<u>ΜΙΓΑΔΙΚΟ ΕΠΙΚΑΜΠΥΛΙΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ</u>

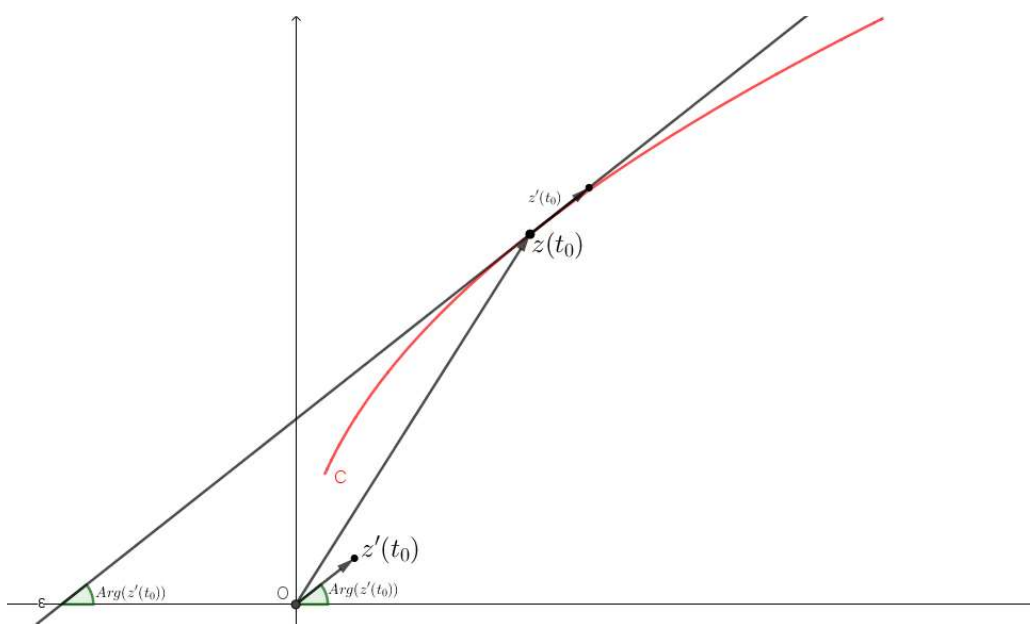
Έστω C μία καμπύλη του μιγαδικού επιπέδου η οποία ορίζεται από τη <u>συνεχή</u> συνάρτηση $z = z(t)$, $t \in [\alpha, b]$.

Η καμπύλη C λέγεται **συνεχώς διαφορίσιμη** (ή C^1 καμπύλη) αν η συνάρτηση $z(t)$ έχει συνεχή παράγωγο στο $[\alpha, b]$. Σε αυτήν την περίπτωση:

- το μήκος της C δίνεται, ως γνωστόν, από τον τύπο:

$$L = \int_{\alpha}^{b} |z'(t)| dt$$

- αν $t_0 \in [\alpha, b]$ με $z'(t_0) \neq 0$, τότε η καμπύλη C έχει στο σημείο της $z(t_0)$ εφαπτόμενο διάνυσμα το $z'(t_0)$ και επομένως έχει εφαπτομένη ευθεία (σε παραμετρική μορφή) την $z(t_0) + \lambda z'(t_0)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ με κλίση $\tan\left(\mathrm{Arg}\left(z'(t_0)\right)\right)$:



(δηλ. η εφαπτομένη ευθεία της C στο σημείο της $z(t_0)$ είναι παράλληλη με το εφαπτόμενο διάνυσμα $z'(t_0)$ της C στο $z(t_0)$).

Για κάθε διαμέριση P του $[\alpha, b]$:

$$\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = b \qquad (n \in \mathbb{N})$$

με C_κ θα συμβολίζουμε τα τόξα της C από το σημείο της $z(t_{\kappa-1})$ έως το σημείο της $z(t_\kappa)$, $\kappa=1,2,...,n$ (δηλ. τις καμπύλες του μιγαδικού επιπέδου που ορίζονται από την $z=z(t)$ για $t\in[t_{\kappa-1},t_\kappa]$, $\kappa=1,2,...,n$).

Η καμπύλη C καλείται **τμηματικά συνεχώς διαφορίσιμη** αν υπάρχει διαμέριση P του $[\alpha,b]$ τέτοια ώστε η $z(t)$ να είναι συνεχώς διαφορίσιμη στο $[t_{\kappa-1},t_\kappa]$, $\kappa=1,2,...,n$. Σε αυτήν την περίπτωση η C μπορεί να χωριστεί σε ένα πεπερασμένο αριθμό συνεχώς διαφορίσιμων καμπυλών οι οποίες είναι τα τόξα C_κ, $\kappa=1,2,...,n$ που αντιστοιχούν στη διαμέριση P. Τότε ισχύει

$$L=L_{C_1}+L_{C_2}+\ldots+L_{C_n}=\sum_{\kappa=1}^{n}L_{C_\kappa}$$

όπου L είναι το μήκος της C και L_{C_κ} είναι το μήκος των C_κ, $\kappa=1,2,...,n$ (δηλ. το μήκος μίας τμηματικά συνεχώς διαφορίσιμης καμπύλης είναι το άθροισμα των μηκών των συνεχώς διαφορίσιμων τμημάτων της).

Ορισμός επικαμπύλιου ολοκληρώματος

Έστω C μία συνεχώς διαφορίσιμη καμπύλη του μιγαδικού επιπέδου η οποία ορίζεται από τη συνάρτηση $z=z(t)$, $t\in[\alpha,b]$ και $f(z)$ μία μιγαδική συνάρτηση τέτοια ώστε η συνάρτηση $f(z(t))$, $t\in[\alpha,b]$ να είναι συνεχής στο $[\alpha,b]$ (σε αυτήν την περίπτωση η συνάρτηση f καλείται συνεχής πάνω στην καμπύλη C). Τότε ως **επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της** $f(z)$ **κατά μήκος της καμπύλης C** ορίζεται το ορισμένο ολοκλήρωμα

$$\boxed{\int_C f(z)dz=\int_\alpha^b f(z(t))z'(t)dt}$$

(το ολοκλήρωμα $\int_C f(z)dz$ μπορεί να οριστεί και με τη γενικότερη συνθήκη η C να έχει μήκος).

Αν η καμπύλη C είναι **τμηματικά συνεχώς διαφορίσιμη** τότε υπάρχει μία διαμέριση P του $[\alpha, b]$ τέτοια ώστε τα τόξα C_κ, $\kappa = 1, 2, ..., n$ που αντιστοιχούν στη διαμέριση P να είναι συνεχώς διαφορίσιμες καμπύλες. Τότε για $f(z)$ συνάρτηση συνεχή πάνω στην καμπύλη C ορίζουμε

$$\int_C f(z)dz = \sum_{\kappa=1}^{n} \int_{C_\kappa} f(z)dz$$

(το ολοκλήρωμα $\int_C f(z)dz$ είναι ανεξάρτητο από τη διαμέριση P του $[\alpha, b]$ με την ιδιότητα τα τόξα που αντιστοιχούν στην P να είναι συνεχώς διαφορίσιμες καμπύλες).

Συμβολισμός: Αν η καμπύλη C είναι κλειστή, τότε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα συμβολίζεται συχνά και ως

$$\oint_C f(z)dz$$

(χωρίς ο τελευταίος συμβολισμός να τηρείται απαρέγκλιτα).

<u>Παρατήρηση 1:</u> Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα δεν επηρεάζεται από την παραμετρικοποίηση της καμπύλης C (θεωρούμε ως γνωστόν την καμπύλη C ως ένα σύνολο <u>διατεταγμένων</u> σημείων του μιγαδικού επιπέδου). □

<u>Πρόταση 2:</u> Έστω C μία τμηματικά συνεχώς διαφορίσιμη καμπύλη και $f(z)$, $g(z)$ συναρτήσεις συνεχείς πάνω στη C. Έστω ακόμη $\alpha, b \in \mathbb{C}$. Τότε:

i) $$\int_C (\alpha \cdot f(z) + b \cdot g(z))dz = \alpha \int_C f(z)dz + b \int_C g(z)dz$$

ii) $$\int_{C^-} f(z)dz = -\int_C f(z)dz.$$ □

<u>Πρόταση 3:</u> Έστω w_1, w_2, w_3 σημεία του μιγαδικού επιπέδου και C_1, C_2 τμηματικά συνεχώς διαφορίσιμες καμπύλες τέτοιες ώστε η αρχή της C_1 να είναι το w_1 και το πέρας της να είναι το w_2 ενώ η αρχή της C_2 να είναι το w_2 και το πέρας της να είναι το w_3. Έστω ακόμη μία συνάρτηση $f(z)$ η οποία είναι συνεχής πάνω στην καμπύλη $C_1 \cup C_2$ (η φορά διαγραφής της καμπύλης $C_1 \cup C_2$ είναι η $w_1 \underset{C_1}{\rightarrow} w_2 \underset{C_2}{\rightarrow} w_3$). Τότε έχουμε

$$\int_{C_1 \cup C_2} f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz \qquad \square$$

Το αποτέλεσμα της προηγούμενης Πρότασης επεκτείνεται και για περισσότερα από τρία σημεία του μιγαδικού επιπέδου.

Έστω A ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{C}$ και $f : A \to \mathbb{C}$ συνάρτηση. Μία συνάρτηση F καλείται **αρχική συνάρτηση της f στο A** αν για κάθε $z \in A$ ισχύει $F'(z) = f(z)$ - επομένως η συνάρτηση $f(z)$ είναι συνεχής όπως και ολόμορφη στο A (γιατί;).

<u>Θεώρημα 4:</u> Έστω A ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{C}$, $f : A \to \mathbb{C}$ συνάρτηση και F αρχική συνάρτηση της f στο A. Έστω ακόμη C μία τμηματικά συνεχώς διαφορίσιμη καμπύλη η οποία ορίζεται από τη συνάρτηση $z = z(t)$, $t \in [\alpha, b]$ με $z([\alpha, b]) \subseteq A$. Τότε

$$\int_C f(z)dz = F(z(b)) - F(z(\alpha))$$

<u>Απόδειξη:</u> Αφού η C είναι τμηματικά συνεχώς διαφορίσιμη τότε υπάρχει διαμέριση P του $[\alpha, b]$

$$\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = b \qquad (n \in \mathbb{N})$$

τέτοια ώστε η $z(t)$ να είναι συνεχώς διαφορίσιμη στο $[t_{\kappa-1}, t_\kappa]$, $\kappa = 1, 2, \ldots, n$. Τότε έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_C f(z)dz &= \sum_{\kappa=1}^{n} \int_{C_\kappa} f(z)dz = \sum_{\kappa=1}^{n} \int_{t_{\kappa-1}}^{t_\kappa} f(z(t))z'(t)dt = \sum_{\kappa=1}^{n} \int_{t_{\kappa-1}}^{t_\kappa} F'(z(t))z'(t)dt = \sum_{\kappa=1}^{n} \int_{t_{\kappa-1}}^{t_\kappa} (F \circ z)'(t)dt = \\
&= \sum_{\kappa=1}^{n} \left((F \circ z)(t_\kappa) - (F \circ z)(t_{\kappa-1}) \right) = \\
&= \left(F(z(t_1)) - F(z(t_0)) \right) + \left(F(z(t_2)) - F(z(t_1)) \right) + \ldots + \left(F(z(t_n)) - F(z(t_{n-1})) \right) = \\
&= F(z(b)) - F(z(\alpha))
\end{aligned}$$

$\square$

<u>Συμβολισμός:</u> $F(z(b)) - F(z(\alpha)) = [F(z)]_{z(\alpha)}^{z(b)}$. Είναι φανερό ότι ισχύουν τα εξής:

Αν οι συναρτήσεις $f(z)$, $g(z)$, $f'(z)$, $g'(z)$ είναι συνεχείς πάνω στην τμηματικά συνεχώς διαφορίσιμη καμπύλη C η οποία έχει αρχή το σημείο z_1 και πέρας το σημείο z_2, τότε

- $\boxed{\int_C f'(z)dz = f(z_2) - f(z_1)}$
- $\boxed{\int_C f'(z)g(z)dz = f(z_2)g(z_2) - f(z_1)g(z_1) - \int_C f(z)g'(z)dz}$

Παρατήρηση 5: Με τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος 4 αν επιπλέον η C είναι κλειστή καμπύλη, τότε έχουμε αμέσως ότι

$$\oint_C f(z)dz = 0 \qquad \square$$

Πόρισμα 6: Έστω A ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{C}$, $f: A \to \mathbb{C}$ ολόμορφη συνάρτηση και C μία τμηματικά συνεχώς διαφορίσιμη κλειστή καμπύλη η οποία ορίζεται από τη συνάρτηση $z = z(t)$, $t \in [\alpha, b]$ με $z([\alpha, b]) \subseteq A$. Τότε

$$\oint_C f'(z)dz = 0$$

Απόδειξη: Από το Θεώρημα 4 επειδή η C είναι κλειστή καμπύλη έχουμε αμέσως

$$\oint_C f'(z)dz = f(z(b)) - f(z(\alpha)) = 0 \qquad \square$$

Παρατήρηση 7: Έστω A ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{C}$, $f: A \to \mathbb{C}$ συνάρτηση, F αρχική συνάρτηση της f στο A και $B(z_1)$, $\Gamma(z_2)$ δύο σημεία του A. Τότε από το Θεώρημα 4 έχουμε αμέσως ότι το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της $f(z)$ κατά μήκος μίας τμηματικά συνεχώς διαφορίσιμης καμπύλης C που ξεκινά από το B και καταλήγει στο Γ και περιέχεται στο A δεν εξαρτάται από την καμπύλη C και μάλιστα για οποιαδήποτε καμπύλη C με την προηγούμενη ιδιότητα έχουμε

$$\int_C f(z)dz = F(z_2) - F(z_1)$$

(δηλ. το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της $f(z)$ είναι ανεξάρτητο από το δρόμο ολοκλήρωσης πάνω στο A). Σε αυτήν την περίπτωση και εφόσον δε απαιτείται η συγκεκριμενοποίηση της καμπύλης C, το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα το συμβολίζουμε

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)\,dz \qquad \square$$

Ισχύει και το "αντίστροφο" του Θεωρήματος 4:

Πρόταση 8: Έστω D πεδίο και $f: D \to \mathbb{C}$ συνεχής συνάρτηση με την ιδιότητα:

Για κάθε A, B σημεία του D το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της $f(z)$ κατά μήκος μίας τμηματικά συνεχώς διαφορίσιμης καμπύλης C με αρχή το A και πέρας το B που περιέχεται στο D δεν εξαρτάται από την καμπύλη C (δηλ. το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της $f(z)$ είναι ανεξάρτητο από το δρόμο ολοκλήρωσης πάνω στο D).

Τότε η $f(z)$ έχει αρχική συνάρτηση στο D. $\square$

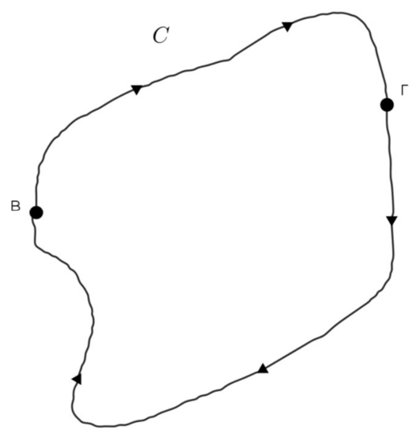
Πρόταση 9: Έστω A ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{C}$ και $f: A \to \mathbb{C}$ συνεχής συνάρτηση με την ιδιότητα:

Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της $f(z)$ είναι ανεξάρτητο από το δρόμο ολοκλήρωσης πάνω στο A.

Έστω C μία τμηματικά συνεχώς διαφορίσιμη καμπύλη του A η οποία είναι κλειστή. Τότε

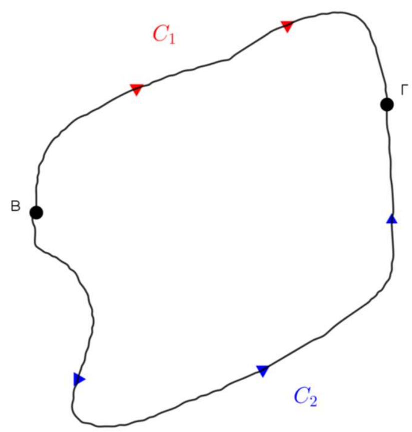
$$\oint_C f(z)\,dz = 0$$

Απόδειξη: Θεωρούμε δύο σημεία B, Γ της κλειστής καμπύλης C:



(στο παραπάνω σχήμα φαίνεται η διεύθυνση σχηματισμού της C).

Έστω C_1 το "πάνω" τμήμα της καμπύλης C από το B στο Γ και C_2 το "κάτω" τμήμα της καμπύλης C από το B στο Γ:



Προφανώς:

- C_1, C_2 είναι τμηματικά συνεχώς διαφορίσιμες καμπύλες (αφού η C είναι τμηματικά συνεχώς διαφορίσιμη καμπύλη)
- $C = C_1 \cup C_2^{-}$.

Επειδή το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της $f(z)$ είναι ανεξάρτητο από το δρόμο ολοκλήρωσης πάνω στο D, έχουμε αμέσως ότι

$$\int_{C_1} f(z)\,dz = \int_{C_2} f(z)\,dz \Leftrightarrow \int_{C_1} f(z)\,dz - \int_{C_2} f(z)\,dz = 0 \Leftrightarrow \int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_2^-} f(z)\,dz = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_{C_1 \cup C_2^-} f(z)\,dz = 0 \Leftrightarrow \oint_C f(z)\,dz = 0$$

□

Με όμοιο τρόπο αποδεικνύεται και η αντίστροφη Πρόταση της Πρότασης 9:

Πρόταση 10: Έστω A ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{C}$ και $f : A \to \mathbb{C}$ συνεχής συνάρτηση με την ιδιότητα:

Για κάθε C τμηματικά συνεχώς διαφορίσιμη καμπύλη του A η οποία είναι κλειστή, ισχύει

$$\oint_C f(z)\,dz = 0.$$

Τότε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της $f(z)$ είναι ανεξάρτητο από το δρόμο ολοκλήρωσης πάνω στο A. □

Θεώρημα 11 (Morera): Έστω A ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{C}$ και $f : A \to \mathbb{C}$ συνεχής συνάρτηση με την ιδιότητα:

Για κάθε C τμηματικά συνεχώς διαφορίσιμη καμπύλη του A η οποία είναι κλειστή, ισχύει

$$\oint_C f(z)\,dz = 0$$

Τότε η $f(z)$ είναι ολόμορφη στο A.

Απόδειξη: Έστω $z_0 \in A$. Θα δείξουμε ότι υπάρχει (στο $\mathbb{C}$) η παράγωγος $f'(z_0)$.

Αφού $z_0 \in A$ και το A είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{C}$, τότε υπάρχει $r > 0$ τέτοιο ώστε $S(z_0, r) \subseteq A$. Επειδή ο δίσκος $S(z_0, r)$ είναι πεδίο και το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της $f(z)$ είναι (βλ. Πρόταση 10) ανεξάρτητο από το δρόμο ολοκλήρωσης πάνω στο $S(z_0, r)$, τότε από την Πρόταση 8 έπεται αμέσως η $f(z)$ έχει αρχική συνάρτηση στο $S(z_0, r)$, δηλ. υπάρχει συνάρτηση $F(z)$ τέτοια ώστε για κάθε $z \in S(z_0, r)$ να ισχύει $F'(z) = f(z)$. Άρα $F'(z_0) = f(z_0)$. Τότε όπως γνωρίζουμε υπάρχει η $F''(z_0)$. Άρα υπάρχει η παράγωγος $f'(z_0)$ (και μάλιστα $f'(z_0) = F''(z_0)$).

□

Με την ορολογία των καμπυλών έχουμε αμέσως ότι ένα πεδίο A του $\mathbb{C}$ είναι **απλό συνεκτικό** αν περιέχει το εσωτερικό κάθε απλής κλειστής καμπύλης του.

Το επόμενο Θεώρημα είναι το "αντίστροφο" του Θεωρήματος 10:

Θεώρημα 12 (Cauchy - Goursat): Έστω D απλό συνεκτικό πεδίο του $\mathbb{C}$ και $f: D \to \mathbb{C}$ συνάρτηση ολόμορφη στο D. Τότε για κάθε κλειστή και τμηματικά συνεχώς διαφορίσιμη καμπύλη C του D έχουμε ότι

$$\oint_C f(z)\,dz = 0$$ □

Παρατήρηση 13: Επομένως αν D είναι ένα απλό συνεκτικό πεδίο του $\mathbb{C}$ και $f: D \to \mathbb{C}$ είναι μία ολόμορφη συνάρτηση στο D, τότε, λόγω του Θεωρήματος 12, ισχύει προφανώς η Πρόταση 10. Επομένως το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της $f(z)$ είναι ανεξάρτητο από το δρόμο ολοκλήρωσης πάνω στο D. □

Από την προηγηθείσα ανάλυση έχουμε αμέσως το εξής

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ

Έστω D απλό συνεκτικό πεδίο του $\mathbb{C}$ και $f: D \to \mathbb{C}$ συνεχής συνάρτηση. Τα εξής είναι ισοδύναμα:

- Για κάθε A, B σημεία του D το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της $f(z)$ κατά μήκος μίας τμηματικά συνεχώς διαφορίσιμης καμπύλης C με αρχή το A και πέρας το B που περιέχεται στο D δεν εξαρτάται από την καμπύλη C (δηλ. το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της $f(z)$ είναι ανεξάρτητο από το δρόμο ολοκλήρωσης πάνω στο D).

- Για κάθε C τμηματικά συνεχώς διαφορίσιμη καμπύλη του D η οποία είναι κλειστή, ισχύει $\oint_C f(z)dz = 0$.
- Η $f(z)$ έχει αρχική συνάρτηση στο D (δηλ. υπάρχει συνάρτηση $F(z)$ τέτοια ώστε $F'(z) = f(z)$ για κάθε $z \in D$).
- Η f είναι ολόμορφη στο D. □

Έστω C μία απλή και κλειστή καμπύλη. Η καμπύλη C λέμε ότι είναι **θετικά προσανατολισμένη** αν ένας παρατηρητής κινούμενος πάνω στη C κατά τη φορά σχηματισμού της αφήνει αριστερά του το εσωτερικό της. Η παραμετρικοποίηση $z = z(t)$, $t \in [\alpha, b]$ καθορίζει τη φορά σχηματισμού της ξεκινώντας από το αρχικό σημείο $z(\alpha)$ μέχρι το τελικό σημείο $z(b)$ ($= z(\alpha)$ αφού η C είναι κλειστή). Αυτή η φορά σχηματισμού της (με βάση τη συγκεκριμένη παραμετρικοποίηση) καθορίζει αν η καμπύλη C είναι θετικά ή αρνητικά προσανατολισμένη. Μία άλλη παραμετρικοποίηση του ίχνους της καμπύλης C πιθανόν να αλλάξει τον προσανατολισμό. Προφανώς αν η C είναι θετικά (αντ. αρνητικά) προσανατολισμένη τότε η C^- είναι αρνητικά (αντ. θετικά) προσανατολισμένη και αντίστροφα.

<u>Θεώρημα 14 (αρχή της συνεχούς παραμόρφωσης):</u> Έστω A ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{C}$, $f : A \to \mathbb{C}$ συνάρτηση ολόμορφη στο A και C_1, C_2 δύο τμηματικά συνεχώς διαφορίσιμες απλές και κλειστές καμπύλες του A τέτοιες ώστε:

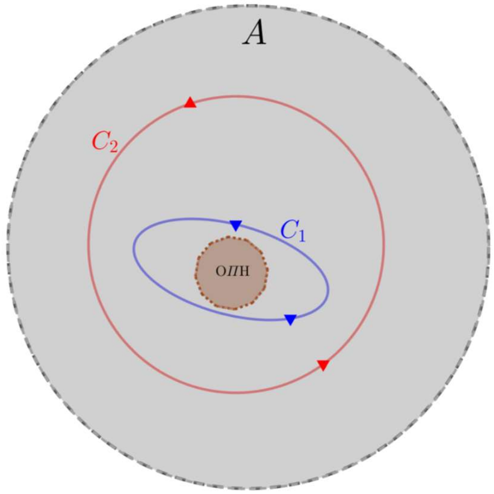
- οι C_1, C_2 να έχουν τον ίδιο προσανατολισμό
- η C_1 να είναι στο εσωτερικό της C_2 (μπορεί να έχουν και πεπερασμένα στο πλήθος κοινά σημεία)
- το χωρίο του $\mathbb{C}$ το οποίο βρίσκεται ανάμεσα στις C_1, C_2 να περιέχεται στο A.

Τότε ισχύει

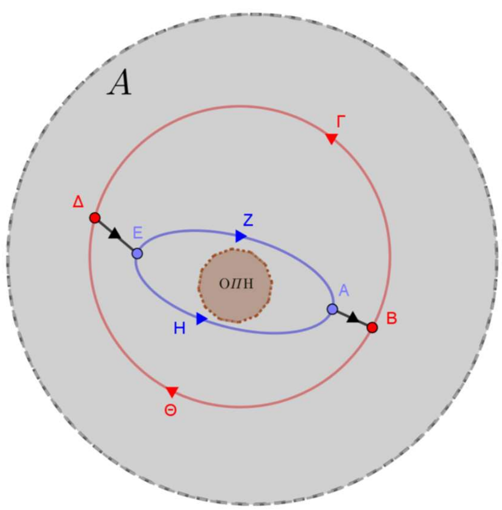
$$\int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz$$

<u>Απόδειξη:</u>

Στο παρακάτω σχήμα εμφανίζονται οι καμπύλες C_1, C_2 (με θετικό προσανατολισμό) και το σύνολο A (χωρίς την "οπή"):



Θεωρούμε τις καμπύλες $S_1 = \Delta E \cup C_{EZA} \cup AB \cup C_{B\Gamma\Delta}$ και $S_2 = \Delta E \cup C_{EHA} \cup AB \cup C_{B\Theta\Delta}$ όπου ΑΒ και ΔΕ είναι τα ευθύγραμμα τμήματα, τα C_{EZA}, C_{EHA} είναι τα "τόξα" της C_1 και τα $C_{B\Gamma\Delta}$, $C_{B\Theta\Delta}$ είναι τα "τόξα" της C_2 που φαίνονται στο παρακάτω σχήμα (στο οποίο σημειώνονται και οι διευθύνσεις σχηματισμού των καμπυλών S_1, S_2):



Προφανώς οι καμπύλες S_1, S_2 είναι τμηματικά συνεχώς διαφορίσιμες, απλές, κλειστές και περιέχονται σε απλά συνεκτικά πεδία υποσύνολα του Α. Τότε από το Θεώρημα 12 έχουμε αμέσως ότι

$$\oint_{S_1} f(z)\,dz = 0 = \oint_{S_2} f(z)\,dz$$

Όμως

- $\displaystyle\oint_{S_1} f(z)\,dz = \int_{\Delta E} f(z)\,dz + \int_{C_{EZA}} f(z)\,dz + \int_{AB} f(z)\,dz + \int_{C_{B\Gamma\Delta}} f(z)\,dz$
- $\displaystyle\oint_{S_2} f(z)\,dz = \int_{\Delta E} f(z)\,dz + \int_{C_{EHA}} f(z)\,dz + \int_{AB} f(z)\,dz + \int_{C_{B\Theta\Delta}} f(z)\,dz$

Άρα

$$\begin{aligned}
\oint_{S_1} f(z)\,dz = \oint_{S_2} f(z)\,dz &\Leftrightarrow \int_{\Delta E} f(z)\,dz + \int_{C_{EZA}} f(z)\,dz + \int_{AB} f(z)\,dz + \int_{C_{B\Gamma\Delta}} f(z)\,dz = \\
&= \int_{\Delta E} f(z)\,dz + \int_{C_{EHA}} f(z)\,dz + \int_{AB} f(z)\,dz + \int_{C_{B\Theta\Delta}} f(z)\,dz \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \int_{C_{EZA}} f(z)\,dz + \int_{C_{B\Gamma\Delta}} f(z)\,dz = \int_{C_{EHA}} f(z)\,dz + \int_{C_{B\Theta\Delta}} f(z)\,dz \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \int_{C_{B\Gamma\Delta}} f(z)\,dz - \int_{C_{B\Theta\Delta}} f(z)\,dz = \int_{C_{EHA}} f(z)\,dz - \int_{C_{EZA}} f(z)\,dz \Leftrightarrow \\
&\underset{\begin{pmatrix} C_{B\Theta\Delta} = C_{\Delta\Theta B}^{-} \\ C_{EZA} = C_{AZE}^{-} \end{pmatrix}}{\Leftrightarrow} \int_{C_{B\Gamma\Delta}} f(z)\,dz + \int_{C_{\Delta\Theta B}} f(z)\,dz = \int_{C_{EHA}} f(z)\,dz + \int_{C_{AZE}} f(z)\,dz \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \int_{C_2} f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz
\end{aligned}$$

Παρατηρήστε ότι αν μία τμηματικά συνεχώς διαφορίσιμη και κλειστή καμπύλη C του A δεν περιέχει καμία οπή του A τότε, σύμφωνα με το Θεώρημα 12, το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της $f(z)$ κατά μήκος της C είναι μηδέν. □

Στην πράξη συνήθως εφαρμόζεται το προηγούμενο Θεώρημα με επιλογή κατάλληλου κύκλου ως καμπύλη C_1.

Με ανάλογο τρόπο αποδεικνύεται και το εξής:

<u>Θεώρημα 15:</u> Έστω A ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{C}$, $f : A \to \mathbb{C}$ συνάρτηση ολόμορφη στο A και C, C_1, C_2, ..., C_n $(n \in \mathbb{N})$ τμηματικά συνεχώς διαφορίσιμες απλές και κλειστές καμπύλες του A τέτοιες ώστε:

- οι C, C_1, C_2, ..., C_n έχουν τον ίδιο προσανατολισμό
- η C_κ, $\kappa = 1, 2, ..., n$ είναι στο εσωτερικό της C (μπορεί να έχουν και πεπερασμένα στο πλήθος κοινά σημεία)
- το εσωτερικό της C_i δεν έχει κοινά σημεία με το εσωτερικό της C_j για $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$ με $i \neq j$.
- το χωρίο του $\mathbb{C}$ το οποίο βρίσκεται ανάμεσα στις C, C_1, C_2, ..., C_n περιέχεται στο A.

Τότε ισχύει

$$\int_C f(z)\,dz = \sum_{\kappa=1}^{n} \int_{C_\kappa} f(z)\,dz \qquad \square$$

Θεώρημα 16 (ολοκληρωτικός τύπος του Cauchy): Έστω D απλό συνεκτικό πεδίο του $\mathbb{C}$, $f : D \to \mathbb{C}$ συνάρτηση ολόμορφη στο D και C μία απλή, κλειστή, τμηματικά συνεχώς διαφορίσιμη και θετικά προσανατολισμένη καμπύλη του D. Τότε για κάθε z_0 εσωτερικό σημείο της C έχουμε ότι

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz \qquad \square$$

Συνήθως στην πράξη το παραπάνω Θεώρημα το εφαρμόζουμε για καμπύλη C κύκλο με κέντρο την εικόνα του z_0 στο μιγαδικό επίπεδο και ακτίνα κατάλληλο θετικό αριθμό. Επιπλέον ο παραπάνω τύπος (εφόσον βέβαια πληρούνται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος 16) χρησιμοποιείται και για τον κατευθείαν υπολογισμό του ολοκληρώματος $\int_C \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz$ $(= f(z_0) 2\pi i)$.

Παρατήρηση 17: Με τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος 16, αποδεικνύεται ότι για κάθε z_0 εσωτερικό σημείο της C και για κάθε μη αρνητικό ακέραιο n ισχύει ότι

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\,dz$$

(από αυτό έπεται ότι αν το A είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{C}$ και $f: A \to \mathbb{C}$ συνάρτηση ολόμορφη στο A, τότε η $f(z)$ έχει παραγώγους οποιασδήποτε τάξης στο A). Επομένως

$$\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0) \qquad \square$$

Παραδείγματα

1. Έστω $z_0 \in \mathbb{C}$, $R > 0$ και C η απλή και κλειστή καμπύλη του μιγαδικού επιπέδου που είναι ο θετικά προσανατολισμένος κύκλος με κέντρο το σημείο $K(z_0)$ και ακτίνα R (δηλ. το ίχνος της C είναι το σύνολο $\{z \in \mathbb{C} / |z - z_0| = R\}$). Για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_C (z-z_0)^n dz$$

<u>Λύση:</u>

Μία παραμετρική εξίσωση της C (αυτή συνήθως εφαρμόζεται στην πράξη) είναι ως γνωστόν η

$$z = z(t) = z_0 + Re^{it}, \ t \in [0, 2\pi]$$

Τότε μάλιστα έχουμε ότι $z'(t) = iRe^{it}$ για κάθε $t \in [0, 2\pi]$ και άρα η C είναι συνεχώς διαφορίσιμη καμπύλη.

Έστω τώρα $n \in \mathbb{Z}$. Επειδή η συνάρτηση $f(z) = (z - z_0)^n$ είναι προφανώς συνεχής πάνω στην καμπύλη C, τότε από τον ορισμό του επικαμπύλιου ολοκληρώματος της $f(z)$ κατά μήκος της καμπύλης C έχουμε ότι

$$\int_C (z-z_0)^n dz = \int_0^{2\pi} \left(Re^{it}\right)^n iR\, e^{it} dt = iR^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t} dt \qquad (1)$$

- Για $\underline{n = -1}$, τότε από την (1) έπεται αμέσως

$$\int_C (z-z_0)^{-1} dz = i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i$$

- Για $\underline{n \neq -1}$, τότε από την (1) έπεται αμέσως

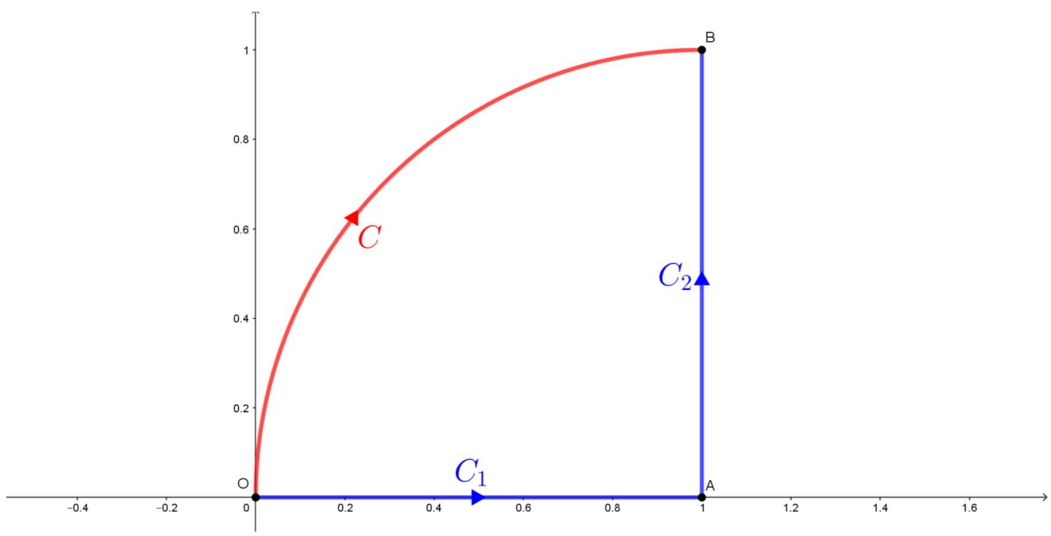
$$\int_C (z-z_0)^n \, dz = iR^{n+1}\int_0^{2\pi}\left(\frac{e^{i(n+1)t}}{i(n+1)}\right)' dt = \frac{iR^{n+1}}{i(n+1)}\left[e^{i(n+1)t}\right]_0^{2\pi} = \ldots = 0$$

Άρα

$$\boxed{\int_C (z-z_0)^n \, dz = \begin{cases} 0, & n\in\mathbb{Z} \text{ με } n\neq -1 \\ 2\pi i, & n=-1 \end{cases}} \qquad (2)$$

Παρατήρηση: Από τη (2) συμπεραίνουμε αμέσως ότι το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα δεν εξαρτάται από την ακτίνα R. Επίσης από το Θεώρημα 14 έχουμε αμέσως ότι το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_S (z-z_0)^n \, dz$ όπου S είναι μία τμηματικά συνεχώς διαφορίσιμη καμπύλη η οποία είναι απλή, κλειστή, θετικά προσανατολισμένη και περιέχει στο εσωτερικό της το z_0, δίνεται από τη σχέση (2). □

2. Δίνεται το παρακάτω σχήμα



Έστω C η κόκκινη καμπύλη (είναι τεταρτοκύκλιο του κύκλου με κέντρο το σημείο $A(1,0)$ και ακτίνα 1) και $S=C_1\cup C_2$ η μπλε καμπύλη (αποτελείται από τα δύο ευθύγραμμα τμήματα OA και AB). Οι φορές σχηματισμού των καμπυλών είναι αυτές που φαίνονται στο σχήμα. Να υπολογίσετε τα επικαμπύλια ολοκληρώματα $\int_C \overline{z}dz$ και $\int_S \overline{z}dz$.

<u>Λύση:</u>

- Η C^- έχει παραμετρική εξίσωση $\gamma(t) = 1 + e^{it}$, $\frac{\pi}{2} \le t \le \pi$. Άρα μία παραμετρική εξίσωση της C είναι η

  $$z = z(t) = \gamma(-t) = 1 + e^{-it}, \ -\pi \le t \le -\frac{\pi}{2}$$

  Τότε μάλιστα έχουμε ότι $z'(t) = -i\,e^{-it}$ για κάθε $t \in \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right]$ και άρα η C είναι συνεχώς διαφορίσιμη καμπύλη.

  Επειδή η συνάρτηση $f(z) = \overline{z}$ είναι προφανώς συνεχής πάνω στην καμπύλη C, τότε από τον ορισμό του επικαμπύλιου ολοκληρώματος της $f(z)$ κατά μήκος της καμπύλης C έχουμε ότι

$$\int_C \overline{z}dz = \int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} \overline{1+e^{-it}}\left(-ie^{-it}\right)dt = -i\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} \left(1+e^{it}\right)e^{-it}dt = -i\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} \left(e^{-it}+1\right)dt = -i\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} \left(\frac{e^{-it}}{-i}+t\right)' dt$$

$$= -i\left[\frac{e^{-it}}{-i}+t\right]_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} = \ldots = 1 + \left(1 - \frac{\pi}{2}\right)i$$

Παρατήρηση: Θα μπορούσαμε πρώτα να βρούμε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_{C^-} \overline{z}dz$ στηριζόμενοι για τη C^- στην παραμετρικοποίηση $\gamma(t)$ και στη συνέχεια να εφαρμόσουμε τη σχέση $\int_C \overline{z}dz = -\int_{C^-} \overline{z}dz$.

- Προφανώς

$$\int_S \overline{z}dz = \int_{C_1} \overline{z}dz + \int_{C_2} \overline{z}dz \qquad (1)$$

  - <u>$\int_{C_1} \overline{z}dz$</u>

Η C_1 έχει παραμετρική εξίσωση $z(t)=t$, $0\le t\le 1$. Τότε μάλιστα έχουμε ότι $z'(t)=1$ για κάθε $t\in[0,1]$ και άρα η C είναι συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση.

Επειδή η συνάρτηση $f(z)=\overline{z}$ είναι προφανώς συνεχής πάνω στην καμπύλη C_1, τότε από τον ορισμό του επικαμπύλιου ολοκληρώματος της $f(z)$ κατά μήκος της καμπύλης C_1 έχουμε ότι

$$\int_{C_1}\overline{z}dz=\int_0^1\overline{t}\cdot 1dt=\int_0^1 tdt=\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1=\frac{1}{2} \qquad (2)$$

- $\underline{\int_{C_2}\overline{z}dz}$

Η C_2 έχει παραμετρική εξίσωση $z(t)=1+it$, $0\le t\le 1$. Τότε μάλιστα έχουμε ότι $z'(t)=i$ για κάθε $t\in[0,1]$ και άρα η C είναι συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση.

Επειδή η συνάρτηση $f(z)=\overline{z}$ είναι προφανώς συνεχής πάνω στην καμπύλη C_2, τότε από τον ορισμό του επικαμπύλιου ολοκληρώματος της $f(z)$ κατά μήκος της καμπύλης C_2 έχουμε ότι

$$\int_{C_2}\overline{z}dz=\int_0^1\overline{(1+it)}\cdot idt=\int_0^1(1-it)\cdot idt=\int_0^1(t+i)dt=\int_0^1\left(\frac{t^2}{2}+it\right)'dt=$$

$$=\left[\frac{t^2}{2}+it\right]_0^1=\ldots=\frac{1}{2}+i \qquad (3)$$

Τότε από την (1) με τη βοήθεια των (2), (3) έχουμε αμέσως ότι

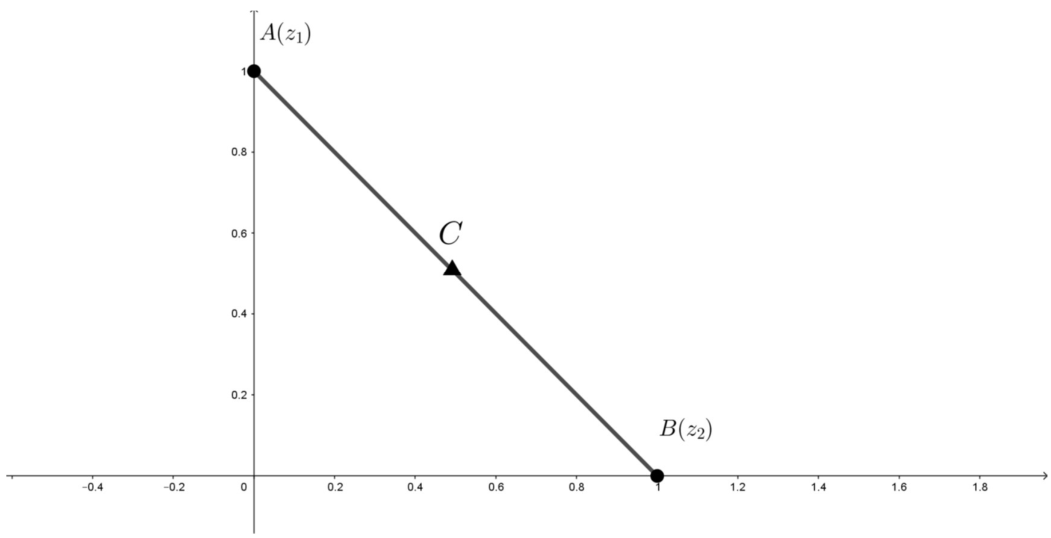
$$\int_S\overline{z}dz=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+i=1+i$$

Παρατηρήστε ότι οι δύο καμπύλες C και S ξεκινούν από την αρχή των αξόνων $O(0,0)$ και καταλήγουν στο σημείο $B(1,1)$. Επειδή τα επικαμπύλια ολοκληρώματα $\int_C\overline{z}dz$ και $\int_S\overline{z}dz$ είναι διαφορετικά, τότε από το **ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ** έπεται αμέσως ότι η συνάρτηση $f(z)=\overline{z}$ <u>δεν είναι ολόμορφη στο</u> $\mathbb{C}$ (διότι αν ήταν τότε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της $f(z)$ θα ήταν ανεξάρτητο από το δρόμο ολοκλήρωσης πάνω στο $\mathbb{C}$). □

3. Έστω C το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα σημεία $z_1 = i$ και $z_2 = 1$ με φορά από το z_1 στο z_2. Να υπολογίσετε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_C e^z dz$.

Λύση:

Η καμπύλη C φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Μία παραμετρική εξίσωση της C είναι η

$$z = z(t) = z_1 + t(z_2 - z_1) = \ldots = t + (1-t)i,\ t \in [0,1]$$

Τότε μάλιστα έχουμε ότι $z'(t) = 1 - i$ για κάθε $t \in [0,1]$ και άρα η C είναι συνεχώς διαφορίσιμη καμπύλη.

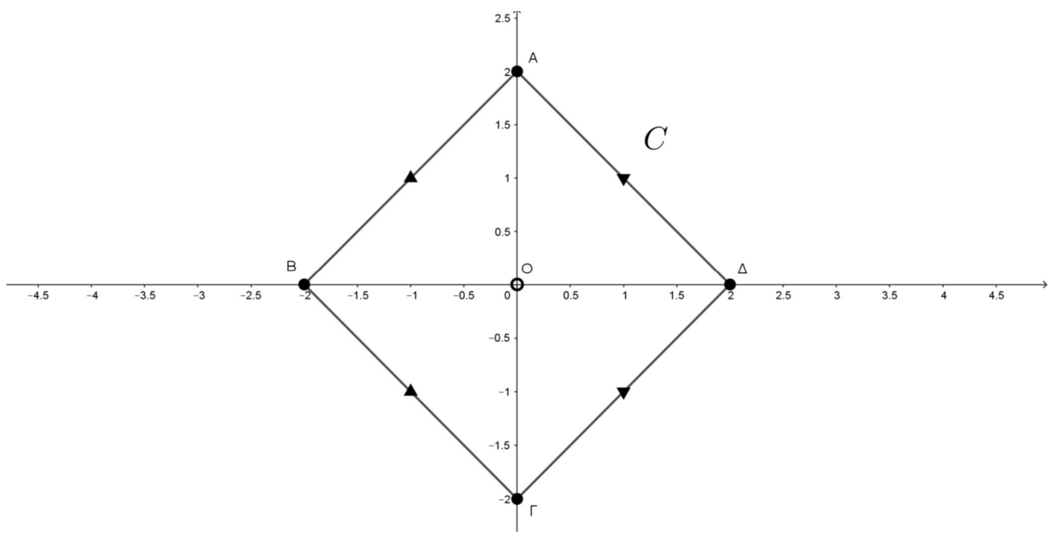
Επειδή η συνάρτηση $f(z) = e^z$ είναι προφανώς συνεχής πάνω στην καμπύλη C, τότε από τον ορισμό του επικαμπύλιου ολοκληρώματος της $f(z)$ κατά μήκος της καμπύλης C έχουμε ότι

$$\int_C e^z dz = \int_0^1 e^{t+(1-t)i}(1-i)dt = \ldots = (1-i)e^i \int_0^1 e^{t-ti} dt = (1-i)e^i \int_0^1 \left(\frac{e^{t-ti}}{1-i}\right)' dt = e^i \left[e^{t-ti}\right]_0^1 = \ldots = e - e^i$$

Παρατήρηση: Το ολοκλήρωμα $\int_C e^z dz$ μπορεί να υπολογιστεί ευκολότερα με χρήση του Θεωρήματος 4:

$$\int_C e^z dz = \int_C \left(e^z\right)' dz = \left[e^z\right]_{z(0)}^{z(1)} = \left[e^z\right]_{z_1}^{z_2} = e^{z_2} - e^{z_1} = e - e^i \qquad \square$$

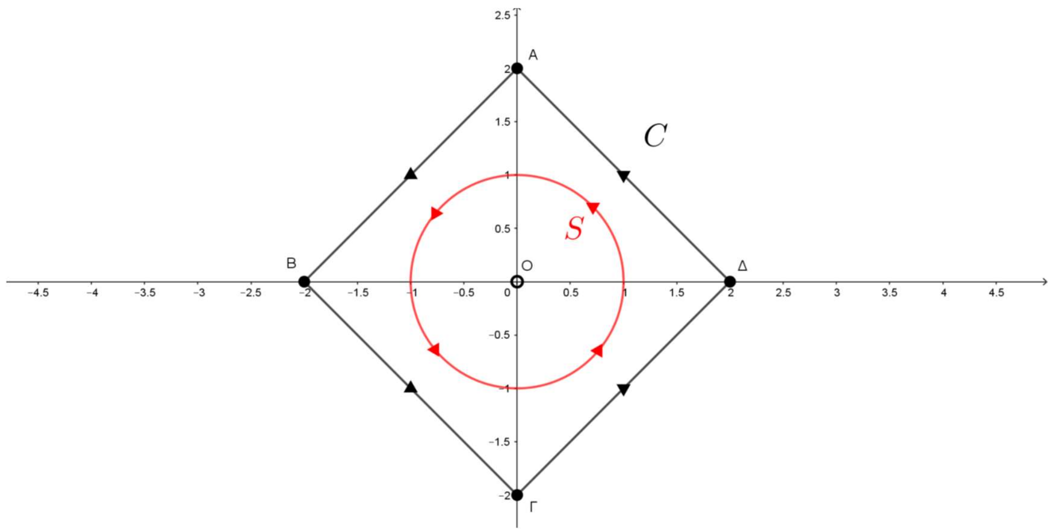
4. Θεωρούμε την απλή και κλειστή καμπύλη C του παρακάτω σχήματος



Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_C \frac{1}{z} dz$.

__**Λύση:**__

Η συνάρτηση $f(z) = \frac{1}{z}$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{C}^*$ στο οποίο είναι προφανώς ολόμορφη (ως ρητή). Θεωρούμε την καμπύλη (S): $|z| = 1$, δηλ. τον κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων $O(0,0)$ και ακτίνα 1:



Μία παραμετρική εξίσωση της καμπύλης S είναι η

$$z = z(t) = e^{it}, \; t \in [0, 2\pi]$$

Τότε μάλιστα έχουμε ότι $z'(t) = ie^{it}$ για κάθε $t \in [0, 2\pi]$ και άρα η S είναι συνεχώς διαφορίσιμη καμπύλη.

Από με το Θεώρημα 14 και τον ορισμό του επικαμπύλιου ολοκληρώματος έχουμε τότε αμέσως ότι

$$\int_C \frac{1}{z} dz = \int_S \frac{1}{z} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}} ie^{it} dt = i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i$$

Παρατήρηση: Για την τιμή του επικαμπύλιου ολοκληρώματος $\int_S \frac{1}{z} dz$ ($= \int_S (z-0)^{-1} dz$) μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και τον τύπο στον οποίο καταλήξαμε στο Παράδειγμα 1. □

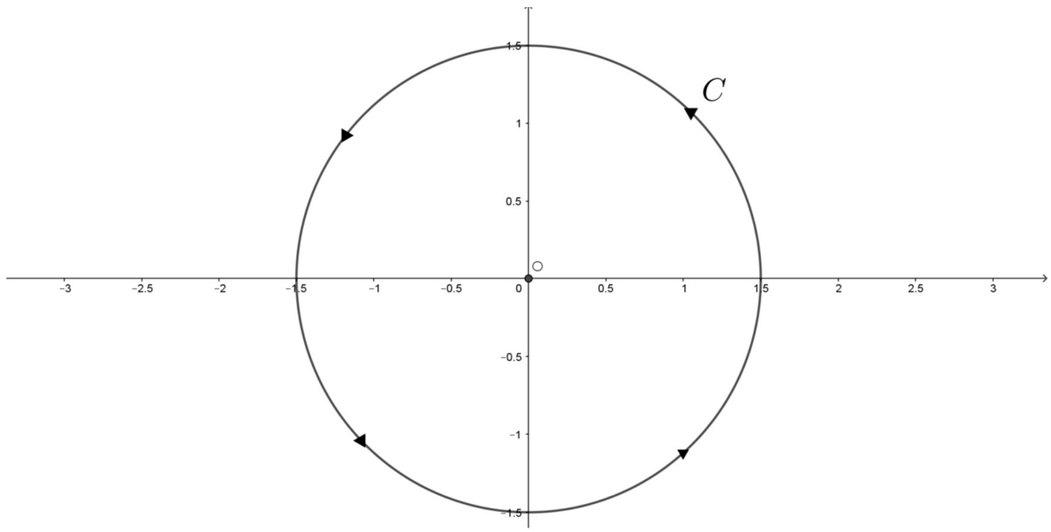
5. Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_C \frac{z^2+1}{z^2-z-2} dz$ όπου (C) είναι η απλή, κλειστή και θετικά προσανατολισμένη καμπύλη $|z| = \frac{3}{2}$.

Λύση:

Η καμπύλη C είναι ο κύκλος με κέντρο το σημείο $O(0,0)$ και ακτίνα $\frac{3}{2}$ και μία παραμετρική της εξίσωση είναι η

$$z = z(t) = \frac{3}{2}e^{it}, \ t \in [0, 2\pi]$$

Η γραφική της παράσταση (μαζί με τη φορά σχηματισμού της) φαίνεται στο παρακάτω σχήμα



Επειδή $z'(t) = i\frac{3}{2}e^{it}$ για κάθε $t \in [0, 2\pi]$ έπεται αμέσως ότι η C είναι συνεχώς διαφορίσιμη καμπύλη. Επίσης η C είναι προφανώς απλή και κλειστή καμπύλη.

Επειδή $z^2 - z - 2 = (z-2)(z+1)$, τότε έχουμε αμέσως ότι η συνάρτηση $f(z) = \dfrac{z^2+1}{z^2-z-2}$ έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $\mathbb{C} - \{-1, 2\}$ το οποίο είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{C}$ και στο οποίο η $f(z)$ είναι προφανώς ολόμορφη (ως ρητή). Παρατηρούμε ότι

$$\frac{z^2+1}{z^2-z-2} = \ldots = 1 + \frac{5}{3(z-2)} - \frac{2}{3(z+1)}$$

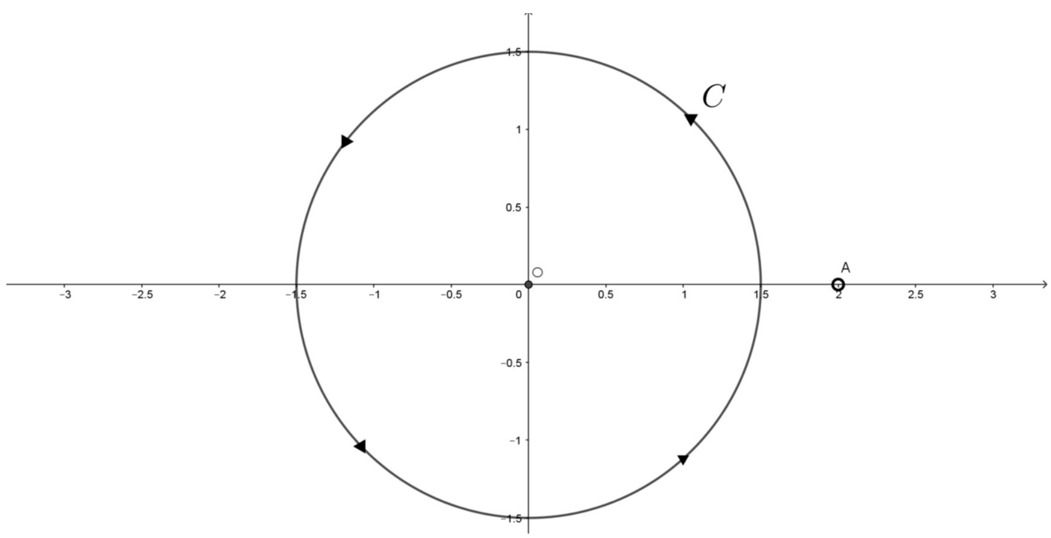
Επομένως

$$\int_C \frac{z^2+1}{z^2-z-2}dz = \int_C \left(1+\frac{5}{3(z-2)}-\frac{2}{3(z+1)}\right)dz =$$

$$= \int_C \left(1+\frac{5}{3(z-2)}\right)dz - \int_C \frac{2}{3(z+1)}dz \qquad (1)$$

- $\underline{\int_C \left(1+\frac{5}{3(z-2)}\right)dz}$

Η συνάρτηση $g(z)=1+\frac{5}{3(z-2)}$ έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $\mathbb{C}-\{2\}$ το οποίο είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{C}$ και στο οποίο η $g(z)$ είναι προφανώς ολόμορφη. Επειδή το σημείο $A(2,0)$ ανήκει στο εξωτερικό της καμπύλης C:



τότε από το Θεώρημα 12 έχουμε αμέσως ότι

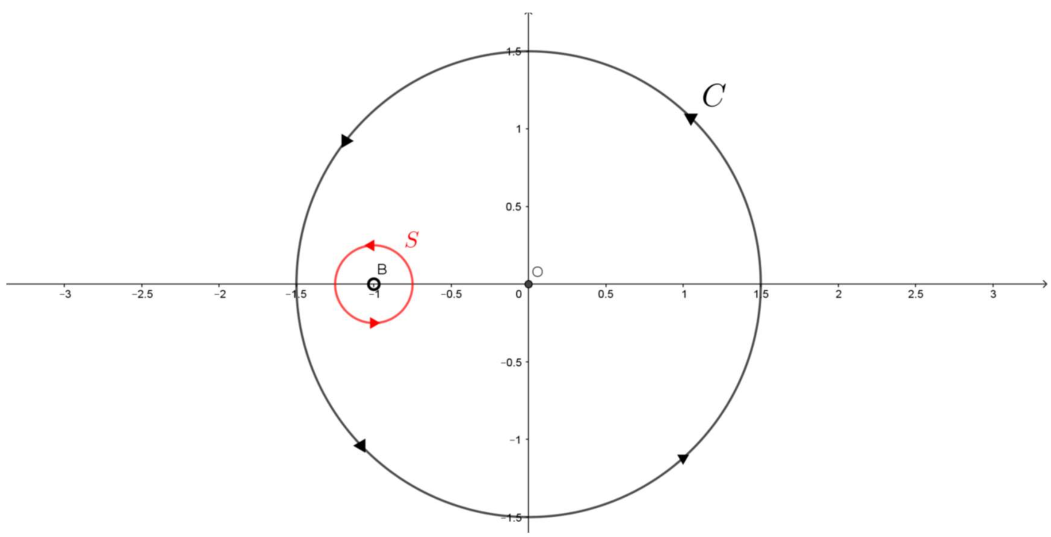
$$\int_C \left(1+\frac{5}{3(z-2)}\right)dz = 0 \qquad (2)$$

(όπως φαίνεται και από το παραπάνω σχήμα, η $f(z)$ μπορεί να οριστεί σε ένα υποσύνολο του $\mathbb{C}-\{2\}$ το οποίο να είναι απλό συνεκτικό πεδίο και να περιέχει την καμπύλη C).

- $\underline{\int_C \frac{2}{3(z+1)}dz}$

Η συνάρτηση $h(z)=\dfrac{2}{3(z+1)}$ έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $\mathbb{C}-\{-1\}$ το οποίο είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{C}$ και στο οποίο η $h(z)$ είναι προφανώς ολόμορφη. Επειδή το σημείο $B(-1,0)$ ανήκει στο εσωτερικό της καμπύλης C, θα εφαρμόσουμε το Θεώρημα 14 θεωρώντας την καμπύλη (S): $|z+1|=\dfrac{1}{4}$. Η καμπύλη S είναι κύκλος με κέντρο το σημείο B και ακτίνα $\dfrac{1}{4}$ και μία παραμετρική της εξίσωση είναι η

$$z=z(t)=-1+\frac{1}{4}e^{it},\ t\in[0,2\pi]$$



Επειδή $z'(t)=i\dfrac{1}{4}e^{it}$ για κάθε $t\in[0,2\pi]$ έπεται αμέσως ότι η S είναι συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση. Άρα από το Θεώρημα 14 και τον ορισμό του επικαμπύλιου ολοκληρώματος έχουμε αμέσως ότι

$$\int_C \frac{2}{3(z+1)}dz=\frac{2}{3}\int_S \frac{1}{(z+1)}dz=\frac{2}{3}\int_0^{2\pi}\frac{1}{\frac{1}{4}e^{it}}i\frac{1}{4}e^{it}dt=i\frac{2}{3}\int_0^{2\pi}dt=\ldots=\frac{4}{3}\pi i \qquad (3)$$

(για την τιμή του επικαμπύλιου ολοκληρώματος $\int_S \dfrac{1}{(z+1)}dz$ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και τον τύπο στον οποίο καταλήξαμε στο Παράδειγμα 1).

Τότε από τη σχέση (1) με τη βοήθεια των σχέσεων (2), (3) έχουμε αμέσως ότι

$$\int_C \frac{z^2+1}{z^2-z-2}\,dz = -\frac{4}{3}\pi i$$

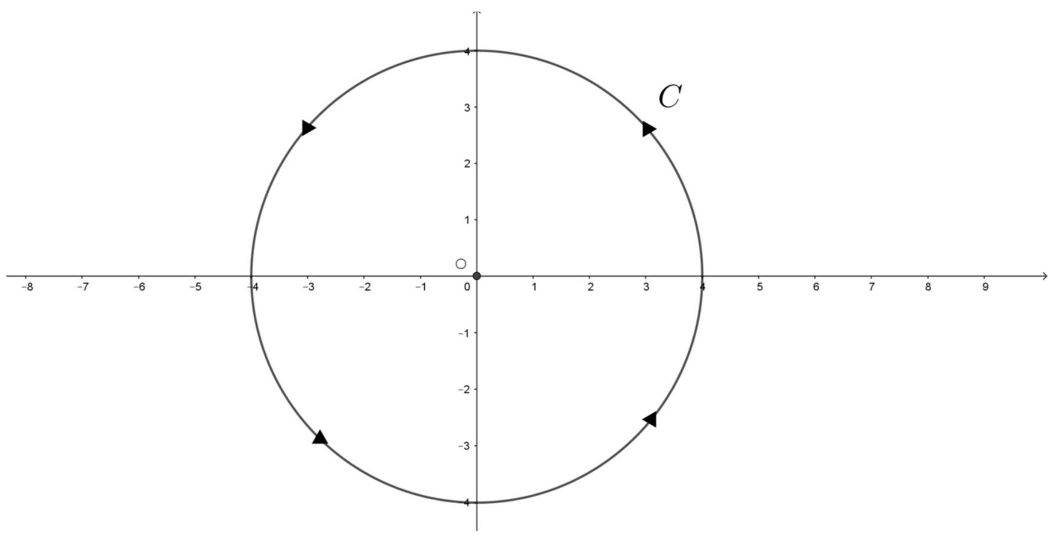
Παρατήρηση: Ως καμπύλες S μπορούμε προφανώς να θεωρήσουμε οποιοδήποτε κύκλο $|z+1| = r$ με $0 < r \le \frac{1}{2}$. □

6. Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_C \frac{1}{z^2+4}\,dz$ όπου (C) είναι η απλή, κλειστή και θετικά προσανατολισμένη καμπύλη $|z| = 4$.

<u>Λύση:</u> Η καμπύλη C είναι ο κύκλος με κέντρο το σημείο $O(0,0)$ και ακτίνα 4 και μία παραμετρική της εξίσωση είναι η

$$z = z(t) = 4e^{it},\ t \in [0, 2\pi]$$

Η γραφική της παράσταση (μαζί με τη φορά σχηματισμού της) φαίνεται στο παρακάτω σχήμα



Επειδή $z'(t) = 4e^{it}i$ για κάθε $t \in [0, 2\pi]$ έπεται αμέσως ότι η C είναι συνεχώς διαφορίσιμη καμπύλη. Επίσης η C είναι προφανώς απλή και κλειστή καμπύλη.

Επειδή $z^2 + 4 = (z-2i)(z+2i)$, τότε έχουμε αμέσως ότι η συνάρτηση $f(z) = \frac{1}{z^2+4}$ έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $\mathbb{C} - \{-2i, 2i\}$ το οποίο είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{C}$ και στο οποίο η $f(z)$ είναι προφανώς ολόμορφη (ως ρητή).

Παρατηρούμε ότι

$$\frac{1}{z^2+4} = \ldots = \frac{1}{4i}\left(\frac{1}{z-2i} - \frac{1}{z+2i}\right)$$

Επομένως

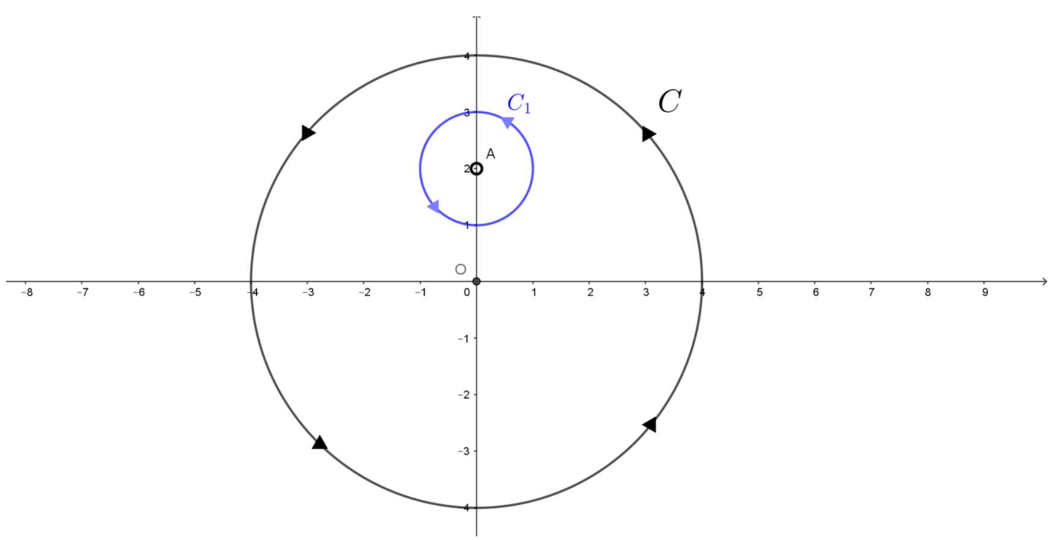
$$\int_C \frac{1}{z^2+4}dz = \int_C \left(\frac{1}{4i}\left(\frac{1}{z-2i} - \frac{1}{z+2i}\right)\right)dz = \ldots =$$

$$= \frac{1}{4i}\int_C \left(\frac{1}{z-2i}\right)dz - \frac{1}{4i}\int_C \left(\frac{1}{z+2i}\right)dz \qquad (1)$$

- $\underline{\int_C \left(\frac{1}{z-2i}\right)dz}$

  Η συνάρτηση $g(z) = \frac{1}{z-2i}$ έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $\mathbb{C} - \{2i\}$ το οποίο είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{C}$ και στο οποίο η $g(z)$ είναι προφανώς ολόμορφη. Επειδή το σημείο $A(0,2)$ ανήκει στο εσωτερικό της καμπύλης C, θα εφαρμόσουμε το Θεώρημα 14 θεωρώντας την καμπύλη (C_1): $|z-2i| = 1$. Η καμπύλη C_1 είναι κύκλος με κέντρο το σημείο A και ακτίνα 1 και μία παραμετρική της εξίσωση είναι η

$$z = z(t) = 2i + e^{it}, \; t \in [0, 2\pi]$$



Άρα από το Θεώρημα 14 και το Παράδειγμα 1 έχουμε αμέσως ότι

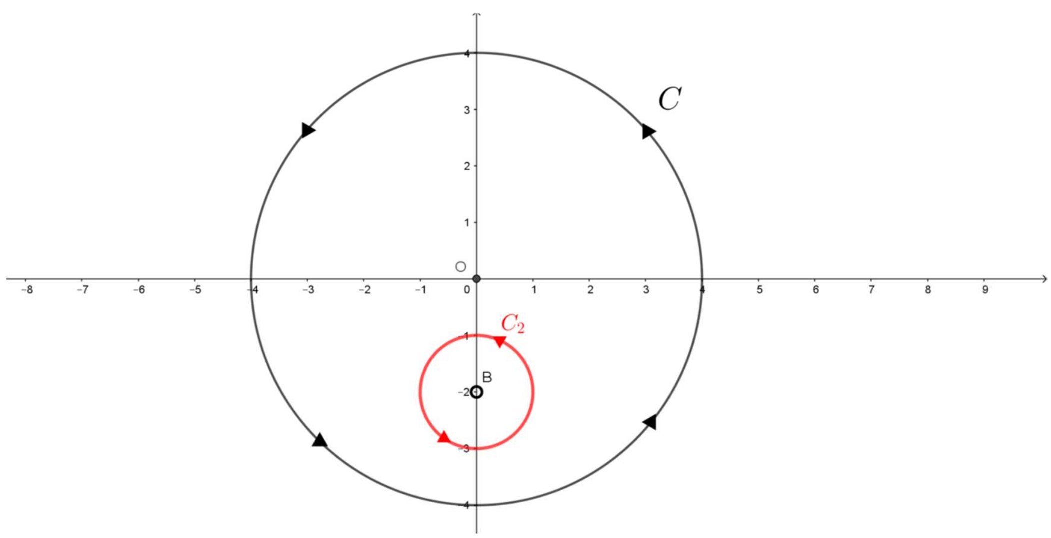
$$\int_C \frac{1}{(z-2i)}dz = \int_{C_1} \frac{1}{(z-2i)}dz = \int_{C_1} (z-2i)^{-1}dz = 2\pi i \qquad (2)$$

Παρατήρηση: Ως καμπύλες C_1 μπορούμε προφανώς να θεωρήσουμε οποιοδήποτε κύκλο $|z-2i| = r$ με $0 < r \le 2$.

- $\displaystyle\int_C \left(\frac{1}{z+2i}\right)dz$

Η συνάρτηση $h(z) = \dfrac{1}{z+2i}$ έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $\mathbb{C} - \{-2i\}$ το οποίο είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{C}$ και στο οποίο η $h(z)$ είναι προφανώς ολόμορφη. Επειδή το σημείο $B(0,-2)$ ανήκει στο εσωτερικό της καμπύλης C, θα εφαρμόσουμε το Θεώρημα 14 θεωρώντας την καμπύλη (C_2): $|z+2i| = 1$. Η καμπύλη C_2 είναι κύκλος με κέντρο το σημείο Β και ακτίνα 1 και μία παραμετρική της εξίσωση είναι η

$$z = z(t) = -2i + e^{it}, \ t \in [0, 2\pi]$$



Άρα από το Θεώρημα 14 και το Παράδειγμα 1 έχουμε αμέσως ότι

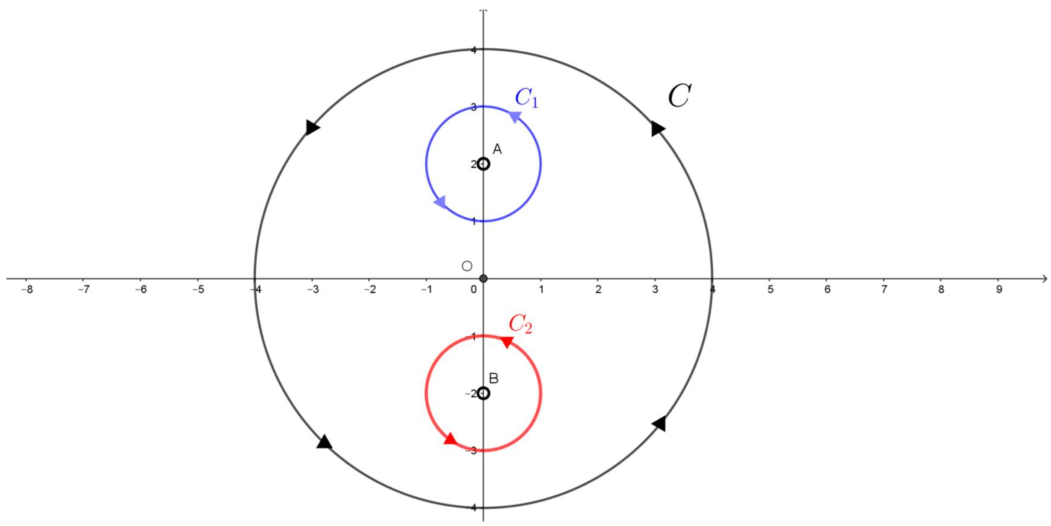
$$\int_C \frac{1}{(z+2i)}dz = \int_{C_2} \frac{1}{(z+2i)}dz = \int_{C_2} (z-(-2i))^{-1}dz = 2\pi i \qquad (3)$$

Παρατήρηση: Ως καμπύλες C_2 μπορούμε προφανώς να θεωρήσουμε οποιοδήποτε κύκλο $|z+2i|=r$ με $0<r\leq 2$.

Τότε από τη σχέση (1) με τη βοήθεια των σχέσεων (2), (3) έχουμε αμέσως ότι

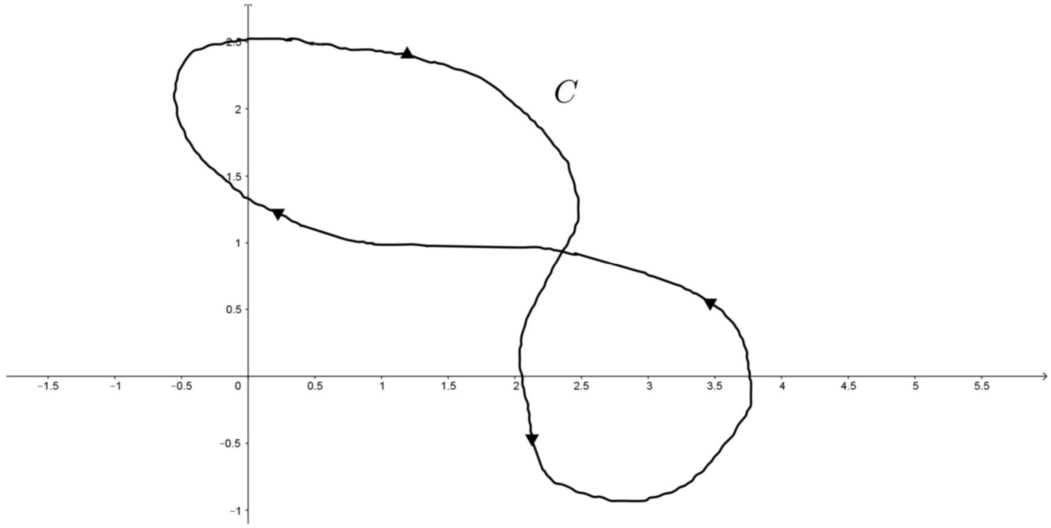
$$\int_C \frac{1}{z^2+4}dz = \frac{1}{4i}2\pi i - \frac{1}{4i}2\pi i = 0$$

Η άσκηση μπορεί να λυθεί και με εφαρμογή του Θεωρήματος 15 στηριζόμενοι στο παρακάτω σχήμα



□

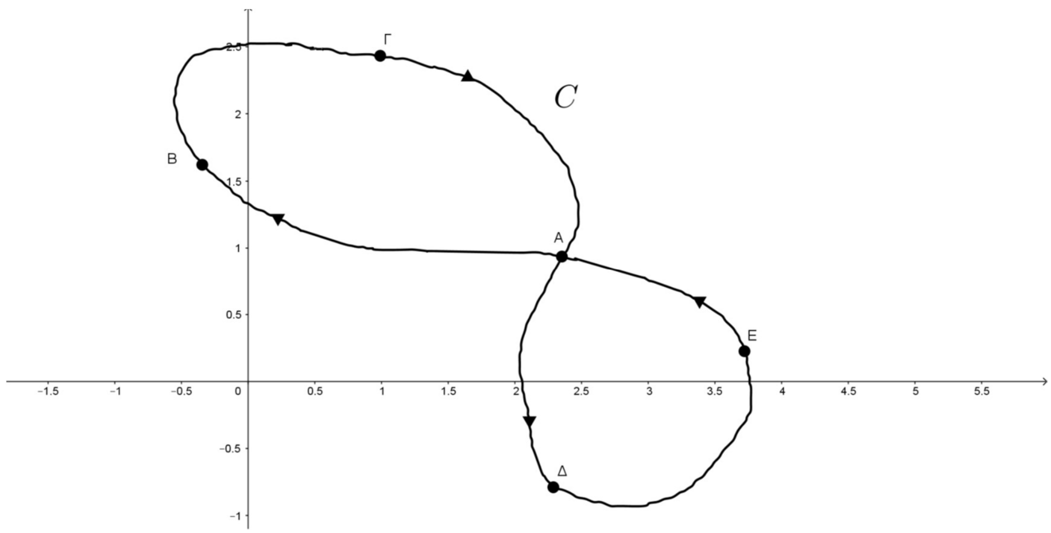
7. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I=\int_C \frac{1}{(z-2i)(z-3)}dz$ όπου C είναι η καμπύλη του παρακάτω σχήματος



(το γράφημά της διαγράφεται μία μόνο φορά)

<u>Λύση:</u>

Παρατηρούμε ότι για την καμπύλη C έχουμε $C = C_{ABΓA} \cup C_{AΔEA}$:



(η καμπύλη $C_{ABΓA}$ έχει αρνητικό προσανατολισμό ενώ η καμπύλη $C_{AΔEA}$ έχει θετικό προσανατολισμό).

Άρα

$$I = \int_{C_{ABΓA}} \frac{1}{(z-2i)(z-3)}dz + \int_{C_{AΔEA}} \frac{1}{(z-2i)(z-3)}dz =$$

$$= \int_{C_{AΔEA}} \frac{1}{(z-2i)(z-3)}dz - \int_{C_{AΓBA}} \frac{1}{(z-2i)(z-3)}dz \qquad (1)$$

Η συνάρτηση $f(z)=\dfrac{1}{(z-2i)(z-3)}$ έχει πεδίο ορισμού σύνολο $\mathbb{C}-\{2i,3\}$ το οποίο είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{C}$ και στο οποίο η $f(z)$ είναι προφανώς ολόμορφη (ως ρητή).

Παρατηρούμε ότι

$$\frac{1}{(z-2i)(z-3)}=\ldots=\frac{1}{3-2i}\left(\frac{1}{z-3}-\frac{1}{z-2i}\right) \tag{2}$$

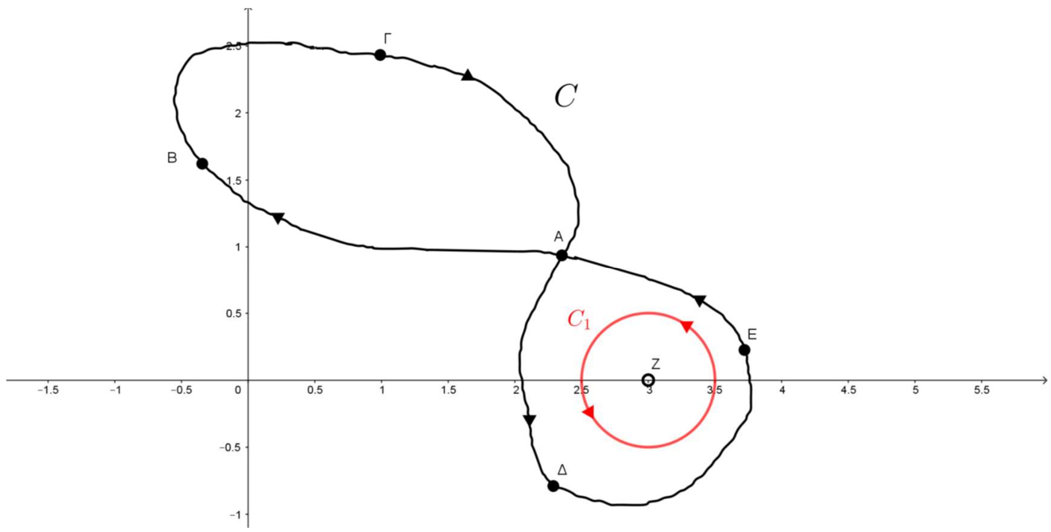
- $\underline{\displaystyle\int_{C_{\mathrm{A\Delta EA}}}\frac{1}{(z-2i)(z-3)}dz}$

  Από τη (2) έχουμε αμέσως ότι

$$\int_{C_{\mathrm{A\Delta EA}}}\frac{1}{(z-2i)(z-3)}dz=\frac{1}{3-2i}\left(\int_{C_{\mathrm{A\Delta EA}}}\frac{1}{z-3}dz-\int_{C_{\mathrm{A\Delta EA}}}\frac{1}{z-2i}dz\right) \tag{3}$$

  - $\underline{\displaystyle\int_{C_{\mathrm{A\Delta EA}}}\frac{1}{z-3}dz}$

  Η συνάρτηση $g(z)=\dfrac{1}{z-3}$ έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $\mathbb{C}-\{3\}$ το οποίο είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{C}$ και στο οποίο η $g(z)$ είναι προφανώς ολόμορφη. Επειδή το σημείο $Z(0,3)$ ανήκει στο εσωτερικό της καμπύλης $C_{\mathrm{A\Delta EA}}$, θα εφαρμόσουμε το Θεώρημα 14 θεωρώντας έναν οποιοδήποτε θετικά προσανατολισμένο κύκλο με κέντρο το Z ο οποίος να βρίσκεται στο εσωτερικό της καμπύλης $C_{\mathrm{A\Delta EA}}$:



Άρα από το Θεώρημα 14 και το Παράδειγμα 1 έχουμε αμέσως ότι

$$\int_{C_{ΑΔΕΑ}} \frac{1}{(z-3)} dz = \int_{C_1} \frac{1}{(z-3)} dz = \int_{C_1} (z-3)^{-1} dz = 2\pi i \qquad (4)$$

○ $\underline{\int_{C_{ΑΔΕΑ}} \frac{1}{z-2i} dz}$

Η συνάρτηση $h(z) = \dfrac{1}{z-2i}$ έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $\mathbb{C} - \{2i\}$ το οποίο είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{C}$ και στο οποίο η $g(z)$ είναι προφανώς ολόμορφη. Επειδή το σημείο $(2,0)$ ανήκει στο εξωτερικό της καμπύλης $C_{ΑΔΕΑ}$, τότε από το Θεώρημα 12 έχουμε αμέσως ότι

$$\int_{C_{ΑΔΕΑ}} \frac{1}{z-2i} dz = 0 \qquad (5)$$

Από την (3) με τη βοήθεια των (4), (5) έχουμε ότι

$$\int_{C_{ΑΔΕΑ}} \frac{1}{(z-2i)(z-3)} dz = \frac{2\pi i}{3-2i} \qquad (6)$$

Με όμοιο τρόπο δείχνουμε ότι

$$\int_{C_{ΑΓΒΑ}} \frac{1}{(z-2i)(z-3)} dz = -\frac{2\pi i}{3-2i} \qquad (7)$$

Από την (1) με τη βοήθεια των (6), (7) έχουμε αμέσως ότι

$$I = \frac{4\pi i}{3-2i} = \ldots = \frac{4\pi(-2+3i)}{13}$$ □

Παρατήρηση 18: Από το Θεώρημα 12 και το Παράδειγμα 1 έχουμε αμέσως το εξής: Αν $z_0 \in \mathbb{C}$ και C είναι μία απλή, κλειστή, τμηματικά συνεχώς διαφορίσιμη και θετικά προσανατολισμένη καμπύλη του $\mathbb{C} - \{z_0\}$, τότε

$$\boxed{\oint_C \frac{1}{z-z_0}dz = \begin{cases} 2\pi i, & \text{αν το } z_0 \text{ είναι εσωτερικό σημείο της C} \\ 0, & \text{αν το } z_0 \text{ είναι εξωτερικό σημείο της C} \end{cases}}$$

8. Έστω C μία απλή, κλειστή, τμηματικά συνεχώς διαφορίσιμη και θετικά προσανατολισμένη καμπύλη του $\mathbb{C}$ η οποία περιέχει στο εσωτερικό της το σημείο $O(0,0)$. Να υπολογίσετε τα επικαμπύλια ολοκληρώματα:

i) $\displaystyle\int_C \frac{\sin z}{z}dz$

ii) $\displaystyle\int_C \frac{\sinh z}{z^2}dz$

Λύση:

i) Παρατηρούμε ότι για $f(z) = \sin z$ $(z \in \mathbb{C})$, $D = \mathbb{C}$, $z_0 = 0$ και την καμπύλη C ισχύουν όλες οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος 16. Επομένως έχουμε

$$f(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z}dz \Leftrightarrow 0 = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\sin z}{z}dz \Leftrightarrow \int_C \frac{\sin z}{z}dz = 0$$

ii) Παρατηρούμε ότι για $f(z) = \sinh z$ $(z \in \mathbb{C})$, $D = \mathbb{C}$, $z_0 = 0$, $n = 1$ και την καμπύλη C ισχύουν όλες οι προϋποθέσεις της Παρατήρησης 17. Επομένως έχουμε

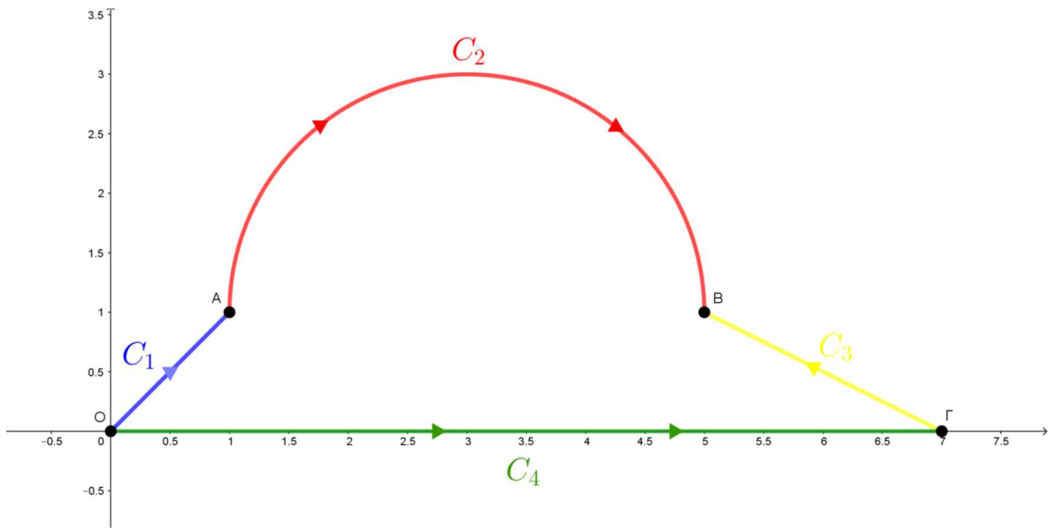
$$f'(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z^2}dz$$

Ως γνωστόν $f'(z) = \cosh z$, $z \in \mathbb{C}$. Άρα $f'(0) = \cosh 0 = 1$. Συνεπώς:

$$1 = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\sinh z}{z^2}dz \Leftrightarrow \int_C \frac{\sinh z}{z^2}dz = 2\pi i$$ □

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Θεωρούμε τις καμπύλες C_1, C_2, C_3, C_4 του παρακάτω σχήματος



όπου

- C_1 είναι το μπλε ευθύγραμμο τμήμα ΟΑ με $O(0,0)$ και $A(1,1)$.
- C_2 είναι το κόκκινο ημικύκλιο με κέντρο το σημείο $(3,1)$ και ακτίνα 2.
- C_3 είναι το κίτρινο ευθύγραμμο τμήμα ΓΒ με $\Gamma(7,0)$ και $B(5,1)$.
- C_4 είναι το πράσινο ευθύγραμμο τμήμα ΟΓ.

Οι φορές σχηματισμού των καμπυλών είναι αυτές που φαίνονται στο παραπάνω σχήμα.

Να υπολογιστούν τα παρακάτω επικαμπύλια ολοκληρώματα:

i) $\displaystyle\int_{C_2 \cup C_3^-} \frac{1}{z}\,dz$

ii) $\displaystyle\int_{C_1 \cup C_2} \sinh z\,dz$

iii) $\displaystyle\int_{C_4 \cup C_3} z e^z\,dz$

iv) $\displaystyle\int_{C_1 \cup C_2 \cup C_3^- \cup C_4^-} \frac{1}{z-3-i}\,dz$

v) $\displaystyle\int_{C_1 \cup C_2 \cup C_3^- \cup C_4^-} \frac{1}{(z-2i)(z-3-i)}\,dz$

vi) $\displaystyle\int_{C_1\cup C_2\cup C_3^-\cup C_4^-}\frac{e^z}{z^2+16}dz$

vii) $\displaystyle\int_{C_1\cup C_2\cup C_3^-}\frac{\cosh z}{e^z}dz$

2. Να υπολογίσετε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_C\frac{1}{z^2+z+1}dz$, όπου (C) είναι η απλή, κλειστή και θετικά προσανατολισμένη καμπύλη $|z|=\frac{1}{2}$.

3. Να υπολογίσετε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_C\frac{1}{z}dz$, όπου (C) είναι η απλή, κλειστή και θετικά προσανατολισμένη έλλειψη με καρτεσιανή εξίσωση $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ($\alpha>0$, $b>0$).

4. Να υπολογίσετε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_C\frac{1}{z^2+1}dz$, όπου (C) είναι η απλή, κλειστή και θετικά προσανατολισμένη καμπύλη $|z|=3$.

5. Να υπολογίσετε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_C\frac{z^2-5z+2i}{z+i}dz$, όπου (C) είναι η απλή, κλειστή και θετικά προσανατολισμένη καμπύλη $|z|=3$.

(<u>Υπόδειξη:</u> Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε και τον τύπο του Θεωρήματος 16)

6. Να υπολογίσετε τα επικαμπύλια ολοκληρώματα

i) $\displaystyle\int_C\frac{e^z}{z}dz$, όπου (C) είναι η απλή, κλειστή και θετικά προσανατολισμένη καμπύλη $|z|=3$.

(<u>Υπόδειξη:</u> Χρησιμοποιήστε τον τύπο του Θεωρήματος 16)

ii) $\int\limits_{C} \frac{e^{2z}}{z^2+4} dz$, όπου (C) είναι η απλή, κλειστή και θετικά προσανατολισμένη καμπύλη $|z| = 4$.

(Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε τον τύπο του Θεωρήματος 16)

iii) $\int\limits_{C} \frac{\sin z}{\left(z - \frac{\pi}{4}\right)^3} dz$, όπου (C) είναι η απλή, κλειστή και θετικά προσανατολισμένη καμπύλη $|z| = 1$.

(Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε τον τύπο της Παρατήρησης 17) □