ν - οστές ρίζες μιγαδικού αριθμού

Έστω ν θετικός ακέραιος (δηλ. $\nu\in\{1,2,...\}$) και $u\in\mathbb{C}$. Θα λύσουμε στο $\mathbb{C}$ την εξίσωση $z^\nu=u$.

- Έστω $\underline{u=0}$. Τότε

$$z^\nu=0\Leftrightarrow z=0$$

- Έστω $\underline{u\neq 0}$. Προφανώς τότε πρέπει και $z\neq 0$.
  - $u=|u|e^{i\varphi}$ με φ όρισμα του u
  - $z=|z|e^{i\theta}$ με θ όρισμα του z.

  Άρα

$$z^\nu=u\Leftrightarrow |z|^\nu e^{i\nu\theta}=|u|e^{i\varphi}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}|z|^\nu=|u|\\ \nu\theta=\varphi+2\kappa\pi,\ \kappa\in\mathbb{Z}\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}|z|=\sqrt[\nu]{|u|}\\ \theta=\dfrac{\varphi+2\kappa\pi}{\nu},\ \kappa\in\mathbb{Z}\end{matrix}\right\}$$

Επομένως οι λύσεις της εξίσωσης $z^\nu=u$ με $u\neq 0$ είναι οι

$$\boxed{z_\kappa=\sqrt[\nu]{|u|}e^{i\left(\frac{\varphi+2\kappa\pi}{\nu}\right)}=\sqrt[\nu]{|u|}e^{i\left(\frac{\varphi}{\nu}+\kappa\frac{2\pi}{\nu}\right)}=\sqrt[\nu]{|u|}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{\nu}+\kappa\frac{2\pi}{\nu}\right)+i\sin\left(\frac{\varphi}{\nu}+\kappa\frac{2\pi}{\nu}\right)\right),\ \kappa\in\mathbb{Z}}$$

Έστω τώρα $\kappa\in\mathbb{Z}$. Τότε $\kappa=\lambda\nu+\upsilon$ με $\upsilon\in\{0,1,...,\nu-1\}$. Τότε:

$$z_\kappa=\sqrt[\nu]{|u|}e^{i\left(\frac{\varphi}{\nu}+\kappa\frac{2\pi}{\nu}\right)}=\sqrt[\nu]{|u|}e^{i\left(\frac{\varphi}{\nu}+(\lambda\nu+\upsilon)\frac{2\pi}{\nu}\right)}=\sqrt[\nu]{|u|}e^{i\left(\frac{\varphi}{\nu}+\upsilon\frac{2\pi}{\nu}+2\lambda\pi\right)}=\sqrt[\nu]{|u|}e^{i\left(\frac{\varphi}{\nu}+\upsilon\frac{2\pi}{\nu}\right)}=z_\upsilon$$

Συνεπώς οι ρίζες της $z^\nu=u$ με $u\neq 0$ είναι οι z_0, z_1, ..., $z_{\nu-1}$ οι οποίες είναι και διαφορετικές μεταξύ τους:

Έστω $\rho,\mu\in\{0,1,...,\nu-1\}$. Τότε

$$z_\rho=z_\mu\Leftrightarrow\sqrt[\nu]{|u|}e^{i\left(\frac{\varphi}{\nu}+\rho\frac{2\pi}{\nu}\right)}=\sqrt[\nu]{|u|}e^{i\left(\frac{\varphi}{\nu}+\mu\frac{2\pi}{\nu}\right)}\Leftrightarrow e^{i\left(\frac{\varphi}{\nu}+\rho\frac{2\pi}{\nu}\right)}=e^{i\left(\frac{\varphi}{\nu}+\mu\frac{2\pi}{\nu}\right)}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{\varphi}{\nu}+\rho\frac{2\pi}{\nu}=\frac{\varphi}{\nu}+\mu\frac{2\pi}{\nu}+2\kappa\pi,\ \kappa\in\mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow\rho-\mu=\kappa\nu,\ \kappa\in\mathbb{Z}$$

$$\underset{(-(\nu-1)\leq\rho-\mu\leq\nu-1)}{\Leftrightarrow}\rho-\mu=0\Leftrightarrow\rho=\mu$$

Συμπέρασμα: Οι διαφορετικές ρίζες της εξίσωσης $z^{\nu}=u$ με $u\neq 0$ είναι οι

$$\boxed{z_0=\sqrt[\nu]{|u|}e^{i\frac{\varphi}{\nu}}}$$

$$\boxed{z_1=\sqrt[\nu]{|u|}e^{i\left(\frac{\varphi}{\nu}+\frac{2\pi}{\nu}\right)}}$$

$$\boxed{z_2=\sqrt[\nu]{|u|}e^{i\left(\frac{\varphi}{\nu}+2\frac{2\pi}{\nu}\right)}}$$

…

$$\boxed{z_{\nu-1}=\sqrt[\nu]{|u|}e^{i\left(\frac{\varphi}{\nu}+(\nu-1)\frac{2\pi}{\nu}\right)}}$$

Παρατηρούμε ότι

- $|z_{\kappa}|=\sqrt[\nu]{|u|}$, $\kappa\in\mathbb{Z}$. Άρα οι εικόνες των z_{κ} ανήκουν σε κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\sqrt[\nu]{|u|}$.($|u|\neq 0$ αφού $u\neq 0$).
- Αν M_0 είναι η εικόνα του z_0 στο μιγαδικό επίπεδο, τότε για να βρούμε την εικόνα του z_1 στο μιγαδικό επίπεδο αρκεί να στρέψουμε κατά τη θετική φορά τη διανυσματική ακτίνα OM_0 του z_0 κατά γωνία $\frac{2\pi}{\nu}$. Έτσι βρίσκουμε την εικόνα M_1 του z_1 και συνεχίζουμε με όμοιο τρόπο για να βρούμε τις εικόνες των z_2, …, $z_{\nu-1}$.

Συμπέρασμα: Οι εικόνες στο μιγαδικό επίπεδο των διαφορετικών ριζών της εξίσωσης $z^{\nu}=u$ με $u\neq 0$ και $\nu\geq 3$ είναι κορυφές κανονικού ν-γώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\sqrt[\nu]{|u|}$. Η κεντρική γωνία αυτού του πολυγώνου είναι ως γνωστόν $\frac{2\pi}{\nu}$.

Παράδειγμα

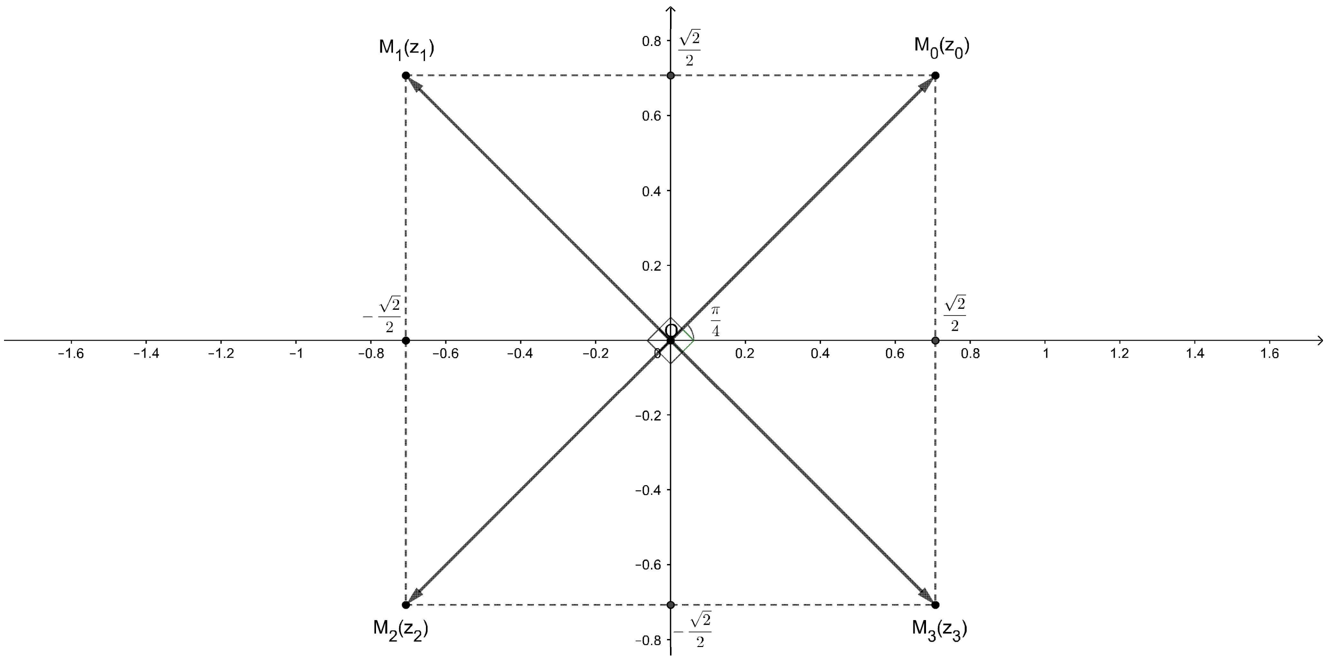
Να λυθεί η εξίσωση $z^4=-1$ και να παρασταθούν οι διαφορετικές λύσεις της στο μιγαδικό επίπεδο.

Λύση:

Προφανώς $\operatorname{Arg}(-1)=\pi$. Άρα $-1=e^{i\pi}$ και επομένως οι λύσεις της δοσμένης εξίσωσης είναι οι $z_\kappa=e^{i\left(\frac{\pi+2\kappa\pi}{4}\right)}=e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\kappa\frac{\pi}{2}\right)}$, $\kappa\in\mathbb{Z}$. Οι διαφορετικές λύσεις της $z^4=-1$ είναι οι εξής:

- $z_0=e^{i\frac{\pi}{4}}=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$
- $z_1=e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)}=e^{i\frac{3\pi}{4}}=...=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i=\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)$
- $z_2=e^{i\left(\frac{\pi}{4}+2\frac{\pi}{2}\right)}=e^{i\frac{5\pi}{4}}=...=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i=\frac{\sqrt{2}}{2}(-1-i)$
- $z_3=e^{i\left(\frac{\pi}{4}+3\frac{\pi}{2}\right)}=e^{i\frac{7\pi}{4}}=...=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i=\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$

Οι εικόνες στο μιγαδικό επίπεδο των z_0, z_1, z_2, z_3 είναι



από το οποίο προκύπτει αμέσως ότι είναι κορυφές τετραγώνου. □

ν - οστές ρίζες της μονάδας

Επειδή $1=e^{i0}$, τότε οι λύσεις της εξίσωσης $z^{\nu}=1$ είναι οι $z_{\lambda}=e^{i\lambda\frac{2\pi}{\nu}}$, $\lambda\in\mathbb{Z}$, ενώ οι διαφορετικές λύσεις της εξίσωσης $z^{\nu}=1$ είναι οι

$$\boxed{z_{\kappa}=e^{i\frac{2\kappa\pi}{\nu}},\ \kappa=0,1,2,\ldots,\nu-1}$$

Επίσης οι εικόνες στο μιγαδικό επίπεδο των λύσεων της $z^{\nu}=1$ με $\nu\geq 3$ αποτελούν κορυφές κανονικού ν-γώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας 1 (μάλιστα μία κορυφή του κανονικού ν-γώνου είναι το σημείο $(1,0)$ το οποίο είναι η εικόνα του $z_0=1$). Ακόμα παρατηρούμε αμέσως ότι αν θέσουμε $w=z_1=e^{i\frac{2\pi}{\nu}}$, τότε

$$z_{\lambda}=w^{\lambda} \text{ για κάθε } \lambda\in\mathbb{Z}$$

Παράδειγμα

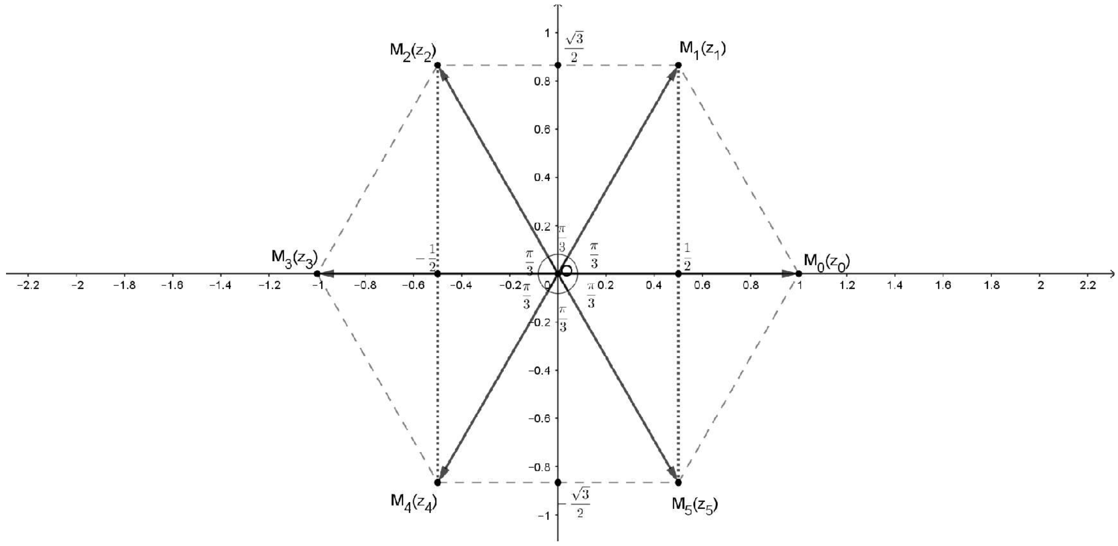
Να λυθεί η εξίσωση $z^6=1$ και να παρασταθούν οι διαφορετικές λύσεις της στο μιγαδικό επίπεδο.

Λύση:

Οι λύσεις της εξίσωσης $z^6=1$ είναι οι $z_{\lambda}=e^{i\lambda\frac{2\pi}{6}}=e^{i\lambda\frac{\pi}{3}}$, $\lambda\in\mathbb{Z}$. Οι διαφορετικές λύσεις της $z^6=1$ είναι οι εξής:

- $z_0=e^{i0}=1$
- $z_1=e^{i\frac{\pi}{3}}=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$
- $z_2=e^{i2\frac{\pi}{3}}=\ldots=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$
- $z_3=e^{i\pi}=\ldots=-1$
- $z_4=e^{i4\frac{\pi}{3}}=\ldots=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$
- $z_5=e^{i5\frac{\pi}{3}}=\ldots=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

Οι εικόνες στο μιγαδικό επίπεδο των z_0, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 είναι



από το οποίο προκύπτει αμέσως ότι είναι κορυφές εξαγώνου. □

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να λύσετε στο $\mathbb{C}$ την εξίσωση

$$z^9 - z^5 + z^4 = 1$$

2. Να λύσετε στο $\mathbb{C}$ την εξίσωση

$$z^6 + 2z^5 + 2z^4 + 2z^3 + 2z^2 + 2z + 1 = 0$$

3. Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των ριζών της εξίσωσης $z^3 + 3z^2 + 3z + 9 = 0$ είναι κορυφές ισόπλευρου τριγώνου. □