# ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Το σύνολο $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών αποτελεί επέκταση του συνόλου $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών η οποία προκύπτει αν στο σύνολο των πραγματικών αριθμών επισυνάψουμε μία "ρίζα" της εξίσωσης $x^2 = -1$, δηλ. ένα στοιχείο i τέτοιο ώστε $i^2 = -1$. Στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών επεκτείνονται όλες οι πράξεις των πραγματικών αριθμών με τις ίδιες ακριβώς αλγεβρικές ιδιότητες.

**Ορισμός 1:** Το σύνολο $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών αποτελείται από όλες τις εκφράσεις της μορφής $\alpha + bi$ με $\alpha, b \in \mathbb{R}$, δηλ.

$$\boxed{\mathbb{C} = \{\alpha + bi : \alpha, b \in \mathbb{R}\}}$$ □

Σε ένα μιγαδικό αριθμό $z = \alpha + bi$ ορίζουμε

- πραγματικό μέρος του z (συμβολισμός $\mathrm{Re}(z)$) τον πραγματικό αριθμό α, δηλ.

$$\boxed{\mathrm{Re}(z) = \alpha \in \mathbb{R}}$$

- φανταστικό μέρος του z (συμβολισμός $\mathrm{Im}(z)$) τον πραγματικό αριθμό b, δηλ.

$$\boxed{\mathrm{Im}(z) = b \in \mathbb{R}}$$

Η ισότητα δύο μιγαδικών αριθμών $\alpha + bi$, $c + di$ ορίζεται ως εξής:

$$\boxed{\alpha + bi = c + di \Leftrightarrow \alpha = c,\ b = d}$$

(δηλ. για $z, w \in \mathbb{C}$ έχουμε ότι $z = w \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(w),\ \mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(w)$)

**Προσοχή:** Δεν ορίζεται διάταξη στο $\mathbb{C}$.

Επιπλέον

- το μιγαδικό αριθμό $\alpha + 0i$ τον ταυτίζουμε με τον πραγματικό αριθμό α (γράφουμε $\alpha = \alpha + 0i$) και επομένως μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Άρα για $z \in \mathbb{C}$ έχουμε

$$\boxed{z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \mathrm{Im}(z) = 0}$$

- το μιγαδικό αριθμό $0 + bi$ το συμβολίζουμε με $bi$ και τον καλούμε φανταστικό αριθμό. Το σύνολο των φανταστικών αριθμών συμβολίζεται με $\mathbb{I}$, δηλ.

$$\mathbb{I} = \{bi : b \in \mathbb{R}\}$$

Άρα για $z \in \mathbb{C}$ έχουμε

$$\boxed{z \in \mathbb{I} \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z) = 0}$$

- το μιγαδικό αριθμό $\alpha + (-b)i$ το συμβολίζουμε με $\alpha - bi$.

## ΠΡΑΞΕΙΣ ΣΤΟ ΣΥΝΟΛΟ ΤΩΝ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Έστω δύο μιγαδικοί αριθμοί $\alpha + bi$, $c + di$. Τότε ορίζουμε

- $$\boxed{(\alpha + bi) + (c + di) = (\alpha + c) + (b + d)i}$$

  (ορισμός πρόσθεσης στο $\mathbb{C}$)

- $$\boxed{(\alpha + bi)(c + di) = (\alpha c - bd) + (\alpha d + bc)i}$$

  (ορισμός πολλαπλασιασμού στο $\mathbb{C}$)

**Παρατήρηση 2:**

**i)** Η πρόσθεση των μιγαδικών αριθμών (όπως ακριβώς συμβαίνει και στους πραγματικούς αριθμούς) είναι προσεταιριστική, αντιμεταθετική, έχει ουδέτερο στοιχείο (το $0 = 0 + 0i$) και για κάθε μιγαδικό αριθμό υπάρχει αντίθετος (ο αντίθετος του $c + di$ είναι ο $-c - di$ ο οποίος συμβολίζεται με $-(c + di)$). Επομένως η αφαίρεση των μιγαδικών $\alpha + bi$, $c + di$ ορίζεται ως εξής

$$\boxed{(\alpha + bi) - (c + di) = (\alpha - c) + (b - d)i}$$

**ii)** Ο πολλαπλασιασμός των μιγαδικών αριθμών (όπως ακριβώς συμβαίνει και στους πραγματικούς αριθμούς) είναι προσεταιριστικός, αντιμεταθετικός, έχει μοναδιαίο στοιχείο (το $1 = 1 + 0i$) και για κάθε μη μηδενικό μιγαδικό αριθμό υπάρχει αντίστροφος. Για τη διαίρεση των μιγαδικών αριθμών $\alpha + bi$, $c + di$ με $c + di \neq 0$ έχουμε

$$\boxed{\frac{\alpha + bi}{c + di} = \frac{(\alpha + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{(\alpha c + bd) + (bc - \alpha d)i}{c^2 + d^2} = \frac{\alpha c + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - \alpha d}{c^2 + d^2}i}$$

και επομένως αφού $1 = 1 + 0i$ τότε για $c + di \neq 0$ έχουμε

$$\boxed{\frac{1}{c+di}=\ldots=\frac{c}{c^2+d^2}-\frac{d}{c^2+d^2}i}$$

**iii)** Ο πολλαπλασιασμός και η πρόσθεση των μιγαδικών αριθμών ικανοποιούν την επιμεριστική ιδιότητα (όπως ακριβώς συμβαίνει και στους πραγματικούς αριθμούς).

**iv)** Η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός δύο μιγαδικών αριθμών γίνονται όπως ακριβώς και οι αντίστοιχες πράξεις με διώνυμα $\alpha+bx$ θεωρώντας στη θέση του x το i και ότι $x^2=-1$. □

**<u>Δύναμη μιγαδικού αριθμού</u>**

Οι δυνάμεις ενός μιγαδικού αριθμού ορίζονται με ακριβώς όμοιο τρόπο όπως και στους πραγματικούς αριθμούς, δηλ.

- για κάθε $z\in\mathbb{C}$ ορίζουμε

$$z^\nu=\underbrace{z\cdot z\cdot\ldots\cdot z}_{\nu\ \text{φορές}},\ \nu=1,2,3,\ldots$$

- για κάθε $z\in\mathbb{C}$ με $z\neq 0$ ορίζουμε

$$z^0=1,\ z^{-\nu}=\frac{1}{z^\nu},\ \nu=1,2,3,\ldots$$

Για τις δυνάμεις των μιγαδικών αριθμών ισχύουν οι ίδιες ακριβώς ιδιότητες που ισχύουν και για τις δυνάμεις των πραγματικών αριθμών. Ιδιαίτερα για τις δυνάμεις του i έχουμε:

- $i^0=1,\quad i^1=i,\quad i^2=-1,\quad i^3=i^2i=-i,\quad i^4=\left(i^2\right)^2=(-1)^2=1$
- Έστω $\nu\in\mathbb{Z}$. Τότε (ταυτότητα Ευκλείδειας Διαίρεσης) υπάρχουν μοναδικά $\pi\in\mathbb{Z}$ και $\upsilon\in\{0,1,2,3\}$ τέτοια ώστε $\nu=4\pi+\upsilon$. Άρα

$$\boxed{i^\nu=i^{4\pi+\upsilon}=\left(i^4\right)^\pi i^\upsilon=1^\pi i^\upsilon=i^\upsilon=\begin{cases}1, & \text{αν } \upsilon=0\\ i, & \text{αν } \upsilon=1\\ -1, & \text{αν } \upsilon=2\\ -i, & \text{αν } \upsilon=3\end{cases}}$$

**<u>Επίλυση της εξίσωσης</u> $\alpha z^2+\beta z+\gamma=0$, $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ <u>με</u> $\alpha\neq 0$ <u>στο</u> $\mathbb{C}$**

Έστω $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ με $\alpha\neq 0$. Τότε

$$\alpha z^2+\beta z+\gamma \underset{\left(\substack{\text{συμπλήρωση}\\ \text{τετραγώνου}}\right)}{=} \ldots = \alpha\left(\left(z+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\frac{\Delta}{4\alpha^2}\right)$$

όπου $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$ είναι η διακρίνουσα του τριωνύμου $\alpha z^2+\beta z+\gamma$. Επομένως έχουμε

$$\alpha z^2+\beta z+\gamma=0 \Leftrightarrow \alpha\left(\left(z+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\frac{\Delta}{4\alpha^2}\right)=0 \Leftrightarrow \left(z+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\frac{\Delta}{4\alpha^2}=0$$

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

- $\underline{\Delta \geq 0}$

$$\left(z+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\frac{\Delta}{4\alpha^2}=0 \Leftrightarrow \left(z+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha}\right)^2=0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(z+\frac{\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha}\right)\left(z+\frac{\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha}\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{z_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}}$$

Άρα σε αυτήν την περίπτωση έχουμε πραγματικές ρίζες οι οποίες είναι άνισες αν $\Delta>0$, ενώ αν $\Delta=0$ έχουμε μία διπλή πραγματική ρίζα τη $z_0=-\frac{\beta}{2\alpha}$.

- $\underline{\Delta < 0}$

$$\left(z+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\frac{\Delta}{4\alpha^2}=0 \Leftrightarrow \left(z+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\frac{-|\Delta|}{4\alpha^2}=0 \Leftrightarrow \left(z+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\frac{i^2|\Delta|}{4\alpha^2}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(z+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\left(\frac{i\sqrt{|\Delta|}}{2\alpha}\right)^2=0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(z+\frac{\beta-i\sqrt{|\Delta|}}{2\alpha}\right)\left(z+\frac{\beta+i\sqrt{|\Delta|}}{2\alpha}\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{z_{1,2}=\frac{-\beta\pm i\sqrt{|\Delta|}}{2\alpha}}$$

Άρα σε αυτήν την περίπτωση έχουμε δύο άνισες μιγαδικές ρίζες.

**Παρατήρηση 3:**

**i)** Για τις ρίζες $z_1$, $z_2$ ισχύουν οι γνωστοί τύποι του Vieta

$$z_1+z_2=-\frac{\beta}{\alpha} \quad \text{και} \quad z_1 z_2=\frac{\gamma}{\alpha}$$

(απόδειξη;)

**ii)** Ισχύει η γνωστή παραγοντοποίηση του τριωνύμου $\alpha z^2+\beta z+\gamma$:

$$\alpha z^2+\beta z+\gamma=\alpha(z-z_1)(z-z_2)$$

(απόδειξη;) □

## ΣΥΖΥΓΗΣ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

**Ορισμός 3:** Έστω $z=\alpha+bi\in\mathbb{C}$. Ο μιγαδικός αριθμός $\alpha-bi$ καλείται **συζυγής** του z και συμβολίζεται με $\overline{z}$, δηλ.

$$\boxed{\overline{z}=\alpha-bi}$$ □

**ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΣΥΖΥΓΩΝ**

**α)** $\overline{z_1+z_2+\ldots+z_n}=\overline{z_1}+\overline{z_2}+\ldots+\overline{z_n}$ για κάθε $z_1,z_2,\ldots,z_n\in\mathbb{C}$ (n θετικός ακέραιος)

**β)** $\overline{z_1\cdot z_2\cdot\ldots\cdot z_n}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}\cdot\ldots\cdot\overline{z_n}$ για κάθε $z_1,z_2,\ldots,z_n\in\mathbb{C}$ (n θετικός ακέραιος)

**γ)** $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)}=\frac{\overline{z}}{\overline{w}}$ για κάθε $z,w\in\mathbb{C}$ με $w\neq 0$

**δ)** Έστω $z\in\mathbb{C}$. Τότε:

**i)** $z+\overline{z}=2\operatorname{Re}(z)$, $z-\overline{z}=2\operatorname{Im}(z)\cdot i$

**ii)** $z\in\mathbb{R}\Leftrightarrow z=\overline{z}\ (\Leftrightarrow z-\overline{z}=0)$

**iii)** $z\in\mathbb{I}\Leftrightarrow z=-\overline{z}\ (\Leftrightarrow z+\overline{z}=0)$ □

**Σημείωση 4:** Από τα β), γ) έχουμε αμέσως τα εξής:

- $\overline{z^n}=\overline{z}^n$ για κάθε $z\in\mathbb{C}$ και για κάθε n θετικό ακέραιο
- $\overline{z^n}=\overline{z}^n$ για κάθε $z\in\mathbb{C}-\{0\}$ $(=\mathbb{C}^*)$ και για κάθε n μη θετικό ακέραιο.

Άρα για κάθε $z\in\mathbb{C}^*$ και για κάθε $n\in\mathbb{Z}$ έχουμε $\overline{z^n}=\overline{z}^n$. □

**Παρατήρηση 5:** Οι ρίζες της εξίσωσης $\alpha z^2+\beta z+\gamma=0$, $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ με $\alpha\neq 0$, όταν $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma<0$ είναι συζυγείς μιγαδικοί αριθμοί. □

## ΜΕΤΡΟ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

**Ορισμός 6:** Έστω $z=\alpha+bi\in\mathbb{C}$. Ο πραγματικός αριθμός $\sqrt{\alpha^2+b^2}$ καλείται **μέτρο** του z και συμβολίζεται με $|z|$, δηλ.

$$\boxed{|z|=\sqrt{\alpha^2+b^2}}$$ □

**ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΜΕΤΡΟΥ**

**α)** Για κάθε $z\in\mathbb{C}$ ισχύει

**i)** $|z|\geq 0$

**ii)** $|z|=0\Leftrightarrow z=0$

**iii)** $|z|=|\overline{z}|=|-z|$

**iv)** $|z|^2=z\cdot\overline{z}$ (επομένως $|z|=\sqrt{z\cdot\overline{z}}$)

**v)** $|\mathrm{Re}(z)|\leq|z|$, $|\mathrm{Im}(z)|\leq|z|$

**vi)** $\big||\mathrm{Re}(z)|-|\mathrm{Im}(z)|\big|\leq|z|\leq|\mathrm{Re}(z)|+|\mathrm{Im}(z)|\leq\sqrt{2}|z|$

**β)** $|z_1\cdot z_2\cdot\ldots\cdot z_n|=|z_1|\cdot|z_2|\cdot\ldots\cdot|z_n|$ για κάθε $z_1,z_2,\ldots,z_n\in\mathbb{C}$ (n θετικός ακέραιος)

**γ)** $\left|\frac{z}{w}\right|=\frac{|z|}{|w|}$ για κάθε $z,w\in\mathbb{C}$ με $w\neq 0$

**δ)** $\big||z|-|w|\big|\leq|z+w|\leq|z|+|w|$ για κάθε $z,w\in\mathbb{C}$

(τριγωνική ανισότητα) □

**Σημείωση 7:**

**i)** Από τα β), γ) έχουμε αμέσως τα εξής:

- $\left|z^n\right| = |z|^n$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$ και για κάθε n θετικό ακέραιο
- $\left|z^n\right| = |z|^n$ για κάθε $z \in \mathbb{C} - \{0\}$ $(= \mathbb{C}^*)$ και για κάθε n μη θετικό ακέραιο.

Άρα για κάθε $z \in \mathbb{C}^*$ και για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ έχουμε $\left|z^n\right| = |z|^n$.

**ii)** Από τα δ), α)iii) έχουμε αμέσως ότι για κάθε $z, w \in \mathbb{C}$ ισχύει

$$\big||z| - |w|\big| \le |z - w| \le |z| + |w|$$

(απόδειξη;) □

## ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

**1.** Να γράψετε το μιγαδικό $\dfrac{6 - i\sqrt{2}}{1 + i\sqrt{2}}$ στη μορφή $\alpha + bi$.

**Λύση:**

$$\frac{6 - i\sqrt{2}}{1 + i\sqrt{2}} = \frac{\left(6 - i\sqrt{2}\right)\left(1 - i\sqrt{2}\right)}{\left(1 + i\sqrt{2}\right)\left(1 - i\sqrt{2}\right)} = \frac{6 - 6\sqrt{2} \cdot i - \sqrt{2} \cdot i + 2i^2}{1 - \left(i\sqrt{2}\right)^2} =$$

$$= \frac{6 - 2 - 7\sqrt{2} \cdot i}{1 - 2i^2} = \ldots = \frac{4 - 7\sqrt{2} \cdot i}{3} = \frac{4}{3} - \frac{7\sqrt{2}}{3} i$$

□

**2.** Να λύσετε στο $\mathbb{C}$ την εξίσωση $x^2 - 2x + 5 = 0$.

**Λύση:**

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = \ldots = -16 < 0$$

Άρα

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm i\sqrt{|\Delta|}}{2\alpha} = \frac{2 \pm 4i}{2} = 1 \pm 2i$$ □

**3.** Να λύσετε στο $\mathbb{C}$ την εξίσωση $\overline{z} = z^2$.

**Λύση:**

Έστω $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$. Τότε

$$\overline{z} = z^2 \Leftrightarrow \overline{x+yi} = (x+yi)^2 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x - yi = \left(x^2 - y^2\right) + 2xyi \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x = x^2 - y^2 \\ -y = 2xy \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x = x^2 - y^2 \\ (2x+1)y = 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x = x^2 - y^2 \\ 2x+1 = 0 \text{ ή } y = 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \left(x = x^2 - y^2 \text{ και } 2x+1 = 0\right) \\ \text{ή} \\ \left(x = x^2 - y^2 \text{ και } y = 0\right) \end{Bmatrix}$$

Συνεπώς έχουμε

- $\begin{Bmatrix} x = x^2 - y^2 \\ 2x+1 = 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} -\frac{1}{2} = \frac{1}{4} - y^2 \\ x = -\frac{1}{2} \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \\ x = -\frac{1}{2} \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \boxed{z = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i}$
- $\begin{Bmatrix} x = x^2 - y^2 \\ y = 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x = x^2 \\ y = 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x = 0 \text{ ή } x = 1 \\ y = 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \boxed{z = 0 \text{ ή } z = 1}$ □

**4.** Έστω $z \in \mathbb{C}$ με $z \neq 0$. Να αποδείξετε ότι

**i)** $\dfrac{z}{\overline{z}} + \dfrac{\overline{z}}{z} \in \mathbb{R}$

**ii)** $-2 \leq \dfrac{z}{\overline{z}} + \dfrac{\overline{z}}{z} \leq 2$

**<u>Λύση:</u>**

**i)** $\dfrac{z}{\overline{z}} + \dfrac{\overline{z}}{z} = \dfrac{z^2 + \overline{z}^2}{z\overline{z}} = \dfrac{(z+\overline{z})^2 - 2z\overline{z}}{z\overline{z}} = \dfrac{(2\,\mathrm{Re}(z))^2 - 2|z|^2}{|z|^2} = \dfrac{4(\mathrm{Re}(z))^2}{|z|^2} - 2 \in \mathbb{R}$

**ii)** $-2 \leq \dfrac{z}{\overline{z}} + \dfrac{\overline{z}}{z} \leq 2 \underset{\text{i)}}{\Leftrightarrow} -2 \leq \dfrac{4(\mathrm{Re}(z))^2}{|z|^2} - 2 \leq 2 \Leftrightarrow 0 \leq \dfrac{4(\mathrm{Re}(z))^2}{|z|^2} \leq 4 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 0 \leq (\mathrm{Re}(z))^2 \leq |z|^2 \Leftrightarrow 0 \leq |\mathrm{Re}(z)| \leq |z| \quad \text{ισχύει}$$

Για την απόδειξη των i), ii) χρησιμοποιήσαμε τις ιδιότητες δ)i) των συζυγών και α)i), α)iv), α)v) του μέτρου των μιγαδικών αριθμών. Τα ερωτήματα του Παραδείγματος μπορούν να αντιμετωπιστούν επίσης θέτοντας $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$ (απόδειξη;). □

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**1.** Να λύσετε στο $\mathbb{C}$ την εξίσωση

$$x^4 - 6x^2 + 10 = 0$$

**2.** Να λύσετε στο $\mathbb{C}$ την εξίσωση

$$\overline{z} = z^3$$

**3.** Έστω $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ τέτοιοι ώστε

- $z_1\overline{z_1} + |z_1| = 2$
- $|z_1| \le (\mathrm{Re}(z_2))^2 + (\mathrm{Im}(z_2))^2 \le |z_2|$
- $z_1 z_2 \ne -1$

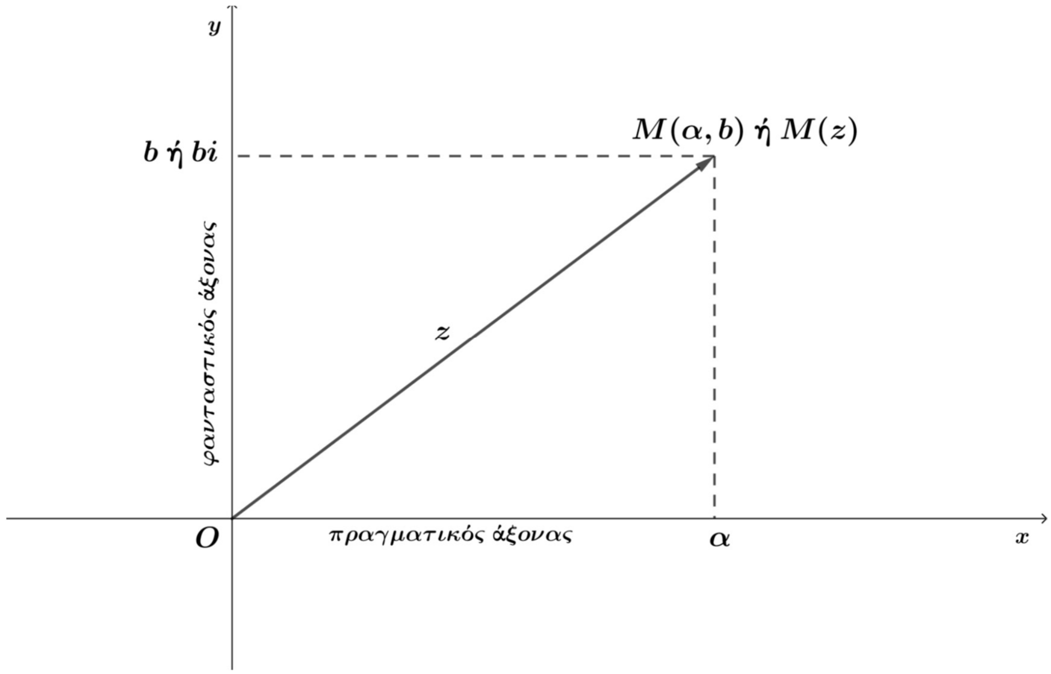
Να αποδείξετε ότι ο αριθμός

$$\frac{z_1 + z_2 + (z_1 - z_2)i}{1 + z_1 z_2}$$

είναι πραγματικός. □

## ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Κάθε μιγαδικό αριθμό $\alpha + bi$ ($\alpha, b \in \mathbb{R}$) τον αντιστοιχίζουμε στο σημείο $M(\alpha, b)$ ενός καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων xOy. Αλλά και αντίστροφα, κάθε σημείο $M(\alpha, b)$ ενός καρτεσιανού επιπέδου το αντιστοιχίζουμε στο μιγαδικό $\alpha + bi$. Το σημείο M λέγεται **εικόνα** του μιγαδικού $\alpha + bi$. Αν θέσουμε $z = \alpha + bi$, τότε το σημείο M μπορούμε να το συμβολίζουμε και με $M(z)$. Επίσης ο μιγαδικός $z = \alpha + bi$ παριστάνεται και με τη διανυσματική ακτίνα $\overrightarrow{OM}$ του σημείου $M(\alpha, b)$ (την οποία πολλές φορές συμβολίζουμε με z). Ο άξονας $x'x$ καλείται **πραγματικός άξονας** (ή και άξονας των πραγματικών αριθμών) αφού σε αυτόν απεικονίζονται τα πραγματικά μέρη των μιγαδικών αριθμών (όπως προφανώς και όλοι οι πραγματικοί αριθμοί $\alpha = \alpha + 0i$, $\alpha \in \mathbb{R}$), ενώ ο άξονας $y'y$ καλείται **φανταστικός άξονας** (ή και άξονας των φανταστικών αριθμών) αφού σε αυτόν απεικονίζονται τα φανταστικά μέρη των μιγαδικών αριθμών (όπως προφανώς και όλοι οι φανταστικοί αριθμοί $bi = 0 + bi$, $b \in \mathbb{R}$). Τα παραπάνω φαίνονται στο επόμενο σχήμα



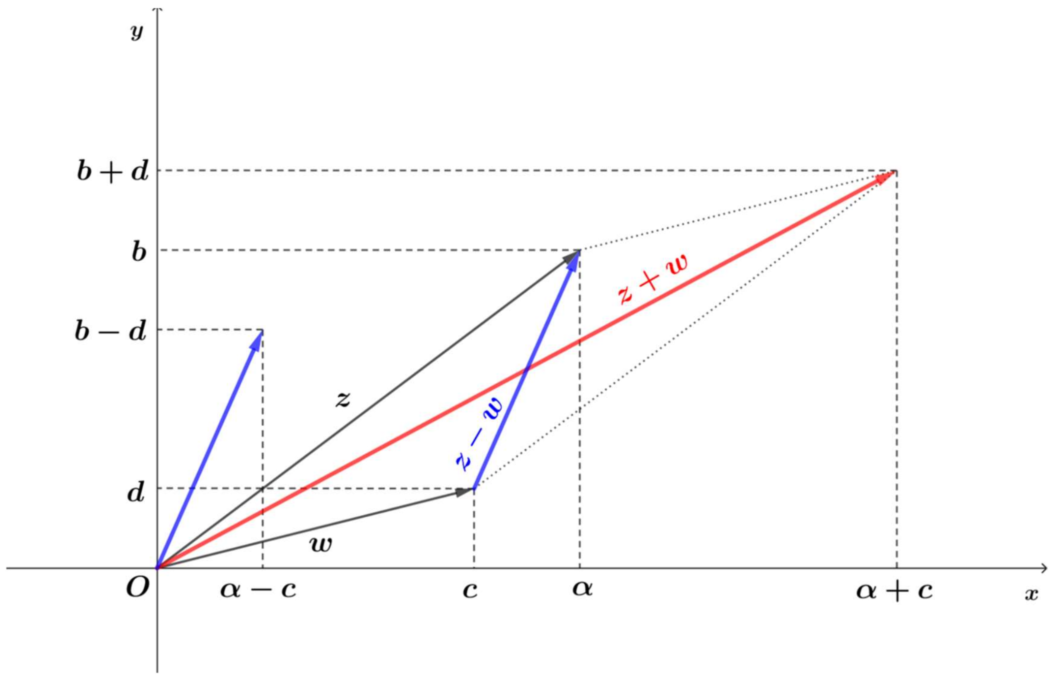

Ένα καρτεσιανό επίπεδο του οποίου τα σημεία είναι εικόνες μιγαδικών αριθμών καλείται **μιγαδικό επίπεδο**.

**<u>Γεωμετρική ερμηνεία πρόσθεσης - αφαίρεσης μιγαδικών αριθμών</u>**

Από τον ορισμό της πρόσθεσης μιγαδικών αριθμών έχουμε αμέσως ότι

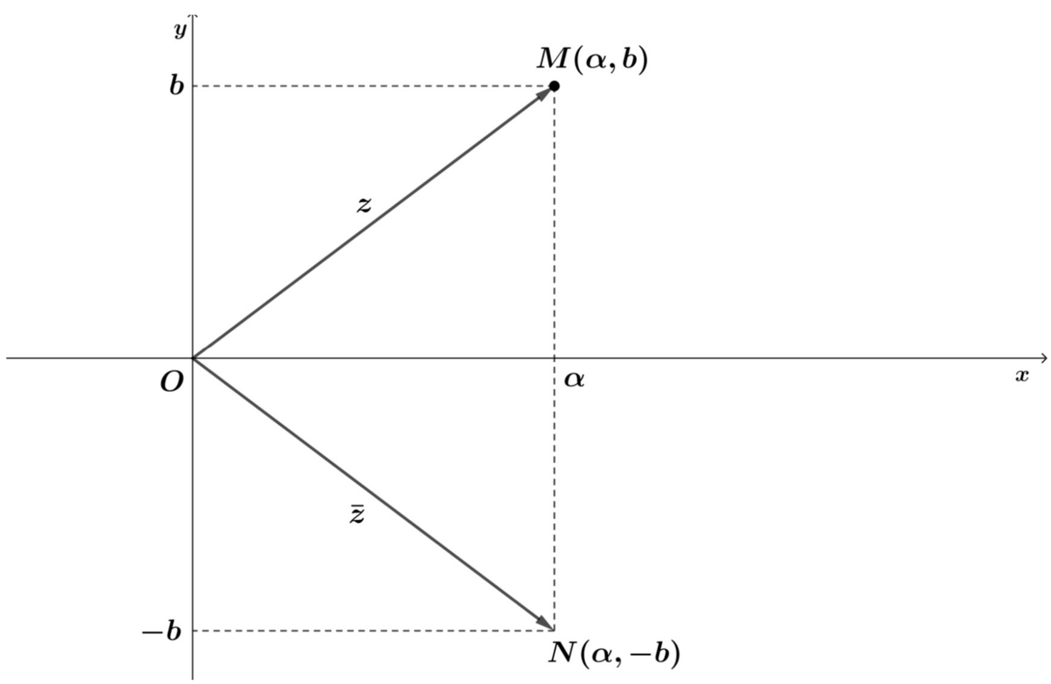
- **η διανυσματική ακτίνα της πρόσθεσης δύο μιγαδικών αριθμών είναι το άθροισμα των διανυσματικών ακτίνων τους**
- **η διανυσματική ακτίνα της αφαίρεσης δύο μιγαδικών αριθμών είναι η διαφορά των διανυσματικών ακτίνων τους**

Επομένως αν $z = \alpha + bi$ και $w = c + di$, τότε έχουμε



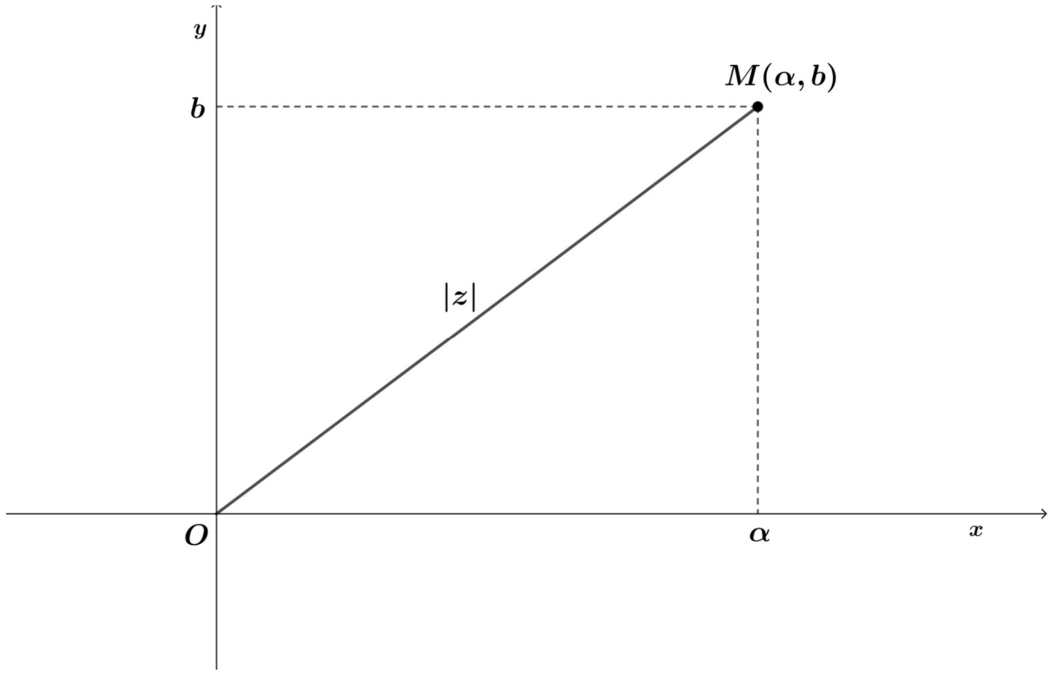

<u>**Γεωμετρική ερμηνεία του συζυγούς ενός μιγαδικού αριθμού**</u>

Από τον ορισμό του συζυγούς ενός μιγαδικού αριθμού έχουμε αμέσως ότι **οι εικόνες ενός μιγαδικού αριθμού και του συζυγούς του είναι συμμετρικές ως προς τον πραγματικό άξονα**. Επομένως αν $z = \alpha + bi$, τότε (αφού $\overline{z} = \alpha - bi$) έχουμε



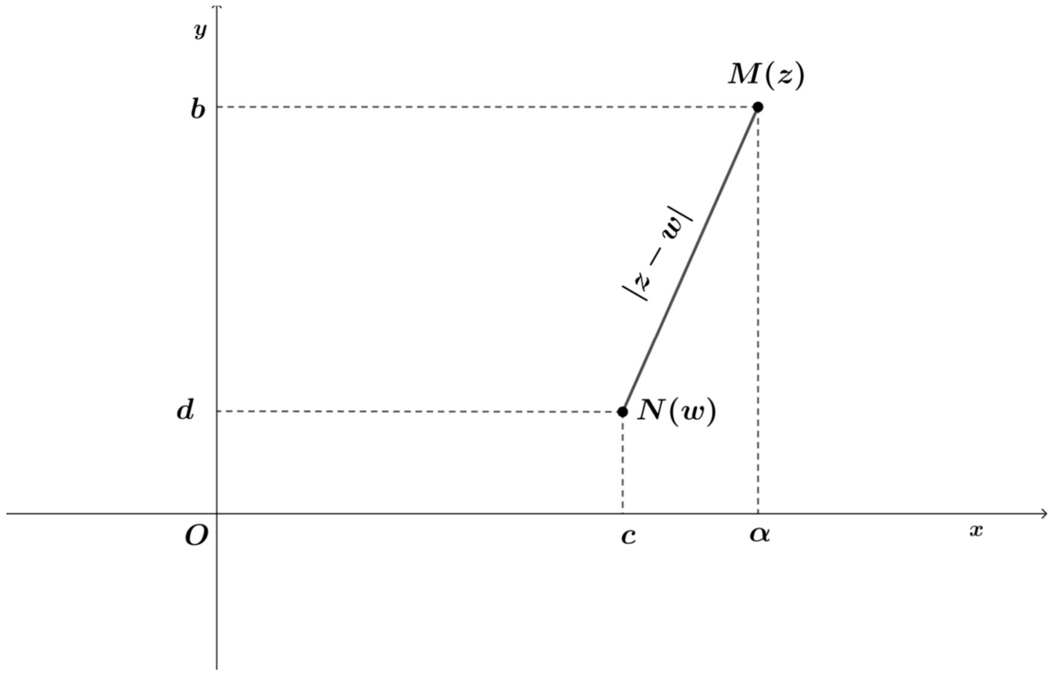
**<u>Γεωμετρική ερμηνεία του μέτρου ενός μιγαδικού αριθμού</u>**

Από τον ορισμό του μέτρου ενός μιγαδικού αριθμού έχουμε αμέσως ότι **το μέτρο ενός μιγαδικού αριθμού είναι ίσο με την απόσταση της εικόνας του από την αρχή των αξόνων** $\mathrm{O}(\mathbf{0},\mathbf{0})$. Επομένως αν $z=\alpha+bi$, τότε έχουμε




(δηλ. $|z|=(\mathrm{OM})$ - απόδειξη;).

Επίσης από τον ορισμό της αφαίρεσης δύο μιγαδικών αριθμών και τον ορισμό του μέτρου έχουμε αμέσως ότι **το μέτρο της διαφοράς δύο μιγαδικών αριθμών είναι ίσο με την απόσταση των εικόνων τους**. Επομένως αν $z=\alpha+bi$ και $w=c+di$, τότε έχουμε




(δηλ. $|z-w| = (NM)$ -απόδειξη;).

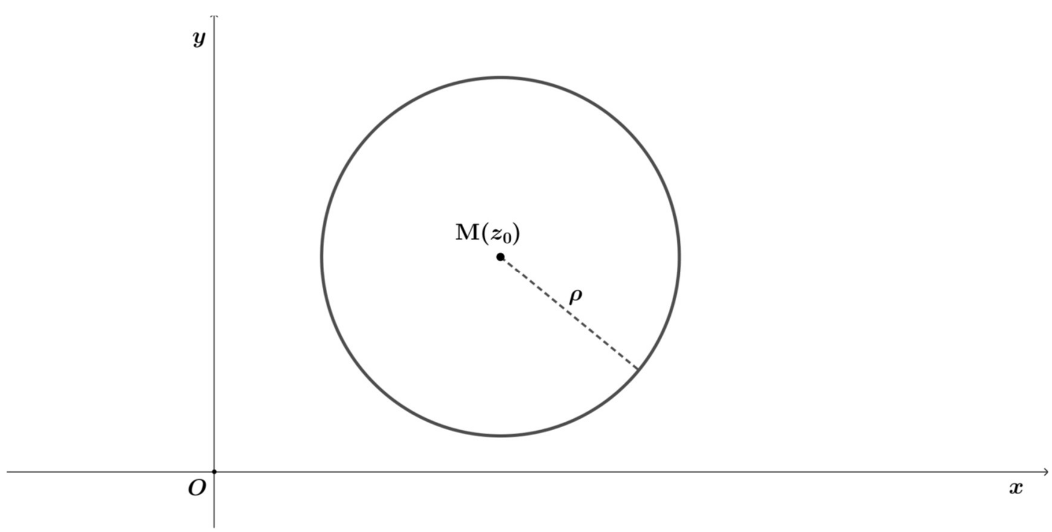
**<u>Γεωμετρικοί τόποι</u>**

Από την προηγηθείσα ανάλυση για τη γεωμετρική ερμηνεία του μέτρου της διαφοράς δύο μιγαδικών αριθμών έχουμε αμέσως τα εξής:

- Αν $z_0 \in \mathbb{C}$ τότε η εξίσωση του $\mathbb{C}$

$$|z-z_0| = \rho\,,\ \rho > 0$$

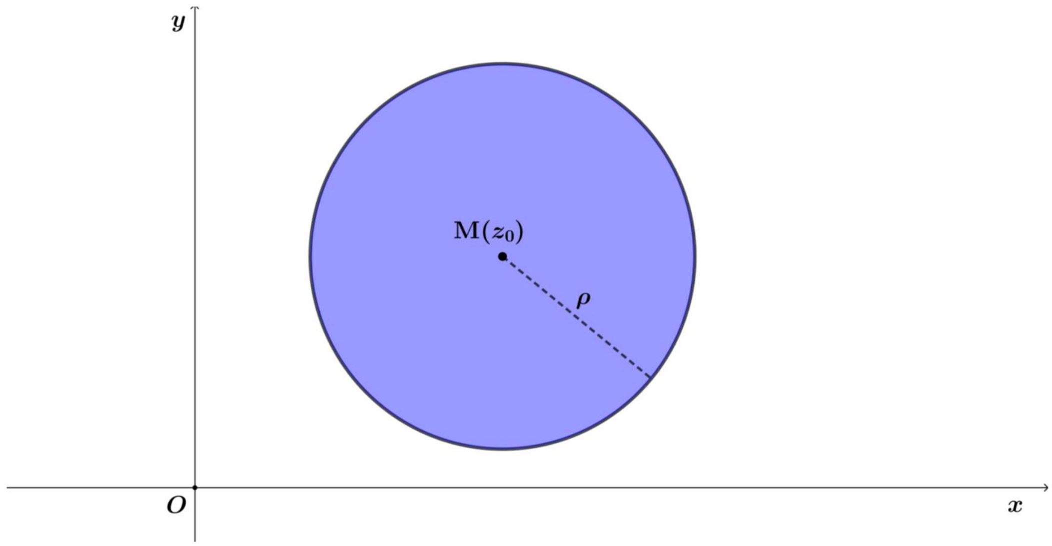
  παριστάνει **κύκλο** με κέντρο το σημείο $M(z_0)$ και ακτίνα ρ (απόδειξη;)



ενώ η εξίσωση

$$|z - z_0| \leq \rho \,,\ \rho > 0$$

παριστάνει **κυκλικό δίσκο** με κέντρο το σημείο $M(z_0)$ και ακτίνα ρ (απόδειξη;)




(άρα η εξίσωση

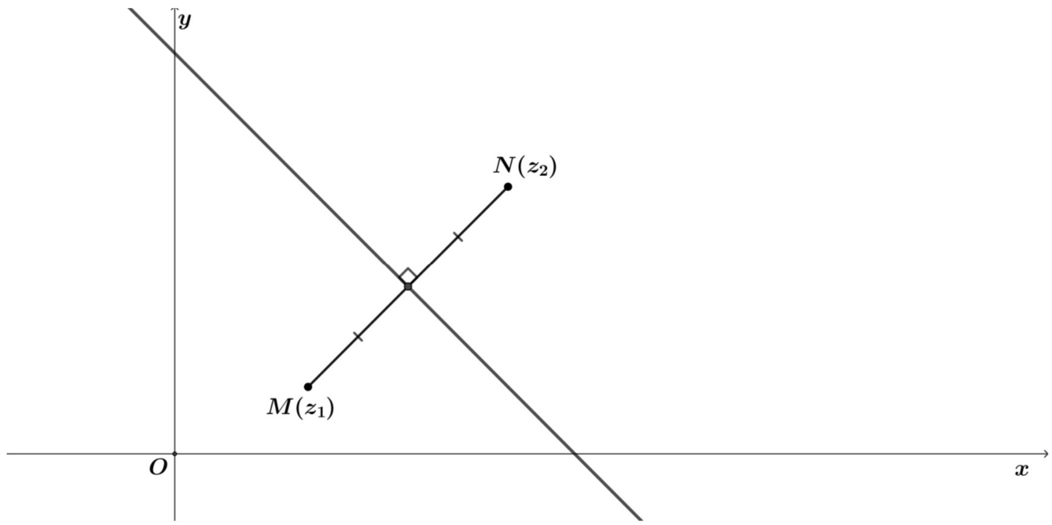
$$|z - z_0| < \rho \,,\ \rho > 0$$

παριστάνει προφανώς το εσωτερικό του παραπάνω κυκλικού δίσκου).

- Αν $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ με $z_1 \neq z_2$, τότε η εξίσωση του $\mathbb{C}$

$$|z - z_1| = |z - z_2|$$

παριστάνει τη **μεσοκάθετο** του ευθύγραμμου τμήματος με άκρα τα σημεία $M(z_1)$ και $N(z_2)$ (απόδειξη;).




## ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

**1.** Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z για τους οποίους ο αριθμός $\frac{z-1}{z-2i}$ είναι φανταστικός.

**Λύση:**

Έστω $z=x+yi$, $x,y\in\mathbb{R}$. Επειδή ο αριθμός $\frac{z-1}{z-2i}$ ορίζεται για $z\neq 2i$, πρέπει $(x,y)\neq(0,2)$. Με αυτόν τον περιορισμό έχουμε

$$\frac{z-1}{z-2i}=\frac{x+yi-1}{x+yi-2i}=\frac{(x-1)+yi}{x+(y-2)i}=\frac{((x-1)+yi)(x-(y-2)i)}{(x+(y-2)i)(x-(y-2)i)}=\ldots=$$

$$=\frac{x^2-x+y^2-2y}{x^2+(y-2)^2}+\frac{2x+y-2}{x^2+(y-2)^2}i$$

Άρα

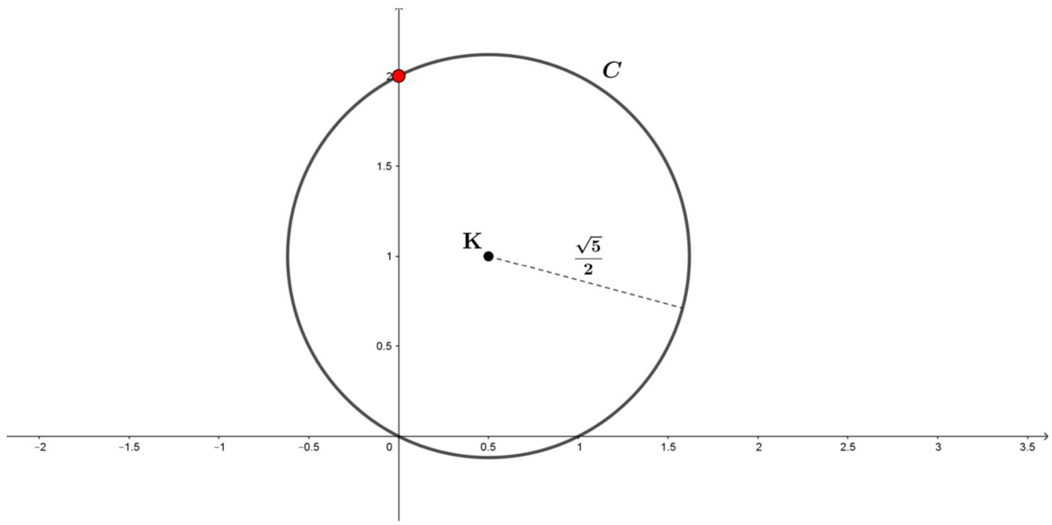
$$\frac{z-1}{z-2i}\in\mathbb{I}\Leftrightarrow\frac{x^2-x+y^2-2y}{x^2+(y-2)^2}=0\Leftrightarrow x^2-x+y^2-2y=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2-2\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}+y^2-2y+1=\frac{1}{4}+1\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y-1)^2=\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2$$

Η εξίσωση $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y-1)^2=\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2$ παριστάνει κύκλο με κέντρο το $K\left(\frac{1}{2},1\right)$ και ακτίνα $\frac{\sqrt{5}}{2}$. Επειδή το σημείο $(0,2)$, το οποίο εξαιρέσαμε κατά τη διαδικασία επίλυσης, ανήκει στον παραπάνω κύκλο (αφού προφανώς ικανοποιεί την εξίσωσή του), τότε ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι ο κύκλος

$$C:\ \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y-1)^2=\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2$$

εκτός του σημείου $(0,2)$:




□

**2.** Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών για τους οποίους ισχύει

$$\operatorname{Re}\left(z+\frac{1}{z}\right)=3\operatorname{Re}(z)$$

__**Λύση:**__

Έστω $z=x+yi$, $x,y\in\mathbb{R}$. Επειδή ο αριθμός $\frac{1}{z}$ ορίζεται για $z\neq 0$, πρέπει $(x,y)\neq(0,0)$. Με αυτόν τον περιορισμό έχουμε

$$z+\frac{1}{z}=x+yi+\frac{1}{x+yi}=x+yi+\frac{x-yi}{(x+yi)(x-yi)}=\ldots=\left(x+\frac{x}{x^2+y^2}\right)+\left(y-\frac{y}{x^2+y^2}\right)i$$

Επομένως

$$\operatorname{Re}\left(z+\frac{1}{z}\right)=3\operatorname{Re}(z)\Leftrightarrow x+\frac{x}{x^2+y^2}=3x\Leftrightarrow 2x-\frac{x}{x^2+y^2}=0\Leftrightarrow x\left(2-\frac{1}{x^2+y^2}\right)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix} x=0 \\ \text{ή} \\ 2-\dfrac{1}{x^2+y^2}=0 \end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix} x=0 \\ \text{ή} \\ x^2+y^2=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \end{matrix}\right\}$$

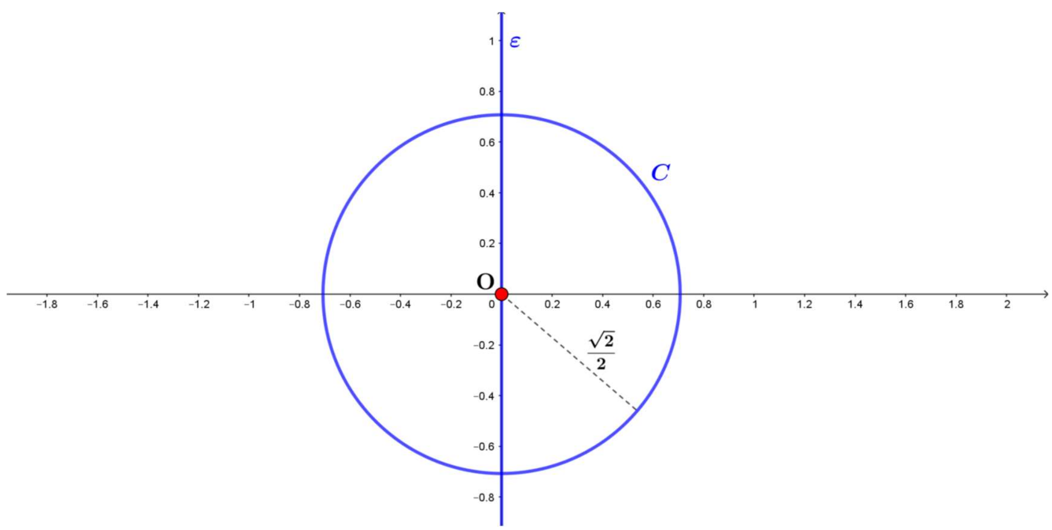
Άρα ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι η ευθεία

$$\varepsilon:\ x=0$$

εκτός του σημείου $(0,0)$ και ο κύκλος

$$C:\ x^2+y^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

(ο κύκλος C έχει κέντρο την αρχή των αξόνων $O(0,0)$ και ακτίνα $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$):




□

**3.** Αν οι μιγαδικοί z ανήκουν στον κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα 1, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών w με $w=3z+1$.

**<u>Λύση:</u>**

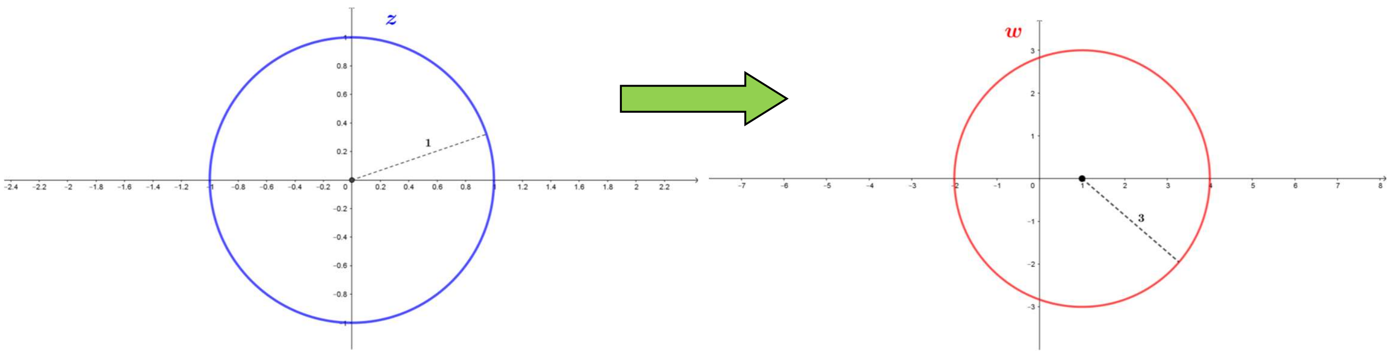
Η εξίσωση στο $\mathbb{C}$ του κύκλου με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα 1 είναι

$$|z|=1$$

(γιατί;). Επομένως έχουμε

$$\left\{\begin{matrix} |z|=1 \\ w=3z+1 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} |z|=1 \\ z=\dfrac{w-1}{3} \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} \left|\dfrac{w-1}{3}\right|=1 \\ z=\dfrac{w-1}{3} \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} |w-1|=3 \\ z=\dfrac{w-1}{3} \end{matrix}\right\}$$

Συνεπώς ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι ο κύκλος με κέντρο την εικόνα του μιγαδικού αριθμού $w_0=1$ και ακτίνα 3:




□

**4.** Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z για τους οποίους ισχύει $|2z-1|=|z-2|$.

**<u>Λύση:</u>**

$$|2z-1|=|z-2| \Leftrightarrow |2z-1|^2=|z-2|^2 \Leftrightarrow (2z-1)\left(\overline{2z-1}\right)=(z-2)\left(\overline{z-2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2z-1)(2\overline{z}-1)=(z-2)(\overline{z}-2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4z\overline{z}-2z-2\overline{z}+1=z\overline{z}-2z-2\overline{z}+4 \Leftrightarrow 3z\overline{z}=3 \Leftrightarrow z\overline{z}=1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |z|^2=1 \Leftrightarrow \boxed{|z|=1}$$

Άρα ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι ο κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων $O(0,0)$ και ακτίνα 1. □

# ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**1.** Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z για τους οποίους ο αριθμός $\frac{z-1}{z+2i}$ είναι πραγματικός.

**2.** Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών για τους οποίους ισχύει

$$4\,\mathrm{Im}(z) = -\mathrm{Im}\left(\frac{1}{z}\right)$$

**3.** Θεωρούμε τους μιγαδικούς z που ικανοποιούν τη σχέση $|z-2-2i| \leq \sqrt{2}$. Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του $|z|$ καθώς και τους μιγαδικούς z για τους οποίους έχουμε αυτές τις τιμές.

**4.** Θεωρούμε τους μιγαδικούς $z = \kappa + 2 + (3\kappa - 1)i$, $\kappa \in \mathbb{R}$. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z καθώς και το μιγαδικό z που έχει την πλησιέστερη εικόνα στην αρχή των αξόνων.

**5.** Θεωρούμε τους μιγαδικούς z οι εικόνες των οποίων βρίσκονται πάνω στον κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα 4. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών $w = z + \frac{4}{z}$ και να τον σχεδιάσετε.

**6.** Έστω Μ, Ν οι εικόνες των μιγαδικών z, w αντίστοιχα. Να δείξετε τα εξής:

**i)** $z\bar{w} = \overrightarrow{OM} \bullet \overrightarrow{ON} - \det\left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}\right) i$

**ii)** $\overrightarrow{OM} \perp \overrightarrow{ON} \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z\bar{w}) = 0$

**iii)** $\overrightarrow{OM} // \overrightarrow{ON} \Leftrightarrow \mathrm{Im}(z\bar{w}) = 0$. □