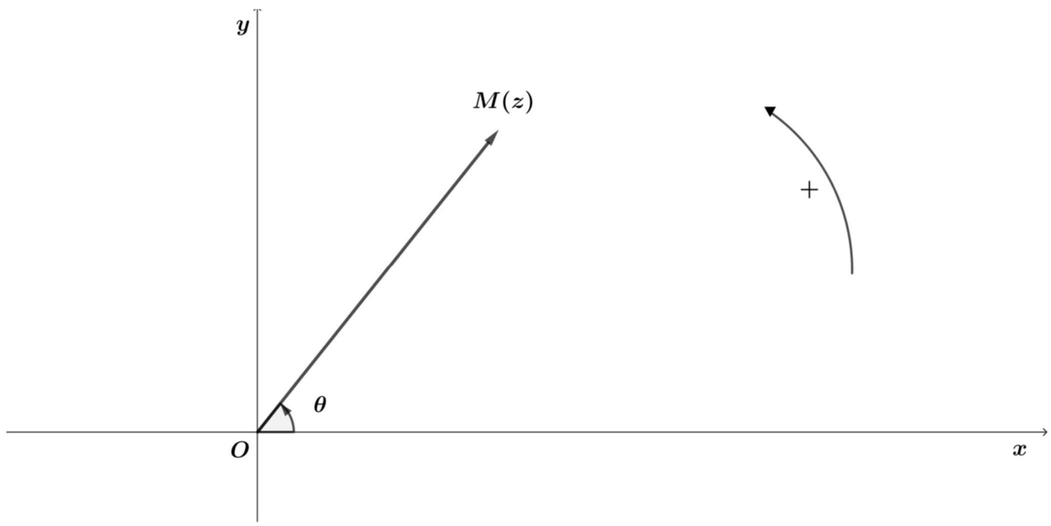
<u>ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΗ ΜΟΡΦΗ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ</u>

Έστω z ένας μη μηδενικός μιγαδικός αριθμός και $\overrightarrow{OM}$ η διανυσματική του ακτίνα. **Όρισμα** του z (συμβολισμός: $\arg(z)$) καλούμε <u>οποιαδήποτε</u> γωνία με αρχική πλευρά το θετικό ημιάξονα Ox και τελική πλευρά την ημιευθεία OM.



Από όλα τα ορίσματα του z ένα μόνο βρίσκεται στο διάστημα $(-\pi,\pi]$. Αυτό το όρισμα καλείται **πρωτεύον όρισμα** του z και συμβολίζεται με $\mathbf{Arg(z)}$ (στη βιβλιογραφία αρκετές φορές το πρωτεύον όρισμα ορίζεται στο διάστημα $[0,2\pi)$). Από τα παραπάνω έχουμε αμέσως τα εξής:

- Τα ορίσματα του z είναι ακριβώς όλες οι γωνίες
$$\mathrm{Arg}(z)+2\kappa\pi\,,\ \kappa\in\mathbb{Z}$$
- Αν θ είναι όρισμα του z, τότε τα ορίσματα του z είναι ακριβώς όλες οι γωνίες
$$\theta+2\lambda\pi\,,\ \lambda\in\mathbb{Z}$$
Συνεπώς αν θ_1, θ_2 είναι ορίσματα του z, τότε υπάρχει $\nu\in\mathbb{Z}$ τέτοιο ώστε
$$\theta_1-\theta_2=2\nu\pi$$
- Το ζευγάρι $(|z|,\mathrm{Arg}(z))$ είναι πολικές συντεταγμένες της εικόνας του z.

<u>Σημείωση 1:</u> Για το μιγαδικό αριθμό $z=0$ δεν ορίζεται όρισμα. Όμως κάποιες φορές, επειδή πρέπει να συμπεριλάβουμε και το $z=0$ στη μελέτη που κάνουμε, χρειάζεται να θεωρήσουμε όρισμα και για το μιγαδικό αριθμό $z=0$. Σε αυτές τις περιπτώσεις ως όρισμα του μιγαδικού $z=0$ μπορούμε να θεωρήσουμε οποιαδήποτε γωνία $\theta \in \mathbb{R}$ και επομένως ως πρωτεύον όρισμα του $z=0$ μπορούμε να θεωρήσουμε οποιαδήποτε γωνία του συνόλου $(-\pi,\pi]$ (στην πράξη ως ορίσματα για το μιγαδικό $z=0$ επιλέγονται οι γωνίες εκείνες οι οποίες εξυπηρετούν καλύτερα τη διαδικασία επίλυσης του προβλήματος που εξετάζουμε). □

Από τα προηγούμενα έπεται αμέσως ότι αν $\theta \in (-\pi,\pi]$ και Ο είναι η αρχή των αξόνων, τότε ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z για τους οποίους ισχύει $\operatorname{Arg}(z)=\theta$ είναι η ημιευθεία Οδ η οποία σχηματίζει με τον ημιάξονα Οx γωνία θ.

Αν τώρα $z=x+yi$ ($x,y \in \mathbb{R}$) με $z \neq 0$, τότε εύκολα διαπιστώνουμε (άσκηση) ότι

$$\boxed{\operatorname{Arg}(z)=\begin{cases} \operatorname{Arc}\tan\left(\dfrac{y}{x}\right), & x>0 \\ \pi+\operatorname{Arc}\tan\left(\dfrac{y}{x}\right), & x<0 \text{ και } y\geq 0 \\ \operatorname{Arc}\tan\left(\dfrac{y}{x}\right)-\pi, & x<0 \text{ και } y<0 \\ \dfrac{\pi}{2}, & x=0 \text{ και } y>0 \\ -\dfrac{\pi}{2}, & x=0 \text{ και } y<0 \end{cases}}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να βρεθεί και να σχεδιαστεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z για τους οποίους ισχύει

$$\operatorname{Arg}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)=\frac{\pi}{4}$$

Λύση:

Έστω $z=x+yi$, $x,y\in\mathbb{R}$. Η παράσταση $\dfrac{z+1}{z-1}$ ορίζεται προφανώς για $z\neq 1$. Άρα πρέπει $(x,y)\neq(1,0)$. Τότε για $(x,y)\neq(1,0)$ έχουμε

- $$\frac{z+1}{z-1}=\ldots=\frac{(x+1)+yi}{(x-1)+yi}=\frac{((x+1)+yi)((x-1)-yi)}{((x-1)+yi)((x-1)-yi)}=\ldots=\frac{x^2+y^2-1}{(x-1)^2+y^2}-\frac{2y}{(x-1)^2+y^2}i$$

- $$\operatorname{Arg}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)=\frac{\pi}{4} \underset{\left(\begin{array}{l}\underline{\text{Γενικά}}\text{: αν } w=\alpha+bi\\ \text{τότε } \operatorname{Arg}(w)=\frac{\pi}{4} \text{ αν και}\\ \text{μόνο αν } b=\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\alpha\\ \text{και } b\geq 0 \text{ (ή } \alpha\geq 0\text{) - γιατί;}\end{array}\right)}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{c}\operatorname{Im}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\operatorname{Re}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)\\ \operatorname{Im}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)\geq 0\end{array}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}-\frac{2y}{(x-1)^2+y^2}=\frac{x^2+y^2-1}{(x-1)^2+y^2}\\ -\frac{2y}{(x-1)^2+y^2}\geq 0\end{array}\right\}\Leftrightarrow$$

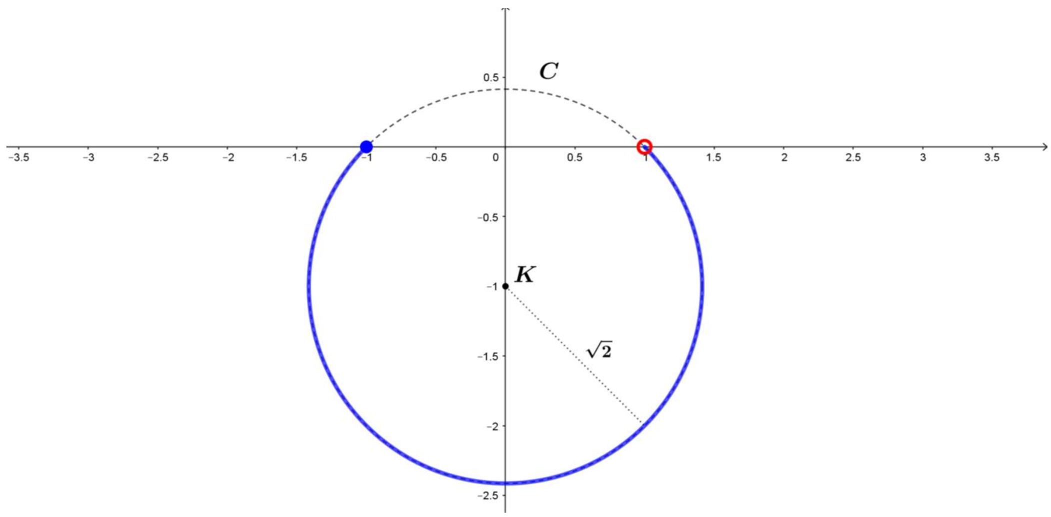
$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}-2y=x^2+y^2-1\\ -2y\geq 0\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}x^2+y^2+2y=1\\ y\leq 0\end{array}\right\}\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}x^2+(y+1)^2=\left(\sqrt{2}\right)^2\\ y\leq 0\end{array}\right\}$$

Επειδή το σημείο $(1,0)$ ικανοποιεί προφανώς τις σχέσεις $x^2+(y+1)^2=\left(\sqrt{2}\right)^2$ και $y\leq 0$, τότε έπεται αμέσως ότι ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι τα σημεία του κύκλου

$$C:\ x^2+(y+1)^2=\left(\sqrt{2}\right)^2$$

με $y\leq 0$ εκτός του σημείου $(1,0)$:



$\square$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να βρεθεί και να σχεδιαστεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z για τους οποίους ισχύει:

i) $\text{Arg}(z-1+i)=\dfrac{\pi}{6}$

ii) $\text{Arg}(z+2-3i)=\dfrac{\pi}{2}$

iii) $\text{Arg}\left(\dfrac{z-i}{z+1}\right)=-\dfrac{\pi}{2}$

2. Μεταξύ των μιγαδικών z που ικανοποιούν τη συνθήκη $|z+2-5i|\le 2$, να βρείτε εκείνον που έχει

i) το μικρότερο πρωτεύον όρισμα

ii) το μεγαλύτερο πρωτεύον όρισμα. $\square$

Έστω τώρα ένας μιγαδικός αριθμός $z=x+yi$ ($x,y\in\mathbb{R}$) με $z\neq 0$ και $r=\sqrt{x^2+y^2}$ το μέτρο του (προφανώς $r>0$). Αν θ είναι ένα όρισμά του z, τότε ως γνωστόν έχουμε

$$\cos\theta = \frac{x}{r} \quad \text{και} \quad \sin\theta = \frac{y}{r}$$

και επομένως

$$x = r\cdot\cos\theta \quad \text{και} \quad y = r\cdot\sin\theta$$

Συνεπώς ο μιγαδικός αριθμός z γράφεται

$$z = x + yi = r\cos\theta + r\sin\theta\cdot i = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

Τριγωνομετρική μορφή του z καλείται μία (οποιαδήποτε) έκφραση του z ως

$$\boxed{z = r(\cos\theta + i\sin\theta)} \qquad (1)$$

όπου r είναι το μέτρο του z και θ είναι ένα (οποιοδήποτε) όρισμά του.

<u>Σημείωση 2:</u> Επειδή

$$0 = 0(\cos\theta + i\sin\theta),\ \theta\in\mathbb{R}$$

τότε έπεται αμέσως ότι ο μιγαδικός $z=0$ γράφεται στη μορφή (1) με $r=0$ και θ οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό. Επίσης για το μιγαδικό αριθμό $z=0$ έχουμε ότι $|z|=0$ και ότι οποιαδήποτε γωνία $\theta\in\mathbb{R}$ μπορεί να θεωρηθεί όρισμά του (βλ. σχετικά τη Σημείωση 1). Επομένως μπορούμε να θεωρήσουμε ότι και ο μιγαδικός αριθμός $z=0$ έχει τριγωνομετρική μορφή με $r=|z|=0$ και όρισμα οποιαδήποτε γωνία $\theta\in\mathbb{R}$.

□

<u>Πρόταση 3:</u> Έστω $r_1>0$, $r_2>0$ και $\theta_1,\theta_2\in\mathbb{R}$. Τότε

$$r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} r_1 = r_2 \\ \text{και} \\ \theta_1-\theta_2 = 2\kappa\pi \text{ για κάποιο } \kappa\in\mathbb{Z}\end{matrix}\right\}$$

<u>Απόδειξη:</u>

(⇒) Έστω $r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$. Τότε:

$$r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} r_1\cos\theta_1 = r_2\cos\theta_2 \\ r_1\sin\theta_1 = r_2\sin\theta_2\end{matrix}\right\}$$

και επομένως έχουμε

- $\left.\begin{cases} r_1^{\,2}\cos^2\theta_1 = r_2^{\,2}\cos^2\theta_2 \\ r_1^{\,2}\sin^2\theta_1 = r_2^{\,2}\sin^2\theta_2 \end{cases}\right\} \Rightarrow r_1^{\,2}\left(\sin^2\theta_1+\cos^2\theta_1\right) = r_2^{\,2}\left(\sin^2\theta_2+\cos^2\theta_2\right) \Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow r_1^{\,2} = r_2^{\,2} \underset{(r_1,r_2>0)}{\Leftrightarrow} r_1 = r_2$

- $\left.\begin{cases} r_1\cos\theta_1 = r_2\cos\theta_2 \\ r_1\sin\theta_1 = r_2\sin\theta_2 \end{cases}\right\} \underset{(r_1=r_2\neq 0)}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{matrix} \cos\theta_1 = \cos\theta_2 \\ \sin\theta_1 = \sin\theta_2 \end{matrix}\right\}$

  Άρα

  $$1 = \cos^2\theta_1 + \sin^2\theta_1 = \cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2 = \cos(\theta_1-\theta_2)$$

  Συνεπώς υπάρχει $\kappa\in\mathbb{Z}$ τέτοιο ώστε $\theta_1-\theta_2 = 2\kappa\pi$.

($\Leftarrow$) Προφανής. □

<u>Παρατήρηση 4:</u> Έστω $z\in\mathbb{C}$ με $z\neq 0$. Προφανώς ο z δέχεται τριγωνομετρική μορφή. Τότε, από την προηγηθείσα ανάλυση, έπεται αμέσως ότι κάθε γραφή του z στη μορφή $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ με $r>0$ και $\theta\in\mathbb{R}$ είναι τριγωνομετρική μορφή του z, δηλ. το r είναι το μέτρο του z και το θ είναι (ένα) όρισμα του z. Το ίδιο αποτέλεσμα ισχύει και για το μιγαδικό $z=0$ θεωρώντας γενικά ότι $r,\theta\in\mathbb{R}$, δηλ. κάθε έκφραση της μορφής $0 = r(\cos\theta+i\sin\theta)$ με $r,\theta\in\mathbb{R}$, είναι τριγωνομετρική μορφή του μιγαδικού $z=0$ [αυτό σημαίνει ότι από τη σχέση $0 = r(\cos\theta+i\sin\theta)$ έπεται (απόδειξη;) ότι $r=0$ (δηλ. $r=|z|$) και ότι το θ είναι (ένα) όρισμα του μιγαδικού $z=0$ - κάθε $\theta\in\mathbb{R}$ μπορεί να θεωρηθεί όρισμα του μιγαδικού $z=0$ (βλ. σχετικά και τη Σημείωση 1)]. Επομένως αν $z\in\mathbb{C}$, τότε κάθε γραφή του z στη μορφή

$$\boxed{z = r(\cos\theta+i\sin\theta),\ \ r\geq 0,\ \theta\in\mathbb{R}}$$

είναι τριγωνομετρική μορφή του z (αφού τότε, όπως τονίσαμε και παραπάνω, $r=|z|$ και το θ είναι ένα όρισμα του z). □

Από την Πρόταση 3 έπεται αμέσως το εξής

<u>Θεώρημα 5:</u> Έστω $z_1,z_2\in\mathbb{C}^*$ και $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$, $z_2 = r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$ τριγωνομετρικές μορφές των z_1, z_2 αντίστοιχα. Τότε

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} r_1 = r_2 \\ \text{και} \\ \theta_1-\theta_2 = 2\kappa\pi \text{ για κάποιο } \kappa\in\mathbb{Z}\end{matrix}\right\}$$ □

Θεώρημα 6: Έστω οι μιγαδικοί $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ και $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$, $r_1, r_2, \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$. Τότε

i) $$\boxed{z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2))}$$

(άρα $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$)

ii) αν $z_2 \neq 0$ έχουμε

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2))}$$

(άρα $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$)

Απόδειξη:

i) $$z_1 z_2 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) = \ldots =$$
$$= r_1 r_2((\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \cos\theta_2\sin\theta_1)) =$$
$$= r_1 r_2(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2))$$

ii) Για $z_2 \neq 0$ έχουμε

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)} = \frac{r_1}{r_2}\frac{\cos\theta_1 + i\sin\theta_1}{\cos\theta_2 + i\sin\theta_2} =$$
$$= \frac{r_1}{r_2}\frac{(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)}{(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)} = \ldots =$$
$$= \frac{r_1}{r_2}\frac{((\cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_2\cos\theta_1))}{\cos^2\theta_2 + \sin^2\theta_2} = \ldots =$$
$$= \frac{r_1}{r_2}(\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)) \qquad \square$$

Παρατήρηση 7: Έστω $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, $r, \theta \in \mathbb{R}$.

i) Από το Θεώρημα 6ii) έπεται αμέσως ότι για $z \neq 0$ έχουμε

$$\frac{1}{z} = \frac{1(\cos 0 + i\sin 0)}{r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))} = \boxed{\frac{1}{r}(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))} = \frac{1}{r}(\cos\theta - i\sin\theta)$$

(άρα $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z)$)

ii) Από το Θεώρημα 6i) έπεται αμέσως ότι

$$\boxed{z^{\kappa} = r^{\kappa}\left(\cos(\kappa\theta) + i\sin(\kappa\theta)\right),\ \kappa \in \{1,2,3,...\}} \qquad (2)$$

(άρα ένα όρισμα του z^{κ} είναι το $\kappa \cdot \arg(z)$ - η απόδειξη της σχέσης (2) γίνεται με τη μέθοδο της Μαθηματικής Επαγωγής). Η παραπάνω σχέση (2) καλείται **τύπος του De Moivre**. Αν τώρα έχουμε ότι $z \neq 0$, τότε η σχέση (2) ισχύει για κάθε $\kappa \in \mathbb{Z}$ (απόδειξη;) . □

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Να υπολογιστεί η παράσταση

$$A = \frac{(1+i)^{32}}{\left(\sqrt{3}-i\right)^{6}}$$

Λύση:

Γράφουμε τους μιγαδικούς αριθμούς $1+i$ και $\sqrt{3}-i$ σε τριγωνομετρική μορφή:

$$1+i = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \quad \text{και} \quad \sqrt{3}-i = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

(απόδειξη;). Συνεπώς:

- $(1+i)^{32} = \left(\sqrt{2}\right)^{32}\left(\cos\left(32\cdot\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(32\cdot\frac{\pi}{4}\right)\right) = 2^{16}\left(\cos(8\pi) + i\sin(8\pi)\right)$
- $\left(\sqrt{3}-i\right)^{6} = 2^{6}\left(\cos\left(6\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) + i\sin\left(6\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)\right) = 2^{6}\left(\cos(-\pi) + i\sin(-\pi)\right)$

και επομένως

$$A = \frac{(1+i)^{32}}{\left(\sqrt{3}-i\right)^{6}} = \frac{2^{16}}{2^{6}}\left(\cos(8\pi-(-\pi)) + i\sin(8\pi-(-\pi))\right) =$$

$$= 2^{10}\left(\cos(9\pi) + i\sin(9\pi)\right) = 2^{10}\left(\cos\pi + i\sin\pi\right) = -2^{10}$$

Παρατήρηση 8: Η τριγωνομετρική μορφή ενός μιγαδικού αριθμού (όπως φαίνεται και από το παραπάνω Παράδειγμα) είναι ιδιαίτερα χρήσιμη στον υπολογισμό των δυνάμεων. □

2. Έστω $z = 1+\sqrt{3}\cdot i$ και $w = 1+i$.

i) Να δείξετε ότι $\mathrm{Arg}\left(\frac{z}{w}\right)=\frac{\pi}{12}$

ii) Να υπολογίσετε τις τιμές $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ και $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$

<u>Λύση:</u>

i) Γράφουμε τους μιγαδικούς αριθμούς z, w και σε τριγωνομετρική μορφή:

$$z=1+\sqrt{3}\cdot i=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) \quad \text{και} \quad w=1+i=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

(απόδειξη;). Τότε

$$\frac{z}{w}=\frac{2}{\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)\right)=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$$

Άρα, από την Παρατήρηση 4, έπεται αμέσως ότι η $\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$ είναι (μία) τριγωνομετρική μορφή του μιγαδικού $\frac{z}{w}$ και συνεπώς ένα όρισμα του μιγαδικού αριθμού $\frac{z}{w}$ είναι το $\frac{\pi}{12}$. Εφόσον $\frac{\pi}{12}\in(-\pi,\pi]$, τότε έπεται αμέσως ότι $\mathrm{Arg}\left(\frac{z}{w}\right)=\frac{\pi}{12}$.

ii) $$\frac{z}{w}=\frac{1+\sqrt{3}\cdot i}{1+i}=\frac{\left(1+\sqrt{3}\cdot i\right)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\ldots=\frac{\left(1+\sqrt{3}\right)+\left(\sqrt{3}-1\right)i}{2}=\frac{1+\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}-1}{2}i$$

Επομένως

$$\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)=\frac{1+\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}-1}{2}i \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{1+\sqrt{3}}{2}\\ \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{3}-1}{2}\end{array}\right\} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\left(1+\sqrt{3}\right)\sqrt{2}}{4}\\ \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\left(\sqrt{3}-1\right)\sqrt{2}}{4}\end{array}\right\}$$

□

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Έστω $z_1 = 1 - i$ και $z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i$. Να βρείτε τα $\mathrm{Arg}\left(z_1 \cdot z_2^3\right)$ και $\mathrm{Arg}\left(\frac{z_1^3}{z_2}\right)$.

2. Να υπολογίσετε την παράσταση

$$A = \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{-6} + \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{2000}$$

3. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\theta \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$\sin(3\theta) = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta \quad \text{και} \quad \cos(3\theta) = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$

□

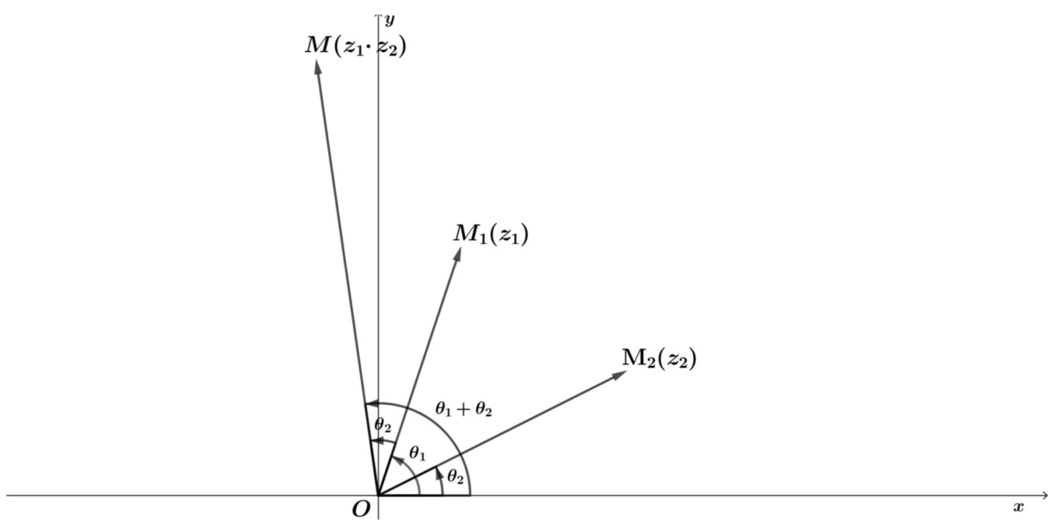
ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ - ΠΗΛΙΚΟΥ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Γεωμετρική ερμηνεία γινομένου

Έστω δύο μη μηδενικοί μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2 και $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$, $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ τριγωνομετρικές μορφές των z_1, z_2 αντίστοιχα. Τότε από το Θεώρημα 6i) έχουμε ότι

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2))$$

και επομένως έχουμε το σχήμα



($|\overrightarrow{OM_1}| = r_1$, $|\overrightarrow{OM_2}| = r_2$ και $|\overrightarrow{OM}| = r_1 r_2$) από το οποίο έπεται αμέσως ότι ο πολλαπλασιασμός του μιγαδικού z_1 με το μιγαδικό z_2 σημαίνει στροφή της διανυσματικής ακτίνας $\overrightarrow{OM_1}$ του z_1 γύρω από την αρχή των αξόνων κατά γωνία θ_2 και στη συνέχεια πολλαπλασιασμός της με $r_2 = |\overrightarrow{OM_2}|$ (προφανώς μπορούμε πρώτα να στρέψουμε τη διανυσματική ακτίνα $\overrightarrow{OM_2}$ του z_2 γύρω από την αρχή των αξόνων κατά γωνία θ_1 και στη συνέχεια να την πολλαπλασιάσουμε με $r_1 = |\overrightarrow{OM_1}|$). Η διανυσματική ακτίνα του μιγαδικού αριθμού $z = 0$ είναι το μηδενικό διάνυσμα και επομένως η "στροφή" της γύρω από την αρχή των αξόνων κατά οποιαδήποτε γωνία $\theta \in \mathbb{R}$ παραμένει προφανώς το μηδενικό διάνυσμα. Επομένως η παραπάνω γεωμετρική ερμηνεία που δώσαμε για το γινόμενο δύο μη μηδενικών μιγαδικών αριθμών z_1 και z_2 μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ισχύει και στην περίπτωση που $z_1 = 0$ ή $z_2 = 0$.

<u>Παρατήρηση 9:</u> Από τα παραπάνω έχουμε αμέσως ότι ο πολλαπλασιασμός ενός μιγαδικού αριθμού z με το μιγαδικό $w = \cos\theta + i\sin\theta$ ($\theta \in \mathbb{R}$) στρέφει τη διανυσματική ακτίνα του z γύρω από την αρχή των αξόνων κατά γωνία θ χωρίς να μεταβάλλει το μήκος της (προφανές αφού $|w| = 1$). Οπότε, από την προηγηθείσα ανάλυση και τον τρόπο παράστασης ενός μιγαδικού αριθμού με διάνυσμα, έχουμε αμέσως το εξής:

Σε ένα καρτεσιανό επίπεδο η στροφή ενός διανύσματος $\vec{\mathbf{u}} = (x, y)$ γύρω από την αρχή των αξόνων κατά γωνία $\theta \in \mathbb{R}$, περιγράφεται από το γινόμενο

$$(x + yi) \cdot (\cos\theta + i\sin\theta)$$

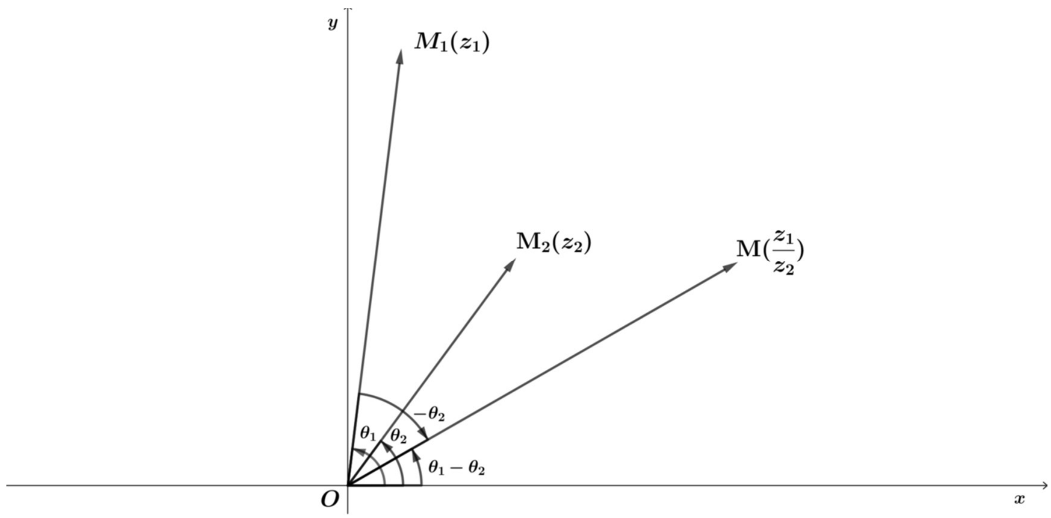
□

<u>Γεωμετρική ερμηνεία πηλίκου</u>

Έστω z_1, z_2 δύο μιγαδικοί αριθμοί με $z_2 \neq 0$ και $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$, $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ τριγωνομετρικές μορφές των z_1, z_2 αντίστοιχα. Τότε (βλ. Παρατήρηση 7) έχουμε

$$\frac{1}{z_2}=\frac{1}{r_2}(\cos(-\theta_2)+i\sin(-\theta_2))$$

και επειδή $\frac{z_1}{z_2}=z_1\cdot\frac{1}{z_2}$, τότε, από τη γεωμετρική ερμηνεία του γινομένου δύο μιγαδικών αριθμών, έπεται αμέσως ότι το πηλίκο του μιγαδικού z_1 με το μιγαδικό z_2 σημαίνει στροφή της διανυσματικής ακτίνας $\overrightarrow{OM_1}$ του z_1 κατά γωνία $-\theta_2$ και στη συνέχεια πολλαπλασιασμός της με $\frac{1}{r_2}=\frac{1}{|\overrightarrow{OM_2}|}$:



Επίσης από τα παραπάνω έχουμε αμέσως ότι η διαίρεση ενός μιγαδικού αριθμού z με το μιγαδικό $w=\cos\theta+i\sin\theta$ ($\theta\in\mathbb{R}$) στρέφει τη διανυσματική ακτίνα του z γύρω από την αρχή των αξόνων κατά γωνία $-\theta$ χωρίς να μεταβάλλει το μήκος της (προφανές αφού $|w|=1$). □

ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΜΟΡΦΗ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

Θεωρούμε ένα μιγαδικό αριθμό z και έστω

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

μία τριγωνομετρική μορφή του. Χρησιμοποιώντας τον τύπο του Euler

$$\boxed{e^{ix}=\cos x+i\sin x,\ x\in\mathbb{R}}$$

τότε παίρνουμε αμέσως την έκφραση

$$z = re^{i\theta}$$

Εκθετική μορφή του z καλείται μία (οποιαδήποτε) έκφραση του z ως

$$\boxed{z = re^{i\theta}} \qquad (3)$$

όπου r είναι το μέτρο του z και θ είναι ένα (οποιοδήποτε) όρισμά του.

Από το Θεώρημα 5 έχουμε αμέσως το εξής:

<u>Θεώρημα 10:</u> Έστω $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$ και $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ εκθετικές μορφές των z_1, z_2 αντίστοιχα. Τότε

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} r_1 = r_2 \\ \text{και} \\ \theta_1 - \theta_2 = 2\kappa\pi \text{ για κάποιο } \kappa \in \mathbb{Z} \end{array} \right\} \qquad \square$$

Από το Θεώρημα 6 έχουμε αμέσως το εξής:

<u>Θεώρημα 11:</u> Έστω οι μιγαδικοί $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ και $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$, $r_1, r_2, \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$. Τότε

i) $$\boxed{z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}}$$

ii) αν $z_2 \neq 0$ έχουμε

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}} \qquad \square$$

Από την Παρατήρηση 7 (τύπος του De Moivre) έχουμε αμέσως την εξής:

<u>Πρόταση 12:</u> Έστω $z = re^{i\theta}$, $r, \theta \in \mathbb{R}$. Τότε

i) $$\boxed{z^\kappa = r^\kappa e^{i\kappa\theta}, \ \kappa \in \{1, 2, 3, \ldots\}}$$

ii) αν $z \neq 0$ έχουμε

α) $$\boxed{\frac{1}{z} = \frac{1}{r} e^{-i\theta}}$$

β) $$\boxed{z^\kappa = r^\kappa e^{i\kappa\theta}, \ \kappa \in \mathbb{Z}} \qquad \square$$

Από τη σχέση (3), το Θεώρημα 10, το Θεώρημα 11 και την Πρόταση 12 έχουμε αμέσως την εξής

Πρόταση 13:

i) $e^{2\kappa\pi i}=1,\ \kappa\in\mathbb{Z}$

ii) $e^{i\theta}=e^{i\varphi}\Leftrightarrow\theta-\varphi=2\kappa\pi,\ \kappa\in\mathbb{Z}\ (\theta,\varphi\in\mathbb{R})$

iii) $e^{i\theta}e^{i\varphi}=e^{i(\theta+\varphi)},\ \theta,\varphi\in\mathbb{R}$

iv) $\dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\varphi}}=e^{i(\theta-\varphi)},\ \theta,\varphi\in\mathbb{R}$

v) $\dfrac{1}{e^{i\theta}}=e^{-i\theta}=\overline{e^{i\theta}},\ \theta\in\mathbb{R}$

vi) $\left(e^{i\theta}\right)^{\kappa}=e^{i\kappa\theta},\ \theta\in\mathbb{R},\ \kappa\in\mathbb{Z}$ □

Παρατήρηση 14:

i) Επειδή $\left|e^{i\theta}\right|=1$ για κάθε $\theta\in\mathbb{R}$ (απόδειξη;), τότε έπεται αμέσως οι εικόνες των μιγαδικών $e^{i\theta}$, $\theta\in\mathbb{R}$ βρίσκονται πάνω στο μοναδιαίο κύκλο. Επίσης και κάθε σημείο του μοναδιαίου κύκλου είναι η εικόνα ενός μιγαδικού της μορφής $e^{i\theta}$ με $\theta\in\mathbb{R}$ (απόδειξη;). Επομένως ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών $e^{i\theta}$, $\theta\in\mathbb{R}$ είναι ο μοναδιαίος κύκλος.

ii) Από τη γεωμετρική ερμηνεία του γινομένου δύο μιγαδικών αριθμών και από την Παρατήρηση 9 έχουμε αμέσως ότι το γινόμενο ενός μιγαδικού z με το $e^{i\theta}$ $(\theta\in\mathbb{R})$, στρέφει τη διανυσματική ακτίνα του μιγαδικού z γύρω από την αρχή των αξόνων κατά γωνία θ χωρίς να μεταβάλλει το μήκος της. Αυτό σημαίνει ότι η στροφή ενός διανύσματος $\mathbf{u}=(x,y)$ του επιπέδου γύρω από την αρχή των αξόνων κατά γωνία $\theta\in\mathbb{R}$ περιγράφεται από τη σχέση

$$(x+yi)e^{i\theta}$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω η διαίρεση ενός μιγαδικού z με το $e^{i\theta}$ $(\theta\in\mathbb{R})$, επειδή

$$\frac{z}{e^{i\theta}}=z\cdot\frac{1}{e^{i\theta}}=ze^{-i\theta}$$

στρέφει τη διανυσματική ακτίνα του z γύρω από την αρχή των αξόνων κατά γωνία $-\theta$ χωρίς να αλλάζει το μήκος της. □

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Έστω $z=1+i$. Να γραφεί ο αριθμός z^7 σε εκθετική και καρτεσιανή μορφή.

Λύση: Μία τριγωνομετρική μορφή του z είναι η

$$z=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

(απόδειξη;). Επομένως

$$z=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \qquad (4)$$

- Εκθετική μορφή του z^7:

  Από την Πρόταση 12i) και τη σχέση (4) έπεται αμέσως ότι

  $$z^7=\left(\sqrt{2}\right)^7 e^{i\frac{7\pi}{4}}=8\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} \qquad (5)$$

  Οπότε μία εκθετική μορφή του z^7 είναι η (5).

- Καρτεσιανή μορφή του z^7:

$$z^7 \underset{(5)}{=} 8\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}=8\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)=$$

$$=8\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)=\ldots=8-8i$$

□

ΑΣΚΗΣΗ

Έστω $z_1=\sqrt{3}+i$, $z_2=1-i$ και $z_3=-1+i\sqrt{3}$. Να γραφούν οι μιγαδικοί αριθμοί ${z_1}^4$ και $\dfrac{{z_1}^3}{{z_2}^4{z_3}^2}$ σε τριγωνομετρική, εκθετική και καρτεσιανή μορφή. □