7 $\left\{\begin{array}{l} x' = y \\ y' = -4x+4y \end{array}\right\} \to P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} \to$ Χ.Ε: $-\lambda(4-\lambda)+4=0$

$\left.\begin{array}{l} \lambda^2-4\lambda+4=0 \\ \Delta=0 \end{array}\right\} \to$

$\lambda_1=\lambda_2=\lambda=2$ (διπλή $(m=2)$)

$(P-\lambda I)\bar{\xi}=\bar{0} \to \left(\begin{array}{cc|c} -\lambda & 1 & 0 \\ -4 & 4-\lambda & 0 \end{array}\right) \to \bar{\xi} = s\begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda} \\ 1 \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \overset{s=2}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

πρώτη γραμμή

1 ιδιοδιάνυσμα $\xrightarrow{(g=1)}$ 1 λύση $e^{2t}\bar{\xi}$ $\to$ αναζητούμε άλλη μία λύση (γραμ. ανεξ. της πρώτης $\to$ Θεμελιώδεις λύσεις (Πρόταση 1.1 - ΔΟΣ1_Θεμελιώδεις Έννοιες_εε1)) της μορφής: $e^{2t}(\bar{\eta}+t\bar{\xi})$ όπου $\bar{\eta}$ γενικευμένο ιδ. προσδιοριζόμενο από το σύστημα:

$(P-\lambda I)\bar{\eta}=\bar{\xi} \to \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 2 \end{array}\right) \to \bar{\eta} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

$s=1 \longrightarrow \bar{\eta} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Άρα θεμελιώδης πίνακας $\Phi(t)$:

$$\boxed{\Phi(t) = \left(e^{2t}\bar{\xi},\ e^{2t}(\bar{\eta}+t\bar{\xi})\right) = e^{2t}\begin{pmatrix} 1 & t \\ 2 & 1+2t \end{pmatrix}}$$

και η γενική λύση $\bar{x} = \Phi\bar{c}$, $\bar{c}=(c_1,c_2)^T$, γράφεται:

$$\boxed{\begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\end{pmatrix} = c_1 e^{2t}\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix} + c_2 e^{2t}\begin{pmatrix}t\\ 1+2t\end{pmatrix}}$$

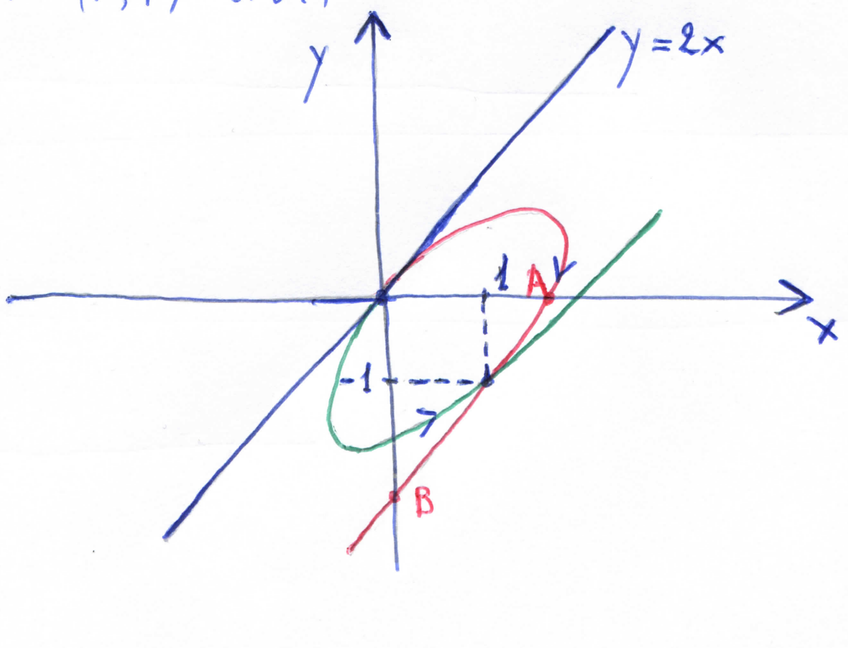
Από τη γενική λύση για $\underline{t=0}$ έχουμε:

$$\Phi(0)\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} c_1 = x_0 \\ c_2 = y_0 - 2c_1\end{matrix}$$

Θεωρώντας π.χ το $\underline{\text{ΠΑΤ}}$ $(x_0, y_0) = (x(0), y(0)) = (1,-1)$, έχουμε $c_1 = 1$, $c_2 = -3$, άρα η γενική λύση είναι:

$$\boxed{\begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\end{pmatrix} = e^{2t}\begin{pmatrix}1-3t\\ -1-6t\end{pmatrix}}$$

Η ευθεία που αντιστοιχεί στη θεμελιώδη λύση $e^{\lambda t}\bar{v}$ είναι η $(\bar{v})$: $y = 2x$, συνεπώς η τροχιά που περνά από το $(x_0, y_0) = (1,1)$ είναι



δηλαδή, ή μία πράσινη ή μία κόκκινη.

Η τροχιά τείνει ασυμπτωτικά για $t \to -\infty$ στο $(0,0)$ $(\lambda>0)$, εφαπτομενικά στην ευθεία $y=2x$ και πηγαίνει μη φραγμένα στο ∞ για $t \to +\infty$, εφαπτομενικά σε μία παράλληλη αυτής της ευθείας.

Τα πρόσημα των x, y για $t \to -\infty$ είναι (μέσω της λύσης):

$x>0$, $y>0$

(ενώ για $t \to +\infty$: $x<0$, $y<0$)

κάτι που συμφωνεί με την κόκκινη τροχιά.

Αν επιπρόσθετα θέλουμε να βρούμε τομές με τους άξονες x και y, A και B αντίστοιχα, θέτουμε στη λύση $y=0$ και $x=0$:

$$y=0 \to t=-\frac{1}{6} \to x=\frac{3}{2}e^{-\frac{1}{3}} : \quad \boxed{A\left(\frac{3}{2}e^{-\frac{1}{3}}, 0\right)}$$

$$x=0 \to t=\frac{1}{3} \to y=-3e^{\frac{2}{3}} : \quad \boxed{B\left(0, -3e^{\frac{2}{3}}\right)}$$

γ/ $\bar{u}' = P\bar{u}$, $\bar{u} = (x(t), y(t), z(t))^T$

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ανάπτυξη ως προς την τρίτη γραμμή

$$P - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & 6 \\ 2 & 1-\lambda & 4 \\ -1 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} \rightarrow \det(P - \lambda I) = \dots = -(\lambda - 1)^3 \rightarrow$$

$\lambda = 1$ (τριπλή ($m = 3$))

$$P - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -1 \\ \frac{1}{2} \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \frac{1}{2} \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{rank}(P - I_3) = 2 \rightarrow g = n - r = 3 - 2 = 1 < 3 = m \rightarrow$

η $\lambda = 1$ είναι εκφυλισμένη με βαθμό εκφυλισμού $m - g = 2 \rightarrow$ πρέπει να βρούμε άλλες δύο γραμμικά ανεξ. λύσεις, έτσι ώστε να πάρουμε ένα θεμελιώδες σύνολο (τριών) λύσεων. Η μορφή των λύσεων είναι:

$$e^{\lambda t}\bar{\xi}, \quad e^{\lambda t}(\bar{\eta}_1 + t\bar{\xi}), \quad e^{\lambda t}\left(\bar{\eta}_2 + t\bar{\eta}_1 + \frac{t^2}{2!}\bar{\xi}\right)$$

όπου $\bar{\xi}$ το αρχικό ιδιοδιάνυσμα:

$$(P - \lambda I_3)\bar{\xi} = 0$$

και $\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2$ γενικευμένα ιδιοδιανύσματα:

$$(P - \lambda I_3)\bar{\eta}_1 = \bar{\xi}$$

$$(P - \lambda I_3)\bar{\eta}_2 = \bar{\eta}_1$$

$\bar{\mathcal{F}}$: $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \bar{\mathcal{F}} = s\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{s=-1} \bar{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\bar{n}_1$: $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 6 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & -2 & -1 \end{array}\right) \rightarrow \cdots \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow$

$$\bar{n}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{s=0} \bar{n}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\bar{n}_2$: $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 6 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \cdots \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 6 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow$

$$\bar{n}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{s=0} \bar{n}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Άρα για το <u>θεμελιώδη πίνακα</u> έχουμε:

$$\boxed{\begin{aligned} \Phi(t) &= \left(e^t \bar{\mathcal{F}} \ , \ e^t(\bar{n}_1 + t\bar{\mathcal{F}}) \ , \ e^t\left(\bar{n}_2 + t\bar{n}_1 + \frac{t^2}{2}\bar{\mathcal{F}}\right) \right) \\ &= e^t \begin{pmatrix} 2 & 1+2t & t+t^2 \\ 2 & 2t & 1+t^2 \\ 1 & -t & -\frac{t^2}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}}$$

με <u>γενική λύση</u> $\bar{x} = \Phi\,\bar{c}$, $\bar{c} = (c_1, c_2, c_3)^T$.

7/ $\left\{\begin{array}{l} \dot{x} = -x + 2xy \\ \dot{y} = y - x^2 - y^2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} = p(x,y) \\ = q(x,y) \end{array}$ } $p = q = 0 \longrightarrow$ κρίσιμα σημεία (σημεία ισορροπίας)

$A(0,0)$, $B(0,1)$, $\Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\Delta = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

- Τεκμηρίωση (δικαιολόγηση) χρήσης του "γραμμικού" συστήματος

Οι p, q αναλυτικές $\Rightarrow$ αναπτύσσονται κατά Taylor γύρω από το κρίσιμο σημείο (x^0, y^0) και οι μη γραμμικοί όροι μπορούν να παραλειφθούν τοπικά, δηλαδή ισχύει η συνθήκη γραμμικοποίησης:

$$\lim_{(x,y)\to(x^0,y^0)} \frac{|u(x,y)| + |v(x,y)|}{|x - x^0| + |y - y^0|} = 0$$

όπου u, v οι μη γραμμικοί όροι του αναπτ. Taylor:

$$\left.\begin{array}{l} p = p_x(x - x^0) + p_y(y - y^0) + u(x,y) \\ q = q_x(x - x^0) + q_y(y - y^0) + v(x,y) \end{array}\right\}$$

Έτσι, σε μία γειτονιά του (x^0, y^0), το σύστημα συμπεριφέρεται βάσει της γραμμικής προσέγγισης:

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \end{pmatrix} = J_0 \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \quad J_0 = \begin{pmatrix} p_x & p_y \\ q_x & q_y \end{pmatrix}_{(x^0,y^0)} = \begin{pmatrix} -1+2y & 2x \\ -2x & 1-2y \end{pmatrix}_{(x^0,y^0)}$$

$$(\xi, \eta)^T = (x - x^0, \ y - y^0)$$

Για το Γ έχουμε

$$J_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i \longrightarrow \left.\begin{array}{l} \text{κέντρο ή} \\ \text{ασθενής εστία} \end{array}\right\} \longrightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} \xi &= x - \tfrac{1}{2} \\ \eta &= y - \tfrac{1}{2} \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} x &= \xi + \tfrac{1}{2} \\ y &= \eta + \tfrac{1}{2} \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\text{σύστημα}}$$

$$\left.\begin{aligned} \dot{\xi} &= -\xi - \tfrac{1}{2} + 2\left(\xi + \tfrac{1}{2}\right)\left(\eta + \tfrac{1}{2}\right) \\ \dot{\eta} &= \eta + \tfrac{1}{2} - \left(\xi + \tfrac{1}{2}\right)^2 - \left(\eta + \tfrac{1}{2}\right)^2 \end{aligned}\right\} \rightarrow \begin{aligned} \dot{\xi} &= \eta + 2\xi\eta \\ \dot{\eta} &= -\xi - \xi^2 - \eta^2 \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \rho\cos\theta \\ \eta &= \rho\sin\theta \end{aligned}\right\} \rho\dot{\rho} = \xi\dot{\xi} + \eta\dot{\eta} \rightarrow$$

$$\rho\dot{\rho} = \cancel{\xi\eta} + \cancel{2}\xi^2\eta - \cancel{\xi\eta} - \cancel{\xi^2\eta} - \eta^3 = (\xi^2 - \eta^2)\eta = \rho^3 \cos 2\theta \sin\theta \rightarrow$$

$$\dot{\rho} = \rho^2 \underbrace{\cos 2\theta \sin\theta}_{g(\theta)}$$

Αν $g(\theta)$ <u>σταθερού</u> προσήμου $\Rightarrow$

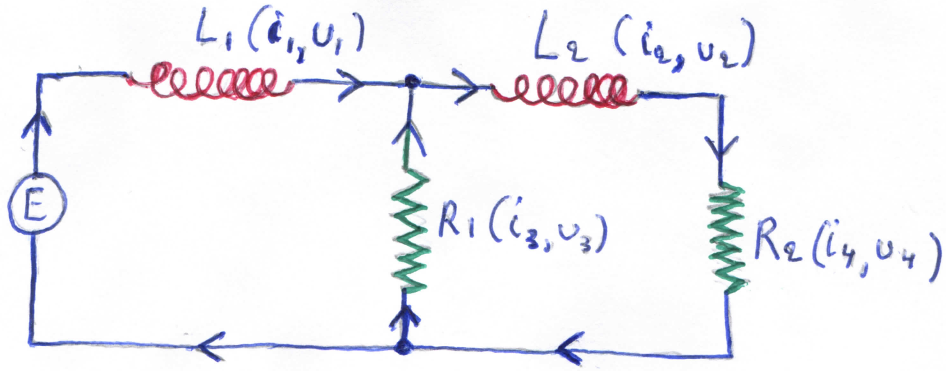
Γ ασθενής εστία.

μη γραμμικά $\begin{cases} \text{ευσταθής} & \text{αν } g(\theta) < 0 \rightarrow \dot{\rho} < 0 \\ \text{ασταθής} & \text{αν } g(\theta) > 0 \rightarrow \dot{\rho} > 0 \end{cases}$

Αν $g(\theta)$ <u>μεταβλητού</u> προσήμου $\Rightarrow$

Γ κέντρο

$$\left.\begin{aligned} \text{Για } \theta &= \tfrac{\pi}{2} \rightarrow g(\theta) = -1 \\ \text{κ } \theta &= \tfrac{3\pi}{2} \rightarrow g(\theta) = 1 \end{aligned}\right\} \text{Γ κέντρο}$$



1ος Νόμος Kirchoff

Άνω κόμβος: $i_1 + i_3 = i_2$

Κάτω κόμβος: $i_1 + i_3 = i_4$

2ος Νόμος Kirchoff

Αριστερά βρόγχος $u_1 - u_3 = E$

Δεξιά βρόγχος $u_2 + u_4 + u_3 = 0$

Σχέσεις διατάξεων: $L_1 i_1' = u_1$, $L_2 i_2' = u_2$, $u_3 = R_1 i_3$, $u_4 = R_2 i_4$

$$\left.\begin{aligned} L_1 i_1' &= u_1 = u_3 + E = R_1 i_3 + E = R_1 (i_2 - i_1) + E \\ &= -R_1 i_1 + R_1 i_2 + E \\ L_2 i_2' &= u_2 = -u_4 - u_3 = -R_2 i_2 - R_1 i_3 = -R_2 i_2 - R_1 (i_2 - i_1) \\ &= R_1 i_1 - (R_1 + R_2) i_2 \end{aligned}\right\} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} i_1' \\ i_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{R_1}{L_1} & \frac{R_1}{L_1} \\ \frac{R_1}{L_2} & -\frac{R_1 + R_2}{L_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{E}{L_1} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$R_1 = 2$ Ohm, $R_2 = 3$ Ohm, $L_1 = L_2 = 1$ Henry $E = 3$ V

$$\begin{pmatrix} i_1' \\ i_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

<u>Ομογενής</u> : <u>χ.ε</u> : $\lambda^2 + 7\lambda + 6 = 0 \rightarrow$

$\underset{-trP}{\downarrow}$ (7) $\underset{detP}{\downarrow}$ (6)

$\lambda_1 = -6$ $\quad \lambda_2 = -1 \rightarrow (0,0)$ ευσταθής κόμβος $\rightarrow$

$\downarrow$

$\bar{\xi}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \bar{\xi}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

<u>Θεμελιώδης πίνακας λύσεων</u> :

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{-6t} & 2e^{-t} \\ -2e^{-6t} & e^{-t} \end{pmatrix} \rightarrow \det\Phi = W = 5e^{-7t}$$

<u>Μη ομογενές σύστημα</u> : <u>Μερική λύση</u> :

$\bar{i}_p = \Phi \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix}$, όπου: $\Phi \begin{pmatrix} f_1' \\ f_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow$

$f_1 = \int \frac{W_1}{W} dt = \dots = \frac{1}{10} e^{6t}, \quad f_2 = \int \frac{W_2}{W} dt = \dots = \frac{6}{5} e^{t}$

Άρα : $\boxed{\begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = c_1 e^{-6t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \underbrace{\frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \frac{6}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\left(\frac{5}{2}, 1\right)^T}}$

Για τα <u>υπόλοιπα</u> μεγέθη :

$i_4 = i_2, \quad i_3 = i_2 - i_1, \quad v_1 = L_1 i_1', \quad v_2 = L_2 i_2', \quad v_3 = R_1 i_3, \quad v_4 = R_2 i_4$

δηλαδή μέσω των αποκτηθέντων εκφράσεων των $i_1(t)$ και $i_2(t)$ υπολογίζονται (συναρτήσει του t) και οι υπόλοιπες τάσεις και εντάσεις του κυκλώματος.

Επιπρόσθετα, για συγκεκριμένες αρχικές συνθήκες, υπολογίζουμε τα c_1, c_2, και κατόπιν στο επίπεδο φάσεων μπορούμε να πάρουμε τις σχετικές μεταβολές των διαφόρων μεγεθών (τροχιές φάσης – πρώτα ολοκληρώματα)

π.χ το διάγραμμα $v_3 - v_4$.

Έτσι, αν $i_1(0) = i_2(0) = 0$, από τις λύσεις υπολογίζουμε εύκολα $c_1 = -\frac{1}{10}$, $c_2 = -\frac{6}{5}$.

οπότε μέσω των παραπάνω σχέσεων έχουμε:

$$v_3 = R_1 i_3 = R_1 (i_2 - i_1)$$

$$= 2\Big[\underbrace{\frac{1}{5}e^{-6t} - \frac{6}{5}e^{-t} + 1}_{i_2} - \underbrace{\left(-\frac{1}{10}e^{-6t} - \frac{12}{5}e^{-t} + \frac{5}{2}\right)}_{i_1}\Big]$$

$$= 2\left(\frac{3}{10}e^{-6t} + \frac{6}{5}e^{-t} - \frac{3}{2}\right) = \frac{3}{5}e^{-6t} + \frac{12}{5}e^{-t} - 3$$

$$v_4 = R_2 i_4 = R_2 i_2 = 3\left(\frac{1}{5}e^{-6t} - \frac{6}{5}e^{-t} + 1\right)$$

$$= \frac{3}{5}e^{-6t} - \frac{18}{5}e^{-t} + 3$$

Τώρα, είτε με χρήση κατάλληλης εντολής απαλοιφής του t σε ένα περιβάλλον μαθηματικού συμβολικού υπολογιστικού λογισμικού (π.χ Mathematica), είτε με την κατασκευή με το "χέρι" του πρώτου ολοκληρώματος που

αφορά στα u_3 και u_4, μπορούμε να κατασκευάσουμε τη γραφική παράσταση $u_3 - u_4$.
Η συνάρτηση $F(u_3, u_4) = 0$ προκύπτει (άσκηση)

$$\left[\frac{1}{6}(u_3 - u_4) + 1\right]^6 - u_3 - \frac{2}{3}u_4 - 1 = 0$$

Έστω το σύστημα (μη γραμμικό)

$$\left\{\begin{array}{l} 2x'' = (y')^2 \\ x = y + t\,y' \end{array}\right\} \quad x = x(t),\ y = y(t), \quad \text{“}'\text{”} = \frac{d}{dt}$$

Ας βρούμε ένα ισοδύναμο σύστημα Δ.Ε πρώτης τάξης. Θέτουμε:

$$x = z_1, \quad x' = z_2, \quad y = z_3 \Longrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} z_1' = z_2 \\ 2z_2' = (z_3')^2 \\ z_1 = z_3 + t\,z_3' \end{array}\right\} \; z_3' = \frac{1}{t}z_1 - \frac{1}{t}z_3 \Bigg\} \rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} z_1' = z_2 \\ 2z_2' = \frac{1}{t^2}(z_1 - z_3)^2 \\ z_3' = \frac{1}{t}z_1 - \frac{1}{t}z_3 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} z_1' = z_2 \\ z_2' = \frac{1}{2t^2}z_1^2 + \frac{1}{2t^2}z_3^2 - \frac{1}{t^2}z_1 z_3 \\ z_3' = \frac{1}{t}z_1 - \frac{1}{t}z_3 \end{array}\right\}$$

/ Αυτό το οποίο κάναμε στην προηγούμενη άσκηση είναι ότι βρήκαμε μία διανυσματική συνάρτηση $\bar{f}: R^3 \to R^3$, $\bar{f}(\bar{z}) = (f_1(\bar{z}), f_2(\bar{z}), f_3(\bar{z}))$

$\bar{z} = (z_1, z_2, z_3)^T$, $f_i: R^3 \to R$, $i = 1, 2, 3$

(καθώς οι μέγιστες τάξεις παραγώγων των $x(t)$ και $y(t)$ στο αρχικό σύστημα ήταν 2 και 1, αντίστοιχα) έτσι ώστε το δοθέν σύστημα να αναχθεί σε ένα σύστημα ΔΕ πρώτης τάξης της μορφής

$$z_i' = f_i(\bar{z}), \quad i = 1, 2, 3$$

Ας κάνουμε το ίδιο με το σύστημα (μη γραμμικό)

$$\left\{\begin{array}{l} x''' + x''(y')^2 - y'' - xy = 0 \\ y'' - x^2 + 2x'y' = 0 \end{array}\right\} \quad x = x(t), \; y = y(t), \quad \text{“}\,'\,\text{”} = \frac{d}{dt}$$

Εδώ, καθώς οι μέγιστες τάξεις παραγώγων των x και y είναι 3 και 2 αντίστοιχα, η διανυσματική συνάρτηση $\bar{f}(\bar{z})$ είναι:

$$\bar{f}: R^5 \to R^5, \quad \bar{f} = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5)$$

$$\bar{z} = (z_1, z_2, z_3, z_4, z_5)^T, \quad f_i: R^5 \to R, \; i = 1, \dots, 5$$

Πράγματι, θέτοντας

$$\underline{x} = z_1, \; \underline{x'} = z_2, \; x'' = z_3, \; \underline{y} = z_4, \; \underline{y'} = z_5 \implies$$

$$\left.\begin{aligned}
&z_1' = z_2\\
&z_2' = z_3\\
&z_3' + z_3 z_5^2 - z_5' - z_1 z_4 = 0\\
&z_4' = z_5\\
&z_5' - z_1^2 + 2 z_2 z_5 = 0
\end{aligned}\right\} \rightarrow$$

$$\left\{\begin{aligned}
&z_1' = z_2\\
&z_2' = z_3\\
&z_3' = z_1^2 + z_1 z_4 - 2 z_2 z_5 - z_3 z_5^2\\
&z_4' = z_5\\
&z_5' = z_1^2 - 2 z_2 z_5
\end{aligned}\right\}$$

7/ $y''' + 8y = 2e^{-2x}$

Κάνουμε χρήση της μεθόδου προσδιοριστέων συντελεστών:

χ.ε ομογενούς $\lambda^3 + 8 = 0 \rightarrow \lambda^3 = -8$, βρίσκουμε τις ρίζες μέσω του τύπου του De-Moivre:

$$\lambda^3 = -8 = 8e^{i\pi} \rightarrow \lambda_k = \sqrt[3]{8}\, e^{i\frac{2k\pi+\pi}{3}}, \quad k = 0,1,2 \rightarrow$$

$$\lambda_0 = 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = \underline{1 + i\sqrt{3}}$$

$$\lambda_1 = 2e^{i\pi} = \underline{-2}$$

$$\lambda_2 = 2e^{i\frac{5\pi}{3}} = 2\left(\cos\overset{2\pi-\frac{\pi}{3}}{\frac{5\pi}{3}} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right) = \underline{1 - i\sqrt{3}}$$

Συνεπώς $y_o = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{x} \cos\sqrt{3}x + c_3 e^{x} \sin\sqrt{3}x$

Καθώς το -2 είναι ρίζα της χαρακτηριστικής, υποθέτουμε μερική λύση της μορφής:

$y_\mu = A x e^{-2x}$ και αντικαθιστώντας στην αρχική εξίσωση παίρνουμε $12 A \cancel{e^{-2x}} = 2 \cancel{e^{-2x}} \rightarrow A = \frac{1}{6}$.

Άρα η γενική λύση είναι

$$\boxed{\begin{aligned} y &= y_o + y_\mu \\ &= c_1 e^{-2x} + c_2 e^{x} \cos\sqrt{3}x + c_3 e^{x} \sin\sqrt{3}x + \frac{1}{6} x e^{-2x} \end{aligned}}$$

Αν σε μία γραμμική ομογενή Δ.Ε n-τάξης γνωρίζουμε μία λύση $y_1(x)$, θέτοντας

$$y(x) = y_1(x)\, u(x)$$

και αντικαθιστώντας στην εξίσωση την y και τις παραγώγους της $y^{(k)}$, $k=1,\ldots,n$, καταλήγουμε σε μία $n-1$-τάξης γραμμική ομογενή εξίσωση ως προς $v(x) = u'(x)$, όπου αναζητούμε τις λύσεις της.

Η μέθοδος αυτή καλείται υποβιβασμός τάξης (από n σε $n-1$) και οφείλεται στον D'Alembert.

π.χ

$$x^3 y''' - 3x^2 y'' + (6x - x^3) y' + (x^2 - 6) y = 0$$

Η $y_1(x) = x$ είναι μία λύση της εξίσωσης.

Θέτουμε $y = xu(x)$ και υπολογίζουμε:

$y' = xu' + u$, $y'' = xu'' + 2u'$, $y''' = xu''' + 3u''$

Αντικαθιστώντας, μετά από πράξεις παίρνουμε

$$x^4(u''' - u') = 0 \xrightarrow[x \neq 0]{u' = v} v'' - v = 0 \longrightarrow$$

$$v(x) = u'(x) = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} \xrightarrow{\int}$$

$$u(x) = c_1 e^{x} - c_2 e^{-x} + c_3 \longrightarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned} y(x) &= x\,u(x) \\ &= c_1 x e^{x} + c_2 x e^{-x} + c_3 x \end{aligned}}$$

Δηλαδή έχουμε ένα θεμελιώδες σύνολο λύσεων:

$\{xe^{x}, xe^{-x}, x\}$, με ορίζουσα Wronski

$$W\{xe^{x}, xe^{-x}, x\} = \det\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{pmatrix} = \dots = 2x^3 \neq 0 \quad (x \neq 0)$$

δηλαδή είναι διάφορη του μηδενός στο $R^* = R - \{0\}$, όπου και είναι συνεχείς όλες οι συναρτήσεις-συντελεστές της εξίσωσης:

$$y''' \underbrace{-\frac{3}{x}}_{f_2(x)} y'' + \underbrace{\left(\frac{6}{x^2} - 1\right)}_{f_1(x)} y' + \underbrace{\left(\frac{1}{x} - \frac{6}{x^3}\right)}_{f_0(x)} y = 0$$

Αν ένα τρισδιάστατο γραμμικό ομογενές αυτόνομο σύστημα έχει ιδιοτιμές $\lambda_1 = 1$ και $\lambda_{2,3} = 1 \pm i2$ με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $\bar{\xi}_1 = (2, -3, 2)^T$ και $\bar{\xi}_{2,3} = (0, \pm i, 1)$, να βρούμε τον πραγματικό θεμελιώδη πίνακα λύσεων.

Η λύση που αντιστοιχεί στην λ_1 είναι προφανώς:

$$e^{\lambda_1 t}\bar{\xi}_1 = e^t \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Οι πραγματικές λύσεις που αντιστοιχούν στο ζεύγος των μιγαδικών συζυγών ιδιοτιμών $\lambda_{2,3}$, προκύπτουν από την διανυσματική ποσότητα

$$e^{\lambda_2 t}\bar{\xi}_2 \quad (\text{ή ισοδύναμα } e^{\lambda_3 t}\bar{\xi}_3)$$

όπου παίρνουμε χωριστά το πραγματικό και το φανταστικό μέρος του γινομένου:

$$e^{(1+i2)t}\begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{pmatrix} = e^t e^{i2t}\begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}$$

ή

$$e^{t}(\cos 2t + i\sin 2t)\begin{pmatrix}0\\ i\\ 1\end{pmatrix} = e^{t}\begin{pmatrix}0+i0\\ -\sin 2t + i\cos 2t\\ \cos 2t + i\sin 2t\end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{e^{t}\begin{pmatrix}0\\ -\sin 2t\\ \cos 2t\end{pmatrix}}_{Re} + i\,\underbrace{e^{t}\begin{pmatrix}0\\ \cos 2t\\ \sin 2t\end{pmatrix}}_{Im}$$

Έτσι ο <u>θεμελιώδης</u> πίνακας είναι:

$$\boxed{\Phi(t) = e^{t}\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ -3 & -\sin 2t & \cos 2t\\ 2 & \cos 2t & \sin 2t\end{pmatrix}}$$

με <u>γενική λύση</u> $\Phi(t)\bar{c}$, $\bar{c} = (c_1, c_2, c_3)^T$:

$$\boxed{\begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\\ z(t)\end{pmatrix} = c_1 e^{t}\begin{pmatrix}2\\ -3\\ 2\end{pmatrix} + c_2 e^{t}\begin{pmatrix}0\\ -\sin 2t\\ \cos 2t\end{pmatrix} + c_3 e^{t}\begin{pmatrix}0\\ \cos 2t\\ \sin 2t\end{pmatrix}}$$

όπου για συγκεκριμένες <u>(Α.Σ)</u>:

$$(x(0), y(0), z(0)) = (x_0, y_0, z_0)$$

υπολογίζουμε τα c_i , $i=1,2,3$ (τό σύστημα έχει <u>μοναδική</u> λύση – γιατί;) και παίρνουμε την <u>συγκεκριμένη</u> λύση που πληροί τις αρχικές συνθήκες, δηλαδή η <u>αντίστοιχη τροχιά</u> της στο χώρο φάσεων <u>περνά</u> από το σημείο $\bar{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$.

$$\Phi(0)\bar{c} = \bar{x}_0 \Rightarrow \underline{\bar{c} = \Phi^{-1}(0)\bar{x}_0} \quad \underline{(\bar{x}(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(0)\bar{x}_0)}$$

7/ Αν έχουμε το θεμελιώδη πίνακα $\Phi(t)_{n\times n}$, ενός γραμμικού ομογενούς συστήματος ΔΕ

$\bar{x}' = A\hat{x}$, $\hat{x} = (x_1(t), \dots, x_n(t))$, $A_{n\times n}$

(αυτόνομου – A είναι σταθερό μητρώο – ή μη – $A = (a_{ij}(t))_{i,j=1,\dots,n}$)

τότε καθώς $\underline{\Phi'(t) = A\,\Phi(t)}$, μπορούμε να βρούμε τον πίνακα του συστήματος A: ($\det\Phi \neq 0 \to$ μη ιδιάζον)

$$\underline{A = \Phi'\Phi^{-1}}$$

<u>π.χ.</u> αν ο θεμελιώδης πίνακας ενός διοδιάστατου γραμμικού συστήματος είναι:

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} t^2 & \frac{1}{t^2} \\ 2t & -\frac{2}{t^3} \end{pmatrix} \qquad \left(\Rightarrow \det\Phi = -\frac{4}{t}\right)$$

υπολογίζοντας τους $\frac{d\Phi}{dt}$ και Φ^{-1}, έχουμε

$$\underline{A} = \Phi'\Phi^{-1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2t & -\frac{2}{t^3} \\ 2 & \frac{6}{t^4} \end{pmatrix}}_{\Phi'} \underbrace{\left(-\frac{t}{4}\right)\begin{pmatrix} -\frac{2}{t^3} & -\frac{1}{t^2} \\ -2t & t^2 \end{pmatrix}}_{\Phi^{-1}} = \dots$$

$$= \underline{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{4}{t^2} & -\frac{1}{t} \end{pmatrix}} \Rightarrow: \left\{ \begin{aligned} x'(t) &= y \\ y'(t) &= \frac{4}{t^2}x - \frac{1}{t}y \end{aligned} \right\} \quad (*)$$

(<u>Επαληθεύστε</u> τον $\Phi(t)$ επιλύοντας το γραμμικό μη αυτόνομο σύστημα (∗)).

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = \frac{4}{t^2}x - \frac{1}{t}y \end{cases} \quad \begin{cases} x'' = y' = \frac{4}{t^2}x - \frac{1}{t}y \\ y = x' \end{cases}$$

$t^2 x'' + t x' - 4x = 0$ (Euler)

$t = e^z \rightarrow z = \ln t, \quad x(t) = w[z(t)]$ $\rightarrow$

$w''_{zz} - 4w = 0 \xrightarrow{\text{χ.ε}} \lambda^2 - 4 = 0 \rightarrow \lambda_{1,2} = \mp 2 \rightarrow$

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= c_1 t^{-2} + c_2 t^2 \xrightarrow{y = x'} \\ y(t) &= -2c_1 t^{-3} + 2c_2 t \end{aligned}\right\} \rightarrow$$

δηλαδή ο θεμελιώδης πίνακας είναι:

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} t^{-2} & t^2 \\ -2t^{-3} & 2t \end{pmatrix}$$

7/ Για το γραμμικό σύστημα

$$\left\{\begin{aligned} x' &= 3x - y \\ y' &= 9x - 3y \end{aligned}\right\} \longrightarrow P = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 9 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \chi.\varepsilon: \lambda^2 = 0 \rightarrow$$

$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ (διπλή). Για τα ιδιοδιανύσματα και τις αντίστοιχες (θεμελιώδεις) λύσεις έχουμε:

$$(P - \lambda I_2)\bar{\xi} = \bar{0} : \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 0 \\ 9 & -3 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \bar{\xi} = s\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{s=1} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$g = 1 < 2 = m$

Χρειαζόμαστε μία επιπλέον λύση $\rightarrow$ υπολογισμός γενικευμένου ιδν. $\bar{\eta}$:

$$(P - \lambda I_2)\bar{\eta} = \bar{\xi} : \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 1 \\ 9 & -3 & 3 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\beta = 3\alpha - 1 \rightarrow \bar{\eta} = s\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{s=0} \bar{\eta} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

άρα έχουμε τις θεμελιώδεις λύσεις:

$$\left(e^{\lambda t}\bar{\xi},\ e^{\lambda t}(\bar{\eta} + t\bar{\xi})\right) = (\bar{\xi},\ \bar{\eta} + t\bar{\xi}) \longrightarrow$$

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 3 & 3t-1 \end{pmatrix}$$ με <u>γενική λύση</u>:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \Phi(t)\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} t \\ 3t-1 \end{pmatrix}$$

Άρα το $(0,0)$ (critical point) είναι ασταθές ($c_2 \neq 0$) εκτός της περίπτωσης $c_2 = 0$ (stationary solution: $(x,y) = (c_1, 3c_1)$)

Για το δισδιάστατο γραμμικό σύστημα Δ.Ε. με πίνακα συντελεστών:

$$\left\{\begin{array}{l} x' = y \\ y' = x \end{array}\right\} \text{(αυτόνομο)}$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

έχουμε χ.ε: $\det(P - \lambda I_2) = \lambda^2 - 1 = 0 \rightarrow \lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 1$

με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $\left((P - \lambda I_2)\bar{\xi} = \bar{0}\right)$

$$\bar{\xi}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \bar{\xi}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

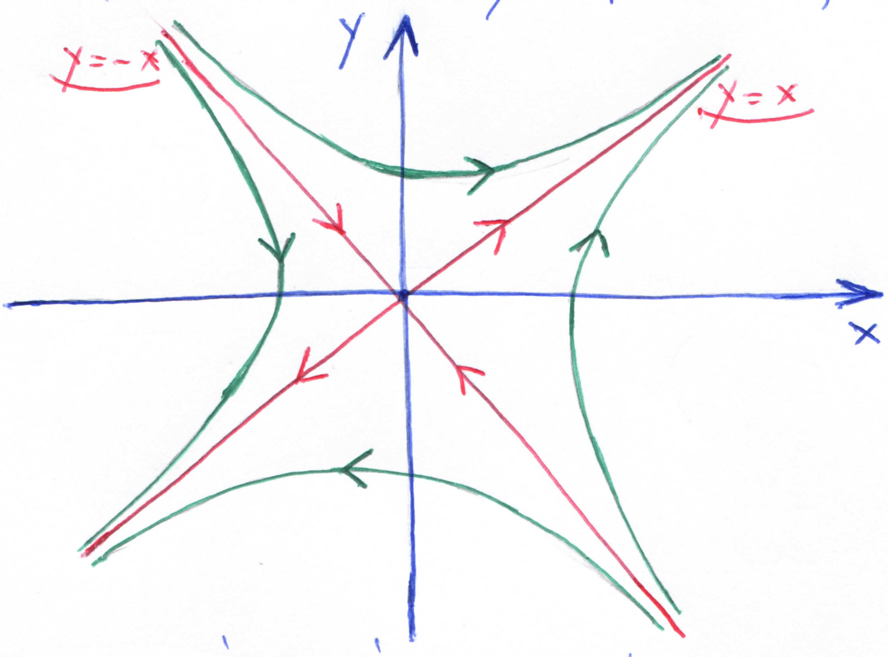
άρα, ο θεμελιώδης πίνακας λύσεων είναι:

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{t} \\ -e^{-t} & e^{t} \end{pmatrix}$$

Ως προς τις τροχιές φάσης:

Από τη θεωρία, γνωρίζουμε γενικά για την ασυμπτωτική συμπεριφορά των τροχιών για $t \rightarrow \pm\infty$, ως προς τις ευθείες που αντιστοιχούν στις θεμελιώδεις λύσεις των ιδιοτιμών.

Γιά το συγκεκριμένο σύστημα, οι τροχιές <u>τείνουν ασυμπτωτικά</u>: γιά $t \to -\infty$ στην ευθεία της $\underline{\lambda_1 = -1}$: $\underline{y = -x}$ (με κλίση αυτή του $\bar{\xi}_1$) και για $t \to +\infty$ στην ευθεία της $\underline{\lambda_2 = 1}$: $\underline{y = x}$ (με κλίση αυτή του $\bar{\xi}_2$). Οι ευθείες αυτές αποτελούν τις <u>διαχωρίζουσες</u> στο χώρο φάσεων, και <u>σχεδιάζοντας</u> κάποιες τροχιές παίρνουμε:



Όλα τα παραπάνω είναι <u>απαντήσεις</u> στα παρακάτω:

- Δίνεται το σύστημα $\bar{x}' = P\bar{x}$, $P_{2\times 2} = \dots$,
  $\bar{x} = (x(t), y(t))$

  α) <u>Γράψτε</u> το Θεμελιώδη πίνακα λύσεων του συστήματος

  β) <u>Σχεδιάστε</u> κάποιες τροχιές του συστήματος σε όλο το επίπεδο φάσης xy και <u>περιγράψτε</u> τη συμπεριφορά τους για $t \to \pm\infty$.

Αν σε μία Δ.Ε έχουμε ασυνεχείς (σε ένα σημείο – πεπερασμένη ασυνέχεια: Jump) συναρτησιακούς συντελεστές, και αναζητούμε μία λύση ενός Π.Α.Τ συνεχή στο σημείο ασυνέχειας, έστω $x = x_0$, όπου οι αρχικές συνθήκες ισχύουν για ένα σημείο x_1, με $x_1 < x_0$.

Τότε: Επιλύουμε την εξίσωση δύο φορές!

Μία με τις (Α.Σ) στο x_1 και μία δεύτερη με (Α.Σ) στο x_0 που προκύπτουν από την πρώτη λύση (2 Π.Α.Τ).

Π.χ

$$y' + y = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}, \quad y(0) = 3. \qquad (*)$$

Έχουμε ασυνέχεια στο $x_0 = 1$ $\quad (x_1 = 0 < 1 = x_0)$

Βήμα 1:

$$\left.\begin{array}{l} y' + y = 1 \\ y(0) = 3 \end{array}\right\} y' = -y + 1 \rightarrow \left.\begin{array}{l} y = ce^{-x} + 1 \\ y(0) = 3 \end{array}\right\} \xrightarrow{c=2} y = 2e^{-x} + 1$$

Βήμα 2:

Οι καινούργιες (Α.Σ) στο $x_0 = 1$ είναι το όριο της λύσης "αριστερά":

$$\lim_{x \to 1^-} y(x) = \lim_{x \to 1^-} (2e^{-x} + 1) = 2e^{-1} + 1$$

Επιλύουμε έτσι το Π.Α.Τ:

$$\left.\begin{array}{l} y' + y = 0 \\ y(1) = 2e^{-1} + 1 \end{array}\right\} y' = -y \rightarrow \left.\begin{array}{l} y = c_1 e^{-x} \\ y(1) = 2e^{-1} + 1 \end{array}\right\} \xrightarrow{c_1 = 2+e} y = (2+e)e^{-x}$$

Άρα η συνεχής λύση του αρχικού ΠΑΤ (*) είναι:

$$\boxed{y(x) = \begin{cases} 2e^{-x} + 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ (2+e)e^{-x} & x > 1 \end{cases}}$$