ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

$\bar{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))^T \in R^n$

$$\|\bar{x}\| = \begin{cases} \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} & (N_1) \\ |x_1| + \dots |x_n| & (N_2) \\ \max |x_i|, \ i = 1, \dots, n & (N_3) \end{cases} \Big\} \text{ νόρμα (μετρική)}$$

– Σύστημα (αυτόνομο) διαφορικών εξισώσεων 1ης τάξης

$$\boxed{\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x})} \ (1) \quad \bar{f} : R^n \to R^n \quad \bar{f} = (f_1(\bar{x}), \dots, f_n(\bar{x}))$$

$\text{“}\cdot\text{”} = \frac{d}{dt}$ $\qquad f_i : R^n \to R, \ i = 1, \dots, n$

$\bar{f}(\bar{x}) = \bar{0} \to f_1(\bar{x}) = f_2(\bar{x}) = \dots = 0 \Rightarrow$

$\bar{x} = \bar{x}^0$ σημεία ισορροπίας (equilibrium points)
ή κρίσιμα σημεία (critical points)

Στην αρχή του χρόνου $t = t_0$, έχουμε

$\bar{x}(t_0) = \bar{x}_0$ (Α.Σ) $(x_i(t_0) = x_{i0}, \ i = 1, \dots, n)$

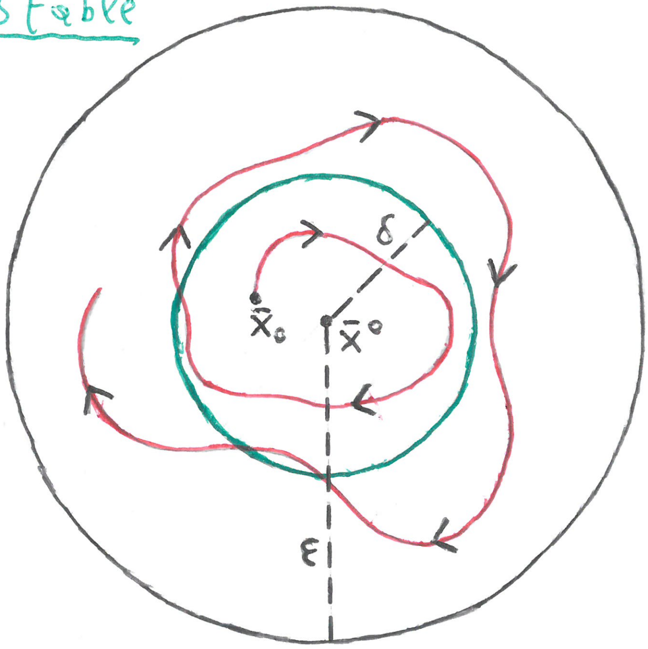
Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε $t_0 = 0$.

Η απόσταση δύο σημείων $\bar{a}, \bar{\beta}$ στο χώρο R^n:

$d(\bar{a}, \bar{\beta}) = \|\bar{a} - \bar{\beta}\|$

– Ευστάθεια κρίσιμων σημείων κατά Lyapunov

stable



$\bar{x}^0$ ευσταθές (stable)

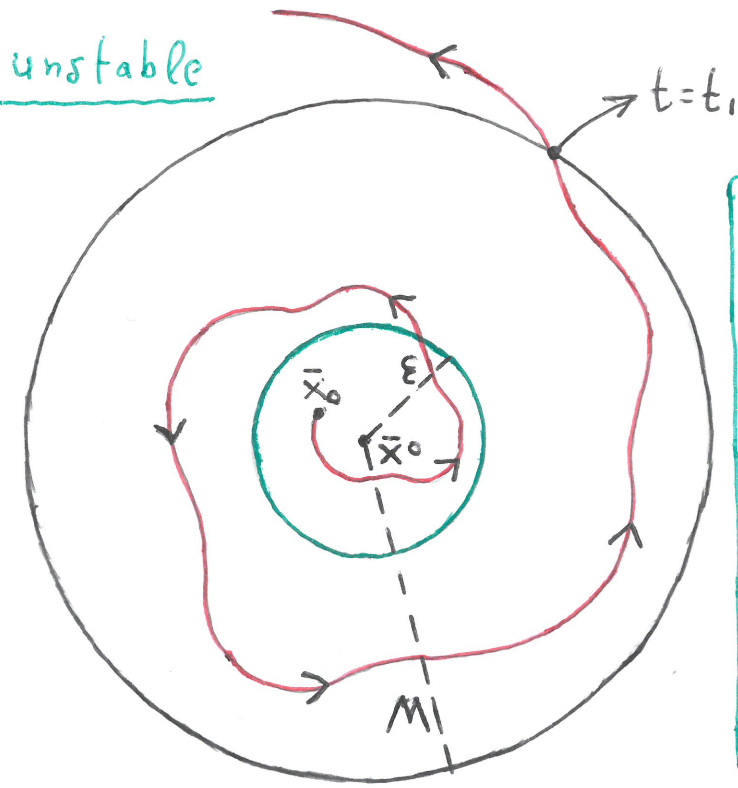
$\forall \varepsilon > 0$ (οσοδήποτε μικρό)

$\exists\ \delta(\varepsilon) > 0$ (με $\delta \leq \varepsilon$) :

Αν $\|\bar{x}_0 - \bar{x}^0\| < \delta \Longrightarrow$

$$\|\bar{x}(t) - \bar{x}^0\| < \varepsilon \quad \forall t > 0$$

unstable



$\bar{x}^0$ ασταθές (unstable)

$\forall M > 0$ (οσοδήποτε μεγάλο)

και

$\forall\ \varepsilon > 0$ (οσοδήποτε μικρό)

$(\varepsilon < M)$:

Αν $\|\bar{x}_0 - \bar{x}^0\| < \varepsilon \Longrightarrow$

$$\exists\ t_1 : \forall t > t_1 \quad \|\bar{x}(t) - \bar{x}^0\| > M$$

– Γραμμική προσέγγιση (Τοπική γραμμικοποίηση)

Αν η συνάρτηση $\bar{f}$ στο σύστημα (1) μπορεί να γραφεί με τη μορφή:

$$\bar{f}(\bar{x}) = P_{n\times n}(\bar{x} - \bar{x}^{o}) + \bar{g}(\bar{x}) \qquad (2)$$

όπου $\bar{x}^{o}$ κρίσιμο σημείο, P σταθερό $n \times n$ μητρώο και $\bar{g}: R^n \rightarrow R^n$, και ισχύει ότι:

$$\boxed{\lim_{\bar{x}\to\bar{x}^{o}} \frac{\|\bar{g}(\bar{x})\|}{\|\bar{x}-\bar{x}^{o}\|} = 0} \qquad (3)$$

τότε το γραμμικό σύστημα

$$\boxed{\dot{\bar{x}} = P(\bar{x} - \bar{x}^{o})} \qquad (4)$$

είναι η γραμμική προσέγγιση (linear approximation) του (1) και η συνθήκη (3) καλείται συνθήκη γραμμικοποίησης, σημαίνει δε ότι:

Σε μία περιοχή **κοντά** στο σημείο ισορροπίας οι μή γραμμικοί όροι είναι **αμελητέοι** σε σύγκριση με τους γραμμικούς και το σύστημα μπορεί να **γραμμικοποιηθεί** μέσω της προσέγγισης (4).

Έτσι μπορεί να διατυπωθεί η παρακάτω πρόταση:

Πρόταση

Αν το δεξί μέλος ενός μη γραμμικού συστήματος μπορεί να γραφεί με τη μορφή (2) και ισχύει η συνθήκη γραμμικοποίησης (3), τότε σε μία μικρή περιοχή γύρω από το σημείο ισορροπίας, η δυναμική συμπεριφορά του συστήματος (λύσεις, ευστάθεια, πορτραίτα φάσεων) μπορεί να προσεγγιστεί ικανοποιητικά από το γραμμικό σύστημα (4).

– Δισδιάστατο αυτόνομο μη γραμμικό σύστημα

$$\bar{x}(t) = (x(t), y(t))^T, \quad \|\bar{x}\| = |x| + |y| \quad (N_2)$$

$$(1): \begin{cases} \dot{x} = p(x,y) \\ \dot{y} = q(x,y) \end{cases} \quad \left.\begin{matrix} p(x,y)=0 \\ q(x,y)=0 \end{matrix}\right\} \rightarrow (x,y) = (x^0, y^0)$$

κρίσιμα σημεία

Αν p, q είναι αναλυτικές ως προς x, y $\rightarrow$ μπορούν να αναπτυχθούν κατά Taylor:

$$p(x,y) = p_x(x-x^0) + p_y(y-y^0) + u(x,y)$$
$$q(x,y) = q_x(x-x^0) + q_y(y-y^0) + v(x,y)$$

$$p_i = \frac{\partial p}{\partial x_i}\Big|_{(x^0,y^0)}, \quad q_i = \frac{\partial q}{\partial x_i}\Big|_{(x^0,y^0)} \qquad u, v = O(\|\bar{x}\|^2)$$

(δεύτερης τάξης)

δηλαδή το δεξί μέλος του συστήματος γράφεται με τη μορφή (2), όπου

$$P_{2\times 2} = J_0 = \begin{pmatrix} p_x & p_y \\ q_x & q_y \end{pmatrix}_{(x^0,y^0)} = \left.\frac{\partial(p,q)}{\partial(x,y)}\right|_{(x^0,y^0)}$$

δηλαδή η Ιακωβιανή της $\bar{f}=(p,q)$ στο (x^0,y^0), και

$$\bar{g}(x,y) = (u(x,y), v(x,y)).$$

Επίσης, η ποσότητα που εμπλέκεται στη συνθήκη γραμμικοποίησης είναι

$$\frac{|u(x,y)|+|v(x,y)|}{|x-x^0|+|y-y^0|}$$

η οποία είναι μικρότερη από ένα (άπειρο) άθροισμα όρων της μορφής

$$A = b\,\frac{|(x-x^0)^{\kappa}(y-y^0)^{\lambda}|}{|x-x^0|+|y-y^0|}, \quad b\in R_+, \quad \kappa,\lambda\in Z_+$$

Καθώς έχουμε ότι

$$0<A<b\,\frac{|x-x^0|^{\cancel{\kappa}\,\kappa-1}|y-y^0|^{\lambda}}{\cancel{|x-x^0|}} \quad \text{ή} \quad 0<A<b\,\frac{|x-x^0|^{\kappa}|y-y^0|^{\cancel{\lambda}\,\lambda-1}}{\cancel{|y-y^0|}}$$

είναι προφανές ότι $\lim\limits_{(x,y)\to(x^0,y^0)} A = 0$ και συνεπώς ισχύει η συνθήκη γραμμικοποίησης (3), δηλαδή

$$\lim_{(x,y)\to(x^0,y^0)} \frac{|u(x,y)|+|v(x,y)|}{|x-x^0|+|y-y^0|} = 0$$

Συνεπώς σύμφωνα με την παραπάνω πρόταση, σε μία μικρή περιοχή γύρω απο το (x^o, y^o), το μη γραμμικό σύστημα (1) μπορεί να γραμμικοποιηθεί αμελώντας τους μη γραμμικούς όρους, με γραμμική προσέγγιση

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \end{pmatrix} = J_o \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} \xi = x - x^o \\ \eta = y - y^o \end{matrix} \qquad (5)$$

ή $\dot{\bar{\xi}} = J_o \bar{\xi}$, $\bar{\xi} = (\xi, \eta)^T$.

– Παράδειγμα 1

$$\left.\begin{cases} \dot{x} = (2+x)(y-x) = p(x,y) \\ \dot{y} = (2-x)(y+x) = q(x,y) \end{cases}\right\} \quad p = q = 0 \longrightarrow$$

Σημεία ισορροπίας:

$A(-2,2)$, $B(0,0)$, $\Gamma(2,2)$

Οι p, q είναι αναλυτικές $\longrightarrow$ Taylor:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = J_o \begin{pmatrix} x - x^o \\ y - y^o \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix}, \quad u, v = O(\|\bar{x}\|^2).$$

Ισχύει η συνθήκη γραμμικοποίησης:

$$\lim_{(x,y)\to(x^o,y^o)} \frac{|u(x,y)| + |v(x,y)|}{|x - x^o| + |y - y^o|} = 0$$

άρα

σε μια μικρή περιοχή γύρω από το κρίσιμο σημείο (x°, y°) ...., με γραμμική προσέγγιση:

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \end{pmatrix} = J_0 \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \quad J_0 = \begin{pmatrix} y-2x-2 & 2+x \\ -y-2x+2 & 2-x \end{pmatrix}_{(x^\circ, y^\circ)}$$

$$(\xi, \eta) = (x - x^\circ, y - y^\circ)$$

$\boxed{A(-2,2)}$: $J_0 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 4 \rightarrow$ ασταθής εκφυλισμένος ισόμβος

$\boxed{B(0,0)}$: $J_0 = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \left.\begin{matrix} \lambda_1 = -2\sqrt{2} \\ \lambda_2 = 2\sqrt{2} \end{matrix}\right\} \rightarrow$ σάγμα (ασταθές)

$\boxed{\Gamma(2,2)}$: $J_0 = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \lambda_{1,2} = -2 \pm i2\sqrt{3} \rightarrow$ ευσταθής εστία

– Παράδειγμα 2

$$\left.\begin{matrix} \dot{x} = \mu x - x^2 - 2xy \\ \dot{y} = (\mu-1)y + xy + 3y^2 \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} = p(x,y) \\ = q(x,y) \end{matrix}\right\} p = q = 0 \longrightarrow$$

Κρίσιμα σημεία :

$A(0,0)$, $B\left(0, \frac{1-\mu}{3}\right)$, $\Gamma(\mu, 0)$, $\Delta(5\mu-2, 1-2\mu)$

Για $\mu=0$ και $\mu=1$, το A ταυτίζεται με το Γ και το A ταυτίζεται με το B, αντίστοιχα

Οι p, q είναι αναλυτικές $\longrightarrow$ Taylor :

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = J_0 \begin{pmatrix} x - x^0 \\ y - y^0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix}, \quad u, v = O(\|\bar{x}\|^2)$$

Ισχύει η συνθήκη γραμμικοποίησης :

$$\lim_{(x,y)\to(x^0,y^0)} \frac{|u(x,y)| + |v(x,y)|}{|x-x^0| + |y-y^0|} = 0$$

άρα

τοπικά, γύρω από το σημείο ισορροπίας (x^0, y^0), ...,

με γραμμική προσέγγιση :

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \end{pmatrix} = J_0 \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - x^0 \\ y - y^0 \end{pmatrix}, \quad J_0 = \begin{pmatrix} \mu - 2x - 2y & -2x \\ y & \mu - 1 + x + 6y \end{pmatrix}_{(x^0, y^0)}$$

Ας μελετήσουμε την ευστάθεια και το χαρακτήρα του (0,0).

$$J_0 = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu - 1 \end{pmatrix} \rightarrow \lambda_1 = \mu - 1, \ \lambda_2 = \mu$$

Έτσι αν

$\mu > 1$: $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \rightarrow$ ασταθής κόμβος

$\mu = 1$: $0 = \lambda_1 < \lambda_2 \rightarrow$ ασταθές

$0 < \mu < 1$: $\lambda_1 < 0 < \lambda_2 \rightarrow$ σάγμα (ασταθές)

$\mu = 0$: $\lambda_1 < 0 = \lambda_2 \rightarrow$ ευσταθές

$\mu < 0$: $\lambda_1 < \lambda_2 < 0 \rightarrow$ ασυμπτωτικά ευσταθής κόμβος