πολικών συντεταγμένων, το παραπάνω σύστημα δίνει

$$\rho\dot{\rho} = \xi\dot{\xi} + \eta\dot{\eta} = -\xi\eta(\xi+1) = -\rho^2 \sin\theta\cos\theta(\rho\cos\theta + 1)$$

ή

$$\dot{\rho} = -\sin\theta\cos^2\theta\,\rho^2 - \sin\theta\cos\theta\,\rho$$

Το δεξί μέλος της εξίσωσης που προέκυψε γιά την $d\rho/dt$ δεν είναι της μορφής $F(\rho)\,G(\theta)$, όπως στο Παράδειγμα 1. Ένας τρόπος μελέτης του προσήμου του, είναι να το θεωρήσουμε ως δευτεροβάθμια μορφή του ρ, έστω $R(\rho)$

$$R(\rho) = -\sin\theta\cos^2\theta\,\rho^2 - \sin\theta\cos\theta\,\rho$$

Καθώς η διακρίνουσα της R, $\Delta = \sin^2\theta\cos^2\theta$ είναι θετική, η $R(\rho)$ έχει δύο πραγματικές διακριτές ρίζες

$$\rho_1 = 0\,, \quad \rho_2 = -\frac{1}{\cos\theta}\,, \qquad \theta \neq 0, \pi, \pm\frac{\pi}{2}$$

Συνεπώς έχουμε:

$\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$: Τότε $\rho_2 < 0$, άρα, καθώς $\rho > 0$, η $R(\rho)$ είναι ετερόσημη με το $\sin\theta$ και άρα η $\dot{\rho}$ αλλάζει πρόσημο καθώς το θ μεταβάλλεται στο διάστημα αυτό.

$\theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$: Τότε $\rho_2 > 0$, συνεπώς, αν $0 < \rho < \rho_2$, η $R(\rho)$ είναι ομόσημη με το $\sin\theta$, ενώ αν $\rho > \rho_2$, η $R(\rho)$ είναι ετερόσημη με το $\sin\theta$. Και στις δύο περιπτώσεις η $\dot{\rho}$ αλλάζει πρόσημο το θ διατρέχει το συγκεκριμένο διάστημα.

Επομένως, το κρίσιμο σημείο A είναι <u>κέντρο</u>

<u>Άσκηση 1</u>

Να χαρακτηρισούν τα κρίσιμα σημεία των παρακάτω συστημάτων, δικαιολογώντας την απάντησή σας

$$\begin{cases} \dot{x} = x - xy \\ \dot{y} = y + 2xy \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x} = 9 - y^2 \\ \dot{y} = (1-x)(x+y) \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x} = y e^{y} \\ \dot{y} = 1 - x^2 \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x} = x - 2y - x^2 \\ \dot{y} = (1+y)(1-x) \end{cases}$$

– Ένα Θεώρημα για την ύπαρξη κέντρου

Το Θεώρημα αφορά την εξίσωση Liénard:

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0, \qquad x = x(t) \qquad (L_\varepsilon)$$

δηλαδή το ισοδύναμο σύστημα (θέτοντας $u = \dot{x}$)

$$\left\{\begin{aligned} \dot{x} &= u \\ \dot{u} &= -f(x)u - g(x) \end{aligned}\right\} \qquad (L_\sigma)$$

Το (L_σ) έχει προφανώς ως κρίσιμα σημεία τα $(x^0, 0)$, όπου x^0 είναι οι ρίζες της $g(x)$. Το Θεώρημα διατυπώνεται ως εξής:

Θεώρημα Liénard για την ύπαρξη κέντρου. Για την εξίσωση (L_ε), αν:

α) Οι $f(x)$ και $g(x)$ έχουν συνεχείς παραγώγους.

β) Οι f και g είναι περιττές συναρτήσεις και γιά $x>0$, η $g(x)>0$ και η $f(x)$ έχει σταθερό πρόσημο.

γ) Είναι $g(x) > a f(x) F(x)$ για $x>0$, $a>1$, όπου $F(x) = \int_0^x f(\xi)d\xi$.

Τότε, το (μοναδικό) κρίσιμο του (L_σ), $(0,0)$, είναι κέντρο.

– Παράδειγμα 3 Γιά την εξίσωση $\ddot{x} + x\dot{x} + x^3 = 0$, οι $f(x) = x$ και $g(x) = x^3$ προφανώς πληρούν τα α) και β) του Θεωρήματος και γιά το γ) έχουμε

$$g(x) - a f(x) F(x) = x^3 - a x \frac{x^2}{2} = \frac{x^3}{2}(2-a)$$

Επομένως η γ) ικανοποιείται για $1 < a < 2$. Έτσι στο a-διάστημα $(1,2)$, το $(0,0)$ είναι κέντρο.

Θεώρημα Ευστάθειας Lyapunov

Έστω το σύστημα

$$\bar{\dot{x}} = \bar{f}(\bar{x}), \quad \bar{x} = (x_1, \dots, x_n)^T, \quad x_i = x_i(t), \quad i = 1, \dots, n$$
$$\bar{f} = (f_1, \dots, f_n) : R^n \to R^n, \quad f_i : R^n \to R, \quad i = 1, \dots, n \qquad (5)$$

με $\bar{f}$ συνεχή συνάρτηση του $\bar{x}$ στο R^n. Έστω ένα κρίσιμο σημείο $\bar{x}^0$ του (5). Η μέθοδος Lyapunov προσδιορίζει την ευστάθεια του $\bar{x}^0$ με ένα διαφορετικό τρόπο από αυτόν της γραμμικοποίησης του συστήματος. Ιδιαίτερα δε στην περίπτωση φανταστικών ιδιοτιμών της Ιακωβιανής, η μέθοδος αυτή πλεονεκτεί, καθώς η χρήση πολικών συντεταγμένων στο αρχικό σύστημα έχει εγγενείς δυσκολίες που πολλές φορές καθιστούν αδύνατο το χαρακτηρισμό και τον προσδιορισμό της ευστάθειας του αντίστοιχου κρίσιμου σημείου.

Η μέθοδος στηρίζεται στο πρόσημο της τροχιακής παραγώγου ως προς το σύστημα, μιας κατάλληλα εκλεγμένης συνάρτησης. Πιο συγκεκριμένα, μία συνάρτηση $U(\bar{x})$, ορισμένη σε μία περιοχή A ($\subset R^n$), όπου το $\bar{x}^0$ είναι το μοναδικό κρίσιμο σημείο, ονομάζεται συνάρτηση Lyapunov, αν ισχύουν:

$$\left.\begin{array}{l} \text{α) Η } U(\bar{x}) \text{ έχει συνεχείς μερικές παραγώγους στην } A \\ \text{β) } U(\bar{x}^0) = 0 \text{ και } U(\bar{x}) > 0 \text{ για } \bar{x} \neq \bar{x}^0 \\ \text{γ) } d_t U(\bar{x}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial x_k} f_k(\bar{x}) \leq 0 \text{ για κάθε } \bar{x} \in A \end{array}\right\} (6)$$

όπου $d_t U$ είναι η τροχιακή παράγωγος της $U(\bar{x})$ ως προς το σύστημα (5).

Αν τώρα ισχύει ότι

$$d_t U(\bar{x}) < 0 \quad \text{για κάθε } \bar{x} \neq x^0 \qquad (7)$$

τότε η συνάρτηση Lyapunov καλείται αυστηρή. Δηλαδή, καθώς $d_t U(\bar{x}^0) = 0$ ($f_i(\bar{x}^0) = 0$, $i = 1, \dots, n$), ο χαρακτηρισμός της συνάρτησης ως "αυστηρή", σημαίνει ότι η τροχιακή παράγωγος για κάθε $\bar{x} \in A$ με $\bar{x} \neq \bar{x}^0$ είναι αρνητική. Το σχετικό με τη συνάρτηση $U(\bar{x})$ θεώρημα ευστάθειας, διατυπώνεται ως εξής:

Θεώρημα Ευστάθειας Lyapunov

α) Αν για το σύστημα (S) υπάρχει συνάρτηση Lyapunov ως προς ένα κρίσιμο σημείο $\bar{x}^0$, τότε το $\bar{x}^0$ είναι ευσταθές.

β) Αν η συνάρτηση αυτή είναι αυστηρή, τότε το $\bar{x}^0$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

- Παράδειγμα 4

Γιά το γραμμικό ελεύθερο αποσβενύμενο ταλαντωτή, έχουμε την εξίσωση

$$\ddot{x} + \mu \dot{x} + \alpha^2 x = 0 , \quad \alpha > 0, \ \mu > 0 \tag{8}$$

με ισοδύναμο σύστημα ως προς τις μεταβλητές $(x, u) = (x, \dot{x})$:

$$\dot{x} = u = f_1(x, u)$$
$$\dot{u} = -\alpha^2 x - \mu u = f_2(x, u)$$

και μοναδικό κρίσιμο σημείο το $\bar{x}^{\circ} = (0, 0)$. Μέσω της χαρακτηριστικής εξίσωσης του συστήματος και των ιδιοτιμών του, προκύπτει εύκολα ότι το $(0, 0)$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές, μέ χαρακτήρα που εξαρτάται από τα μ και α (άσκηση). Αν τώρα θέλουμε να κάνουμε χρήση της μεθόδου Lyapunov, επιλέγουμε κατ' αρχάς μία συνάρτηση $U(x, u)$, έστω την

$$U(x, u) = \frac{1}{2} \alpha^2 x^2 + \frac{1}{2} u^2$$

που παριστάνει την ολική ενέργεια του ταλαντωτή ανά μονάδα μάζας, καθώς $V = \alpha^2 x^2 / 2$ και $T = u^2 / 2$ είναι οι αντίστοιχη δυναμική και κινητική ενέργεια. Για το αν η U είναι ή όχι συνάρτηση Lyapunov ως προς το κρίσιμο σημείο, παρατηρούμε ότι πληροί τα $\underline{\alpha}$) και β) της (6), ως προς την τροχιακή παράγωγο d_t, έχουμε

$$d_t U(x, u) = \frac{\partial U}{\partial x} f_1(x, u) + \frac{\partial U}{\partial u} f_2(x, u) = -\mu u^2 \leq 0$$

Συνεπώς, η U είναι συνάρτηση Lyapunov (όχι αυστηρή, καθώς η $d_t U$ μηδενίζεται και στα σημεία $(x, 0)$, $x \neq 0$). Επίσης, προκύπτει ότι είναι φθίνουσα συνάρτηση του χρόνου.

Άρα, βάσει του Θεωρήματος ευστάθειας το (0,0) είναι ευσταθές. Βέβαια, από το Θεώρημα δεν προκύπτει η ασυμπτωτική ευστάθεια (η U όχι αυστηρή).

– Άσκηση 2

Αποδείξτε το Θεώρημα ευστάθειας για τη συνάρτηση $U(\bar{x})$ του Παραδείγματος 1 (βάσει του κριτηρίου ευστάθειας Lyapunov).

– Άσκηση 3

Μέσω γραμμικοποίησης, μελετήστε το χαρακτήρα και την ευστάθεια των σημείων ισορροπίας του εκκρεμούς

$$\ddot{\theta} + c\,\dot{\theta} + K\sin\theta = 0, \quad K = \frac{g}{L} > 0, \quad c \geq 0, \quad \theta = \theta(t) \qquad (9)$$

Όσον αφορά την Ε.Δ. (8), θέτοντας $(x_1, x_2) = (\theta, \dot{\theta})$, το ισοδύναμο μη γραμμικό σύστημα γράφεται

$$\dot{x}_1 = x_2, \qquad \dot{x}_2 = -K\sin x_1 - c\,x_2 \qquad (10)$$

με σημεία ισορροπίας: $(x_1^0, x_2^0) = (\pm n\pi, 0)$, $n \in Z^+$.

Όπως προκύπτει από τη μελέτη του γραμμικοποιημένου συστήματος, για μη δεκτική απόσβεση ($c=0$), τα κρίσιμα σημεία $(\pm 2m\pi, 0)$, $m = 0, 1, \ldots$, έχουν ιδιοτιμές τις $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{K}$, συνεπώς είναι κέντρα ή ασθενείς εστίες. Αν κάνουμε χρήση πολικών συντεταγμένων στο σύστημα (ξ, η) με αρχή τα σημεία αυτά, δηλαδή $(\xi, \eta) = (x_1 \mp 2m\pi, x_2)$, κάνοντας χρήση της σχέσης $\sin\xi \simeq \xi$, καθώς κοντά σε αυτά είναι $|\xi| << 1$, μέσω των εξισώσεων του συστήματος (9), προκύπτει τελικά (ο υπολογισμός ως άσκηση)

$$\dot\rho = \frac{1-\kappa}{2}\,\rho\sin 2\theta$$

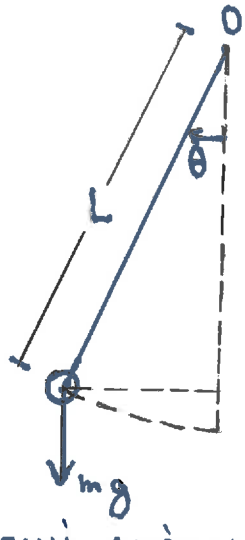
Άρα η $\dot\rho$ είναι μεταβλητού προσήμου και επομένως τα κρίσιμα σημεία $(\pm 2m\pi, 0)$ είναι κέντρα.

Αν τώρα εφαρμόσουμε τη μέθοδο Lyapunov, εισάγοντας τη συνάρτηση της ολικής ενέργειας

$$U(\theta,\dot\theta) = V+T = mgL(1-\cos\theta)+\tfrac{1}{2}mL^2\dot\theta^2$$

ή

$$U(x_1,x_2) = mgL(1-\cos x_1)+\tfrac{1}{2}mL^2x_2^2 \qquad (11)$$



όπου V και T είναι η δυναμική και κινητική ενέργεια, αντίστοιχα.

Η συνάρτηση U πληροί προφανώς τα α) και β) της (6) για κάθε κρίσιμο σημείο $(\pm 2m\pi, 0)$, $m=0,1,\dots$, (σε κάθε περιοχή του, A, που δεν περιλαμβάνει άλλα σημεία ισορροπίας $(\pm n\pi, 0)$, $n=0,1,\dots$), όσο δε αφορά στο γ), έχουμε ($k=g/L$)

$$d_t U(x_1,x_2) = \frac{\partial U}{\partial x_1}x_2+\frac{\partial U}{\partial x_2}(-k\sin x_1 - c x_2) = -mL^2 c x_2^2 \le 0$$

Συνεπώς, η U είναι συνάρτηση Lyapunov ως προς τα σημεία $(\pm 2m\pi, 0)$ (όχι αυστηρή, καθώς η d_tU μηδενίζεται και στα σημεία $(x,0)$, $x\neq\pm 2m\pi$, $m=0,1,\dots$). Άρα, τα κρίσιμα αυτά σημεία είναι ευσταθή, άρα είναι κέντρα.

Τέλος, ισχύει και το ακόλουθο θεώρημα ως προς την αστάθεια ενός κρίσιμου σημείου $\bar{x}^0$.

Θεώρημα Αστάθειας Lyapunov

Έστω μία συνάρτηση $U(\bar{x})$ ορισμένη σε μία περιοχή $A \subset \mathbb{R}^n$), όπου το $\bar{x}^0$ είναι το μοναδικό κρίσιμο σημείο και έστω ότι ισχύουν τα εξής:

α) Η $U(\bar{x})$ έχει συνεχείς μερικές παραγώγους στην A

β) Σε κάθε περιοχή $A_1 \subset A$ υπάρχει $\bar{x} \in A_1$ με $U(\bar{x}) > 0$

γ) $d_t U(\bar{x}) > 0$ γιά κάθε $\bar{x} \in A$ με $\bar{x} \neq \bar{x}^0$.

Τότε το $\bar{x}^0$ είναι ασταθές σημείο ισορροπίας.