# Σ.Δ.Ε $1^{ης}$ τάξης – Μορφές λύσεων – Συμπεριφορά λύσεων, Ανώμαλα σημεία – Προβλήματα Δ.Ε – Π.Α.Τ, Ύπαρξη, Μοναδικότητα 1

$$\boxed{F(x, y, y') = 0}, \quad y = y(x) \quad (\text{ODE1}) \qquad (1)$$

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

$\boxed{\varphi(x, y; c) = 0}$ : Λύση ή ολοκλήρωμα της (1) (την επαληθεύει) (2)

$c \in R$ (παράμετρος) $\to$ μονοπαραμετρική οικογένεια λύσεων

- Μορφές λύσεων

α. $y = g(x; c)$ Λελυμένη (explicit) μορφή

π.χ

$$y' = ay \to y = ce^{ax}$$

$$y' = \frac{y}{x} \to y = cx$$

$$y' = ay - ay^2 \to y = \frac{e^{ax}}{e^{ax} + c}$$

β. $\varphi[x, y(x); c] = 0$ (ή $\varphi[y, x(y); c] = 0$) 2

Πεπλεγμένη (implicit) μορφή

π.χ $x^2 + y^2 + \ln(xy) = 0$

δηλαδή δεν μπορεί να επιλυθεί (να εξαχθεί τύπος) ως προς $y$ (ή ως προς $x$)

γ. $x = x(t; c)$, $y = y(t; c)$ Παραμετρική μορφή

π.χ

$$yy' - y = Ax + B$$ (Εξίσωση Abel 2ου είδους κανονικής μορφής)

$$x = \frac{c}{A}\frac{t-1}{\sqrt{t^2-t-A}}\, e^{-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2-t-A}} - \frac{B}{A}$$

$$y = \frac{c}{\sqrt{t^2-t-A}}\, e^{-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2-t-A}}$$

---

– Ανώμαλα σημεία (πόλοι) οικογένειας λύσεων

π.χ $y' = -xy + xy^2$ (Εξ. Bernoulli) $\xrightarrow{y = z^{-1}}$

$z' = xz - x$ (ΓΟDE1) $\longrightarrow$ $z = ce^{\frac{x^2}{2}} + 1 \longrightarrow \boxed{y = \dfrac{1}{1 + ce^{x^2/2}}}$

Εν γένει, για τη μελέτη της συμπεριφοράς των λύσεων (οικογένεια) ελέγχουμε (σε σχέση με τις τιμές των $c$), τον μηδενισμό των παρονομαστών ή (και) το πρόσημο ποσοτήτων σε ρίζες.

$$y = \frac{1}{\underbrace{1+ce^{x^2/2}}}$$

$= 0 \longrightarrow e^{x^2/2} = -\frac{1}{c}$ (άρα $-1 \le c < 0$)

$\longrightarrow \frac{x^2}{2} = -\ln(-c) \to x^2 = -\ln c^2 \longrightarrow x = x_0 = \pm\sqrt{-\ln c^2}$

δηλαδή $\forall c$: $-1 \le c < 0$ η αντίστοιχη λύση παρουσιάζει πόλους (άπειρες ασυνέχειες – κατακόρυφες ασύμπτωτες) στα σημεία $x_0 = \pm\sqrt{-\ln c^2}$ ή διαφορετικά το πεδίο ορισμού (Π.Ο) αυτών των λύσεων είναι:

$-1 \le c < 0$ : Π.Ο : $(-\infty, -\sqrt{-\ln c^2}) \cup (-\sqrt{-\ln c^2}, \sqrt{-\ln c^2})$
$\cup (\sqrt{-\ln c^2}, \infty)$

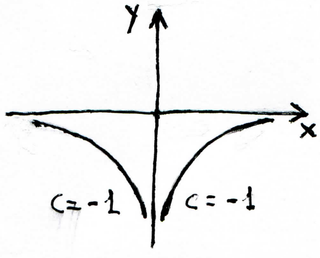
ενώ γιά

$c < -1$, $c \geq 0$ : Π.Ο : $\mathbb{R}$ (δεν υπάρχουν πόλοι)

- Πολλές φορές μας ενδιαφέρει η συμπεριφορά της οικογένειας σε συγκεκριμένα σημεία $x_0$ (συνήθως στο $x=0$), δηλαδή εξετάζουμε την ύπαρξη (ή όχι) και τη μοναδικότητα (ή όχι) των λύσεων που τέμνουν την ευθεία $x = x_0$.

Εδώ για $x=0$ : $y = \frac{1}{1+c}$, άρα περνούν όλες οι λύσεις $c \neq -1$ (άπειρες), ενώ η $c=-1$ έχει ανώμαλο σημείο (πόλο) στο $x = 0$:

$y = (1-e^{x^2/2})^{-1}$




Π.Ο: $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

$y' = -2xy + 2x^3y^3$ (Εξ. Bernoulli) $\xrightarrow{y = 1/\sqrt{z}}$

$z' = 4xz - 4x^3$ (ΓΔΕ1) $\longrightarrow z = ce^{2x^2} + x^2 + \frac{1}{2} \longrightarrow$

$$\boxed{y = \frac{1}{\sqrt{ce^{2x^2} + x^2 + \frac{1}{2}}}}$$

Εδώ δεν μπορεί να λυθεί (λελυμένα) ως προς $x$ η εξίσωση: παρονομαστής $= 0$, και διαπιστώνουμε ότι

$c \geq 0$: Π.Ο: $\mathbb{R}$ (δεν υπάρχουν πόλοι)

$c < 0$: Π.Ο: $x$: $\left(x^2 + \frac{1}{2}\right) e^{-2x^2} > -c$

με πόλους στα σημεία $x_0$: $\left(x_0^2 + \frac{1}{2}\right) e^{-2x_0^2} = -c$

---

$xy' + y = \sin x \longrightarrow y' = -\frac{y}{x} + \frac{\sin x}{x}$ (γραμμική-ΓΔΕ1)

$\boxed{y = \frac{c - \cos x}{x}}$ Ο παρονομαστής μηδενίζεται για $x = 0$ και έχουμε: $y = \frac{c-1}{0}$. Άρα:

$\forall c \neq 1$ έχουμε πόλο στο $x = 0$

$c = 1$: $y = \frac{1 - \cos x}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} \left[\frac{0}{0}\right] \xrightarrow[x \to 0]{} \frac{\sin x}{1} \xrightarrow[x \to 0]{} 0$

δηλαδή η λύση $c = 1$ περνά από το σημείο $(0, 0)$ και δεν έχει πόλο.

---

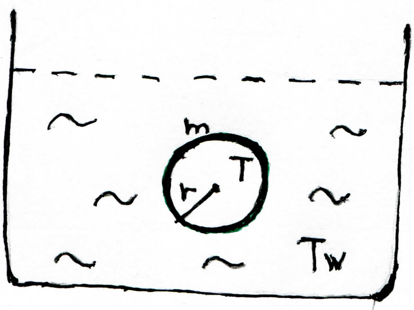
- Άσκηση: Εξετάστε ως προς την ύπαρξη πόλων καθώς και τη συμπεριφορά στο $x = 0$, της οικογένειας λύσεων των εξισώσ[εων]

$y' = y^2 + \frac{y}{x} + \frac{1}{x^2}$ (Riccati), $xy' + y = \cos x$ (γραμμική)

# Προβλήματα Δ.Ε (Φυσική, Μηχανική, Ηλεκτρισμός, Γεωμετρία, Βιολογία, Οικονομία, κ.α)

Κατάστρωση ΔΕ $\rightarrow$ Επίλυση $\rightarrow$ Επαλήθευση $\rightarrow$ Μαθηματική μελέτη συμπεριφοράς των λύσεων (Π.Α.Τ, Ύπαρξη, Μοναδικότητα) $\rightarrow$ Φυσική ερμηνεία των λύσεων

## 1.X – Νόμος ψύξης του Newton




Μια σφαίρα από χαλκό μάζα $m$, ακτίνας $r$ και θερμοκρασίας $T$, είναι βυθισμένη σε νερό θερμοκρασίας $T_w$ (σταθερή). ($T > T_w$). Καθώς η σφαίρα ψύχεται, υπολογίστε την θερμοκρασία της σαν συνάρτηση του χρόνου: $T(t)$. Δίνεται ότι $T(0) = T_0$ ($> T_w$).

---

1. Κατάστρωση ΔΕ (Χρήση φυσικών νόμων, σχέσεων ή υποθέσεων)

επιφάνεια σφαίρας ($4\pi r^2$)

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = h\, A\,(T_w - T), \quad T = T(t)$$

$\frac{\Delta Q}{\Delta t}$: ρυθμός μεταφοράς θερμότητας

$h$: συντελ. μεταφ. θερμότητας

$$\Delta Q = m\, c\, \Delta T$$

$c$: ειδική θερμότητα (χαλκός: 0,39 kJ)

$\rightarrow$

$$mc\frac{\Delta T}{\Delta t} = hA(T_w - T) \longrightarrow$$

$$\frac{\Delta T}{\Delta t} = -aT + aT_w\,, \quad a = \frac{hA}{mc}$$

$$\xrightarrow[\Delta t \to 0]{\lim} \boxed{\frac{dT}{dt} = -aT + aT_w}$$ (LODE 1, X.M)

## 2. Επίλυση

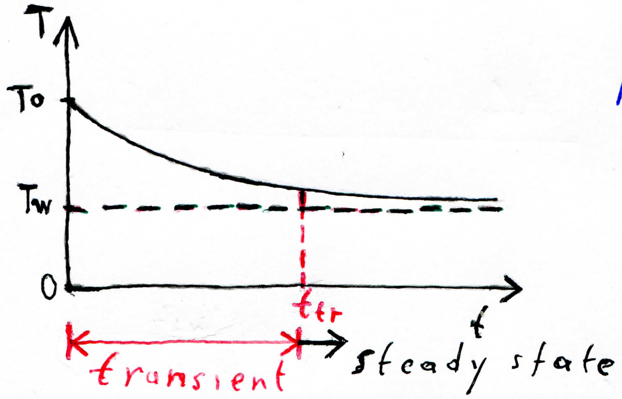
$$\frac{dT}{T - T_w} = -a\,dt \xrightarrow{\int} T(t) = Ke^{-at} + T_w \quad (K>0)$$

$$T(0) = T_0 \quad (\text{Α.Σ})$$

$$K = T_0 - T_w \longrightarrow \boxed{T(t) = (T_0 - T_w)e^{-at} + T_w}$$

## 3. Επαλήθευση (προφανής)

## 4. Μαθηματική μελέτη λύσης




Η θερμοκρασία της σφαίρας, $T$, τείνει ασυμπτωτικά ($t \to \infty$) στη θερμοκρασία του νερού, $T_w$.

$T - T_w \leq$ επιθυμητό σφάλμα προσέγγισης (αμελητέα)

## 5. Φυσική ερμηνεία λύσης

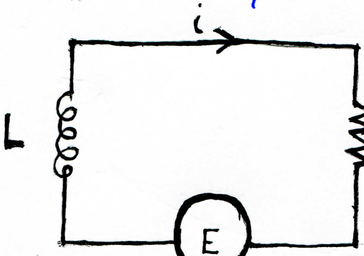
Πολύ σύντομα, η $T$ γίνεται "ίση" με την $T_w$. Ο χρόνος γι' αυτό, $t_{tr}$ (transient), εξαρτάται από την αρχική διαφορά $T_0 - T_w$, καθώς και την παράμετρο $a$.

- Άσκηση

Αν ο ρυθμός απορρόφησης της ενέργειας E, ακτινοβολίας που πέφτει κάθετα σε επιφάνεια υγρού (π.χ θάλασσα) είναι $\frac{\Delta E}{\Delta s} = -aE(s)$, όπου s το βάθος και a ο συντελεστής απορρόφησης (π.χ $a=0,1$ : απορ. 10% ανά μονάδα μήκους), **a)** Βρείτε την ενέργεια σαν συνάρτηση του βάθους, E(s) (Νόμος απορρόφησης του Lambert), **β)** για $a=0.5$, υπολογίστε το βάθος όπου έχει απορροφηθεί το 90% της προσπίπτουσας ακτινοβολίας, $E_0$ ($E(0)=E_0$) **γ)** αφού βρείτε μία μαθηματική έκφραση του a, υπολογίστε το ποσοστό % απορρόφησης ανά μονάδα μήκους, για $a=0.5$.

---

## Κύκλωμα (RL) με πηγή E




Ακολουθούμε τα παραπάνω βήματα (στάδια) (Κατάστρωση-... κλπ):

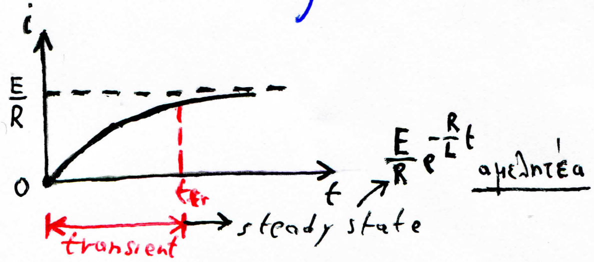
$$L\frac{di}{dt} + Ri = E$$ (νόμος Kirchoff για τάσεις)

$$\boxed{\frac{di}{dt} = -\frac{R}{L}i + \frac{E}{L}}$$ (LODE1)

E = σταθερή : $i(t) = e^{-\frac{R}{L}t}\left(K + \frac{E}{R}e^{\frac{R}{L}t}\right) = Ke^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E}{R}$ →

$i(0) = 0$ (Α.Σ)

$K = -\frac{E}{R}$ → $\boxed{i(t) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)}$



$E = E_0 \sin \omega t$

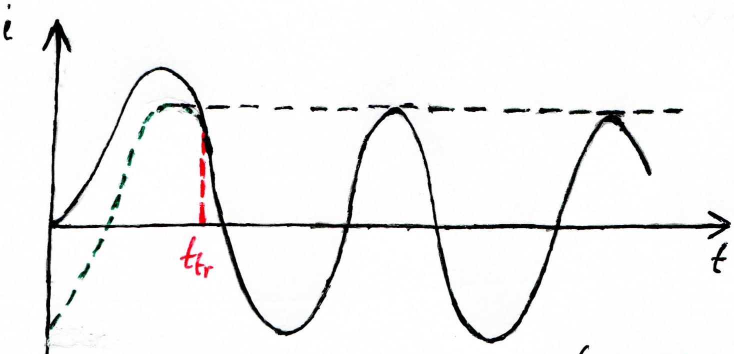


Βάσει του ολοκληρώματος

$$\int e^{ax} \sin bx \, dx = e^{ax} \frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2 + b^2}$$

με $a = \frac{R}{L}$, $b = \omega$, για τη μερική λύση της μη ομογενούς, και μέσω της (Α.Σ): $i(0) = 0$, προκύπτει τελικά

$$\boxed{i(t) = \frac{E_0}{R^2 + \omega^2 L^2} \left( \omega L e^{-\frac{R}{L} t} + R \sin \omega t - \omega L \cos \omega t \right)}$$




transient → steady state $\left( \frac{E_0 \omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} e^{-\frac{R}{L} t} \text{ αμελητέα} \right)$

---

Από τα γραφήματα των παραπάνω παραδειγμάτων γίνεται φανερό ότι η μεταβατική (transient) λύση οφείλεται στην επίδραση της λύσης της ομογενούς γραμμικής εξίσωσης (εκθετική), ενώ όταν αυτή γίνει αμελητέα, εγκαθίσταται η λύση σταθερής κατάστασης (steady state), η οποία "ταυτίζεται" (σχεδόν ίση) με τη μερική λύση της μη ομογενούς γραμμικής εξίσωσης

- $\boxed{\text{Άσκηση}}$

Επιλύσετε ένα κύκλωμα RC ως προς την ένταση $i(t)$ και την τάση του πυκνωτή $u_c(t)$ για τις περιπτώσεις: α) $E =$ σταθερή β) $E = E_0 \sin\omega t$.

Ισχύει ότι: $i(0) = i_0$, $u_c(0) = 0$

---

- $\boxed{\text{Άσκηση}}$

Λύσετε την εξίσωση

$$\underline{xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y}\ , \quad y = y(x)\ , \quad y' = \frac{dy}{dx}$$

<u>Λύση</u>: $y = \pm x \sin(\ln|x|)$

## – Πρόβλημα αρχικών τιμών (Π.Α.Τ) – Ύπαρξη – Μοναδικότητα

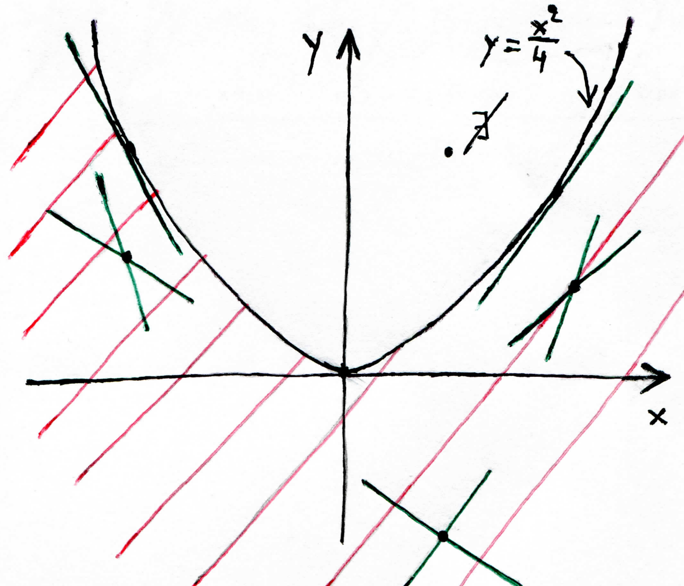


$$\left.\begin{array}{ll} F(x,y,y')=0 & (\Delta.E) \\ y(x_0)=y_0 & (A.\Sigma) \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{Π.Α.Τ} \\ \text{(Πρόβλημα αρχικών τιμών)}\end{array}$$

Επίλυση Δ.Ε $\longrightarrow \varphi(x,y;c)=0 \longrightarrow$ Εφαρμογή (Α.Σ):

$$\varphi(x_0,y_0;c)=0 \left\langle \begin{array}{lll} \nexists \text{ λύση} & \rightarrow \text{Π.Α.Τ} & \cancel{Y-M} \\ 1 \text{ λύση } c_0 & \rightarrow \text{Π.Α.Τ} & Y-M \\ \text{πολλές λύσεις } c_1, c_2, \dots & \rightarrow \text{Π.Α.Τ} & Y-\cancel{M} \end{array}\right.$$

Υ: Ύπαρξη (λύσεων), Μ: Μοναδικότητα (λύσεων)




Π.χ. $y'^2 - xy' + y = 0$

Λύση: $y = cx - c^2$ (οικ. ευθ.)

$y = \frac{x^2}{4}$ (ιδιάζουσα)

Π.Α.Τ: $(x_0, y_0)$

$$c^2 - c x_0 + y_0 = 0$$

$\Delta = x_0^2 - 4y_0 \geq 0 \Leftrightarrow y_0 \leq \frac{x_0^2}{4}$, δηλαδή για όλα τα σημεία κάτ[ω] από την παραβολή και πάνω σε αυτή (κόκκινη περιοχή)

$\underbrace{\exists \text{ 2 λύσεις}}_{Y-\cancel{M}}$ $y_i = c_i x - c_i^2,\ i=1,2$ : $c_{1,2} = \frac{x_0 \pm \sqrt{x_0^2 - 4y_0}}{2}$

Για τα σημεία της παραβολής ($\Delta=0$) $\underbrace{\exists \text{ 1 λύση}}_{Y-M}$ $y = \frac{x_0}{2}x - \frac{x_0^2}{4}$

και για τα σημεία στο εσωτερικό της παραβολής ($\Delta<0$) $\nexists$ καμμία λύση ($\cancel{Y}-\cancel{M}$).

# Θεώρημα Ύπαρξης - Μοναδικότητας για Π.Α.Τ (Θεώρημα Cauchy)

Για την εξίσωση $y' = f(x,y)$, αν $f, \frac{\partial f}{\partial y}$ είναι συνεχείς συναρτήσεις σε μία περιοχή $D \subseteq R^2$ και $y(x_0) = y_0$ για κάποιο $(x_0, y_0) \in D$, τότε:

$\exists\, h > 0$ : στο διάστημα $|x - x_0| < h$ <u>υπάρχει μοναδική</u> λύση της εξίσωσης, η οποία πληροί τις (Α.Σ) (περνά από το $(x_0, y_0)$)

Πρόκειται για <u>ικανές συνθήκες</u>.

<u>π.χ</u> <u>Παραδείγματα αν οι συνθήκες δεν ισχύουν</u>

1. $y' = |y| = \begin{cases} -y & y<0 \\ y & y \geq 0 \end{cases}$

<u>$f(x,y) = |y|$</u> ($=z$ : δύο επίπεδα που διχοτομούν το επίπεδο yz και τέμνονται στον άξονα x ($z>0$)), <u>συνεχής</u>

<u>Λύση:</u>

$y = \begin{cases} ce^{-x}, & y<0 \\ ce^{x}, & y \geq 0 \end{cases}$

Για τα σημεία $(x_0, 0)$ (άξονας x)

$\nexists \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,0)}$ (γιατί;) $\rightarrow$ η <u>$\frac{\partial f}{\partial y}$</u> μη συνεχής στο $(x_0, 0)$

Ενώ $\forall (x_0, y_0) : y_0 \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ <u>υπάρχει μοναδική</u> λύση της εξίσωσης με $y(x_0) = y_0$:

$$y = \left.\begin{cases} y_0\, e^{-(x-x_0)}, & y_0<0 \\ y_0\, e^{x-x_0}, & y_0>0 \\ 0, & y_0 = 0 \end{cases}\right\} x \in R \text{ (<u>όχι αναγκαίες</u>)}$$

2. (ως άσκηση) 

Για την εξίσωση $y' = x y^{1/3}$, εξετάστε την ύπαρξη και μοναδικότητα λύσεων, σε σχέση με τις συνθήκες του Θεωρήματος Cauchy στα σημεία $(1,1)$, $(1,0)$, $(1,-1)$, κάνοντας και την αντίστοιχη γραφική απεικόνιση