# <u>ΜΙΓΑΔΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ</u>

Στα επόμενα το $\Delta$ θα συμβολίζει διάστημα του $\mathbb{R}$ ή ένωση διαστημάτων του $\mathbb{R}$. Μία συνάρτηση $f:\Delta\to\mathbb{C}$ καλείται **μιγαδική συνάρτηση μίας πραγματικής μεταβλητής**. Είναι φανερό ότι τότε ορίζονται δύο πραγματικές συναρτήσεις μίας πραγματικής μεταβλητής:

- $u:\Delta\to\mathbb{R}$ με $u(t)=\mathrm{Re}(f(t))$
- $v:\Delta\to\mathbb{R}$ με $v(t)=\mathrm{Im}(f(t))$

Επομένως για κάθε $t\in\Delta$ έχουμε

$$\boxed{f(t)=u(t)+i\,v(t)}$$

Στα επόμενα θα χρησιμοποιούμε τον προηγούμενο συμβολισμό για το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της f χωρίς να γίνεται ιδιαίτερη αναφορά. Επίσης αν θεωρήσουμε την f ως συνάρτηση <u>μιγαδικής</u> μεταβλητής με πεδίο ορισμού το σύνολο $\{x+0i\,/\,x\in\Delta\}$, τότε μπορούμε να ορίσουμε την έννοια του ορίου και της συνέχειας με ίδιο ακριβώς τρόπο όπως ορίσαμε τις προηγούμενες έννοιες σε προηγούμενη ενότητα και μάλιστα ισχύουν τα ίδια ακριβώς αποτελέσματα.

Έστω τώρα $t_0\in\Delta$. Αν το όριο

$$\lim_{t\to t_0}\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$$

υπάρχει και είναι μιγαδικός αριθμός, τότε καλείται **παράγωγος** της f στο $t_0$ και συμβολίζεται με $f'(t_0)$. Το προηγούμενο όριο, αν θέσουμε $h=t-t_0$, ταυτίζεται με το όριο

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h}$$

Άρα

$$\boxed{f'(t_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h}}$$

Επειδή προφανώς

$$\frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h}=\frac{u(t_0+h)+i\,v(t_0+h)-\left(u(t_0)+i\,v(t_0)\right)}{h}=\ldots=$$
$$=\frac{u(t_0+h)-u(t_0)}{h}+i\frac{v(t_0+h)-v(t_0)}{h}$$

τότε από τις ιδιότητες των ορίων έχουμε αμέσως το εξής:

**<u>Θεώρημα 1:</u>** Έστω $f:\Delta\to\mathbb{C}$ συνάρτηση και $t_0\in\Delta$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $t_0$ αν και μόνο αν οι συναρτήσεις u, v είναι παραγωγίσιμες (ως πραγματικές μίας πραγματικής μεταβλητής) στο $t_0$. Μάλιστα σε αυτήν την περίπτωση ισχύει

$$\boxed{f'(t_0)=u'(t_0)+i\,v'(t_0)}$$ □

**<u>Πρόταση 2:</u>** Έστω, $f,g:\Delta\to\mathbb{C}$ συναρτήσεις παραγωγίσιμες στο $t_0\in\Delta$ και $\alpha\in\mathbb{C}$. Τότε:

**i)** $(f\pm g)'(t_0)=f'(t_0)\pm g'(t_0)$

**ii)** $(f\cdot g)'(t_0)=f'(t_0)g(t_0)+f(t_0)g'(t_0)$

**iii)** $(\alpha\cdot f)'(t_0)=\alpha\cdot f'(t_0)$

**iv)** $\left(\frac{f}{g}\right)'(t_0)=\frac{f'(t_0)g(t_0)-f(t_0)g'(t_0)}{g^2(t_0)}$ αν $g(t_0)\neq 0$ □

Έστω τώρα $f:\Delta\to\mathbb{C}$ συνάρτηση. Αν $\Delta_1$ είναι το σύνολο των σημείων του Δ για τα οποία υπάρχει η παράγωγος, τότε ορίζεται η συνάρτηση παράγωγος 1ης τάξης:

$$f':\Delta_1\to\mathbb{C} \text{ με } (f')(t)=f'(t)=u'(t)+i\,v'(t),\ t\in\Delta_1$$

Η $f'$ πολλές φορές συμβολίζεται με $\frac{df}{dt}$. Με παρόμοιο τρόπο ορίζονται και οι παράγωγοι ανώτερης τάξης $f^{(\kappa)}$, $\kappa=2,3,\ldots$ οι οποίες συμβολίζονται και με $\frac{d^\kappa f}{dt^\kappa}$.

**<u>Παρατήρηση 3:</u>**

**i)** Αν το σύνολο τιμών της f είναι υποσύνολο του $\mathbb{R}$ (δηλ. $f(\Delta)\subseteq\mathbb{R}$), τότε προφανώς ισχύουν οι γνωστοί τύποι παραγώγισης (αφού στην πραγματικότητα είναι πραγματικές συναρτήσεις μίας πραγματικής μεταβλητής). Π.χ.

$$\left(t^{r}\right)'=rt^{r-1},\ \left(e^{t}\right)'=e^{t},\ (\sin t)'=\cos t,\ (\cos t)'=-\sin t,\ (\ln t)'=\frac{1}{t},\ \ldots$$

**ii)** Αν μία μιγαδική συνάρτηση ορίζεται σε διαστήματα της ευθείας των πραγματικών αριθμών, τότε ο περιορισμός της σε αυτά είναι μία μιγαδική συνάρτηση μίας πραγματικής μεταβλητής. Επομένως αν η αρχική συνάρτηση έχει μιγαδική παράγωγο σε αυτά τα διαστήματα, τότε προφανώς και ο περιορισμός της σε αυτά τα διαστήματα έχει παράγωγο με την έννοια που ορίσαμε παραπάνω και μάλιστα ισχύουν οι ίδιοι τύποι παραγώγισης. Οπότε π.χ. για $\alpha\in\mathbb{C}$ έχουμε:

$$\left(e^{\alpha t}\right)'=\alpha e^{\alpha t},\ \left(\sin(\alpha t)\right)'=\alpha\cdot\cos(\alpha t),\ \left(\cos(\alpha t)\right)'=-\alpha\cdot\sin(\alpha t),\ \left(\tan(\alpha t)\right)'=\alpha\left(1+\tan^{2}(\alpha t)\right),\ \ldots$$

□

**<u>Πρόταση 4:</u>** Αν η συνάρτηση $f:\Delta\to\mathbb{C}$ είναι παραγωγίσιμη στο $t_0\in\Delta$ και η συνάρτηση $g:A\to\mathbb{C}$ (A ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{C}$) είναι παραγωγίσιμη στο $f(t_0)$, τότε η συνάρτηση $g\circ f$ είναι παραγωγίσιμη στο $t_0$ και μάλιστα ισχύει

$$(g\circ f)'(t_0)=g'(f(t_0))\cdot f'(t_0)$$ □

**<u>Πρόταση 5:</u>** Αν για τις συναρτήσεις $g:A\to\mathbb{R}$ (A διάστημα του $\mathbb{R}$) και $f:\Delta\to\mathbb{C}$ έχουμε ότι

- $g(A)\subseteq\Delta$
- η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $z_0\in A$
- η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $g(z_0)$

τότε η συνάρτηση $f\circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο $t_0$ και μάλιστα ισχύει

$$(f\circ g)'(z_0)=f'(g(z_0))\cdot g'(z_0)$$ □

**<u>Πρόταση 6:</u>** Αν για τις συναρτήσεις $g: A \to \mathbb{R}$ (A διάστημα του $\mathbb{R}$) και $f: \Delta \to \mathbb{C}$ έχουμε ότι

**i)** $g(A) \subseteq \Delta$

**ii)** η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $t_0 \in A$

**iii)** η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $g(t_0)$

τότε η συνάρτηση $f \circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο $t_0$ και μάλιστα ισχύει

$$(f \circ g)'(t_0) = f'(g(t_0)) \cdot g'(t_0) \qquad \square$$

Έστω τώρα $f(t) = u(t) + i \cdot v(t)$, $t \in [\alpha, b]$ συνάρτηση συνεχής στο $[\alpha, b]$. Αυτό σημαίνει ισοδύναμα (όπως τονίσαμε και παραπάνω) ότι οι συναρτήσεις u, v είναι συνεχείς στο $[\alpha, b]$. Τότε ορίζουμε το ορισμένο ολοκλήρωμα της f στο $[\alpha, b]$ ως εξής:

$$\boxed{\int_{\alpha}^{b} f(t)dt = \int_{\alpha}^{b} u(t)dt + i\int_{\alpha}^{b} v(t)dt}$$

(το ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{b} f(t)dt$ μπορεί να οριστεί και με γενικότερη συνθήκη από τη συνέχεια της f).

Μία μιγαδική συνάρτηση f πραγματικής μεταβλητής καλείται τμηματικά συνεχής στο $[\alpha, b]$ αν υπάρχει μία διαμέριση

$$\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b$$

του $[\alpha, b]$ τέτοια ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στα διαστήματα $(t_0, t_1)$, $(t_1, t_2)$, ..., $(t_{n-1}, t_n)$ και επιπλέον να υπάρχουν στο $\mathbb{C}$ τα (πλευρικά) όρια $\lim_{t \to \alpha^+} f(t)$, $\lim_{t \to b^-} f(t)$, $\lim_{t \to t_\rho^-} f(t)$, $\lim_{t \to t_\rho^+} f(t)$, $\rho = 1, 2, \ldots, n-1$ (μία συνάρτηση συνεχής στο $[\alpha, b]$ είναι προφανώς και τμηματικά συνεχής στο $[\alpha, b]$). Τότε, αν θέσουμε

$$f_\kappa(t)=\begin{cases}\lim\limits_{t\to t_{\kappa-1}^{+}} f(t), & t=t_{\kappa-1}\\ f(t), & t\in(t_{\kappa-1},t_\kappa)\\ \lim\limits_{t\to t_\kappa^{-}} f(t), & t=t_\kappa\end{cases}\quad,\quad \kappa=1,2,\ldots,n$$

(παρατηρήστε ότι η συνάρτηση $f_\kappa$ είναι συνεχής στο $[t_{\kappa-1},t_\kappa]$, $\kappa=1,2,\ldots,n$), ορίζουμε το ορισμένο ολοκλήρωμα της f στο $[\alpha,b]$ ως εξής:

$$\int_\alpha^b f(t)dt=\sum_{\kappa=1}^{n}\int_{t_{\kappa-1}}^{t_\kappa} f_\kappa(t)dt$$

Στην πράξη και εφόσον δεν δημιουργείται πρόβλημα σύγχυσης γράφουμε συνήθως

$$\boxed{\int_\alpha^b f(t)dt=\sum_{\kappa=1}^{n}\int_{t_{\kappa-1}}^{t_\kappa} f(t)dt}$$

οπότε σε αυτήν την περίπτωση έχουμε

$$\int_\alpha^b f(t)dt=\sum_{\kappa=1}^{n}\int_{t_{\kappa-1}}^{t_\kappa} u(t)dt+i\sum_{\kappa=1}^{n}\int_{t_{\kappa-1}}^{t_\kappa} v(t)dt$$

Επίσης, όπως ακριβώς συμβαίνει και στην περίπτωση των πραγματικών συναρτήσεων, για μία μιγαδική συνάρτηση f πραγματικής μεταβλητής η οποία είναι τμηματικά συνεχής στο $[\alpha,b]$ ορίζουμε

$$\int_c^c f(t)dt=0 \text{ για κάθε } c\in[\alpha,b], \quad \text{και} \quad \int_b^\alpha f(t)dt=-\int_\alpha^b f(t)dt$$

**<u>Ιδιότητες ορισμένου ολοκληρώματος</u>**

- Αν οι f, g είναι τμηματικά συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha,b]$ και $\lambda,\mu\in\mathbb{C}$, τότε

$$\int_\alpha^b(\lambda f(t)+\mu g(t))dt=\lambda\int_\alpha^b f(t)dt+\mu\int_\alpha^b g(t)dt$$

- Αν η f είναι τμηματικά συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha,b]$ και $c,d,e\in[\alpha,b]$, τότε

$$\int_c^e f(t)dt=\int_c^d f(t)dt+\int_d^e f(t)dt$$

- Αν η $f$ είναι συνάρτηση συνεχής στο $[\alpha, b]$ και η $F$ είναι συνάρτηση τέτοια ώστε για κάθε $t \in [\alpha, b]$ να ισχύει $F'(t) = f(t)$ (η $F$ καλείται **αρχική συνάρτηση της f** στο $[\alpha, b]$), τότε

$$\int_{\alpha}^{b} f(t)\,dt = F(b) - F(\alpha)$$

(<u>συμβολισμός:</u> $F(b) - F(\alpha) = [F(t)]_{\alpha}^{b}$)

Επομένως αν η $f'$ είναι τμηματικά συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha, b]$, τότε

$$\int_{\alpha}^{b} f'(t)\,dt = f(b) - f(\alpha)$$

- Αν οι $f'$, $g'$ είναι τμηματικά συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha, b]$, τότε

$$\int_{\alpha}^{b} f(t) g'(t)\,dt = [f(t) g(t)]_{\alpha}^{b} - \int_{\alpha}^{b} f'(t) g(t)\,dt$$

- Έστω $g$ πραγματική συνάρτηση μίας πραγματικής μεταβλητής τέτοια ώστε η $g'$ να είναι συνεχής στο $[\alpha, b]$. Έστω ακόμη $f$ μιγαδική συνάρτηση μίας πραγματικής μεταβλητής για την οποία έχουμε ότι $g([\alpha, b]) \subseteq D_f$ ($D_f$: πεδίο ορισμού της f) και η f είναι τμηματικά συνεχής στο $g([\alpha, b])$. Τότε

$$\int_{\alpha}^{b} \big(f(g(t))\big) g'(t)\,dt = \int_{g(\alpha)}^{g(b)} f(u)\,du$$

## **<u>Παράδειγμα</u>**

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I = \int_{-1}^{0} (1 - it)\sin(1 + it)\,dt$.

**<u>Λύση:</u>**

$$I=\int_{-1}^{0}(1-it)\left(-\frac{\cos(1+it)}{i}\right)'dt=\left[(1-it)\left(-\frac{\cos(1+it)}{i}\right)\right]_{-1}^{0}+\frac{1}{i}\int_{-1}^{0}(1-it)'\cos(1+it)dt=$$

$$=-\frac{\cos 1}{i}+(1+i)\frac{\cos(1-i)}{i}-\int_{-1}^{0}\cos(1+it)dt=\left(\cos 1-(1+i)\cos(1-i)\right)i-\left[\frac{\sin(1+it)}{i}\right]_{-1}^{0}=$$

$$=\left(\cos 1-(1+i)\cos(1-i)\right)i-\left(\frac{\sin 1}{i}-\frac{\sin(1-i)}{i}\right)=\left(\cos 1-(1+i)\cos(1-i)+\sin 1-\sin(1-i)\right)i$$

□

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**1.** Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I=\int_{0}^{2\pi}(1+it)e^{it}dt$.

**2.** Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $J=\int_{0}^{2\pi}e^{-it}\sin(1+2ti)dt$. □

## ΚΑΜΠΥΛΕΣ ΣΤΟ ΜΙΓΑΔΙΚΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

Έστω $f:[\alpha,b]\to\mathbb{C}$ μία <u>συνεχής</u> συνάρτηση. Το "γράφημά" της (δηλ. το σύνολο $f([\alpha,b])$ των σημείων του μιγαδικού επιπέδου τα οποία είναι οι εικόνες μέσω της f του διαστήματος $[\alpha,b]$) αποτελεί μία καμπύλη στο μιγαδικό επίπεδο με **παραμετρική εξίσωση** $z=f(t)$, $\alpha\le t\le b$. Συνήθως συμβολίζουμε την $f(t)$ με $z(t)$ (και επομένως η σχέση $z=z(t)$, $\alpha\le t\le b$ είναι η παραμετρική εξίσωση της καμπύλης).

Αν $\alpha\le t_1<t_2\le b$ και $z_1=z(t_1)$, $z_2=z(t_2)$, τότε λέμε ότι το $z_1$ **προηγείται** του $z_2$ (ή ότι το $z_2$ **έπεται** του $z_1$). Το τμήμα της καμπύλης από το σημείο $z_1=z(t_1)$ μέχρι το σημείο $z_2=z(t_2)$, $t_1,t_2\in[\alpha,b]$, καλείται **τόξο** της καμπύλης C. Επομένως μία καμπύλη αποτελεί ένα <u>διατεταγμένο</u> σύνολο σημείων του μιγαδικού επιπέδου. Μία καμπύλη θεωρείται πάντα προσανατολισμένη στη διεύθυνση που αντιστοιχεί όταν η παράμετρος t αυξάνει. Αυτή η διεύθυνση καλείται **θετική** (δηλ. η θετική διεύθυνση είναι η διεύθυνση κατά την οποία ένα σημείο $z(t)$ κινείται πάνω στην καμπύλη όταν το t αυξάνεται – με άλλα λόγια καθορίζεται από τον τρόπο σχηματισμού της καμπύλης όταν το t αυξάνεται). Το σημείο $z(\alpha)$ καλείται **αρχή** της καμπύλης και το σημείο $z(b)$ καλείται **πέρας** (ή **τέλος**) της καμπύλης. Η καμπύλη καλείται **κλειστή** αν $z(\alpha)=z(b)$.

Το σύνολο των σημείων του μιγαδικού επιπέδου τα οποία είναι οι εικόνες μέσω της $z(t)$ του διαστήματος $[\alpha,b]$ (δηλ. το σύνολο $\{z(t)/t\in[\alpha,b]\}$ καλείται **ίχνος** της καμπύλης και διαφέρει από την καμπύλη αφού στην πραγματικότητα είναι μόνο το "γράφημά" της χωρίς να καθορίζεται ο τρόπος σχηματισμού του (δηλ. η θετική διεύθυνση). Συνήθως, χάριν απλότητας και εφόσον δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης, θα χρησιμοποιούμε στα επόμενα τον όρο "καμπύλη" αντί του όρου "ίχνος καμπύλης".

Μία καμπύλη C με παραμετρική εξίσωση $z=z(t),\ t\in[\alpha,b]$ καλείται **απλή** αν η συνάρτηση $z(t)$ είναι 1-1 στο διάστημα $(\alpha,b)$, δηλ. αν για κάθε $t_1,t_2\in(\alpha,b)$ με $t_1\neq t_2$ ισχύει $z(t_1)\neq z(t_2)$. Η C καλείται **καμπύλη Jordan** αν είναι απλή και κλειστή. Επίσης η καμπύλη με παραμετρική εξίσωση $z=z(-t),\ t\in[-b,-\alpha]$ ονομάζεται **αντίθετη** καμπύλη της C και συμβολίζεται με $C^-$. Είναι φανερό ότι η $C^-$ έχει το ίδιο ίχνος με τη C αλλά αντίθετη φορά σχηματισμού.

## Βασικές παραμετρικές καμπύλες

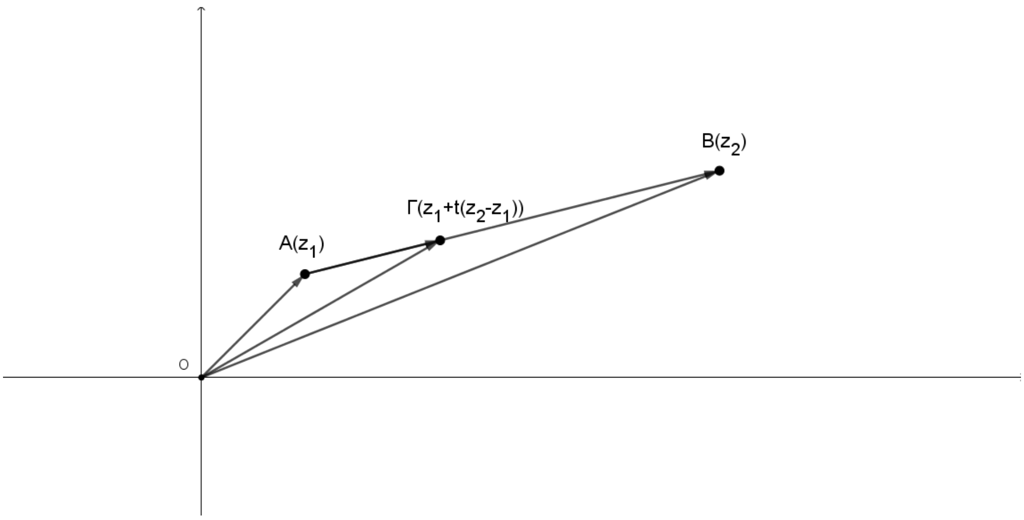
**1. Ευθύγραμμο τμήμα**

Έστω $z_1,z_2\in\mathbb{C}$. Το ευθύγραμμο τμήμα του μιγαδικού επιπέδου που ενώνει τα σημεία στα οποία απεικονίζονται οι μιγαδικοί $z_1$, $z_2$ έχει παραμετρική εξίσωση

$$\boxed{z(t)=z_1+t(z_2-z_1),\ t\in[0,1]} \qquad (1)$$

με φορά σχηματισμού από το $z(0)=z_1$ στο $z(1)=z_2$ και είναι προφανώς μία απλή καμπύλη. Η εξίσωση (1) εύκολα συνάγεται ως εξής:

Στο παρακάτω σχήμα




τα διανύσματα $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ είναι οι διανυσματικές ακτίνες των μιγαδικών $z_1$ και $z_2$ αντίστοιχα. Έστω Γ ένα σημείο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ. Τότε το σημείο Γ είναι το πέρας του διανύσματος $\overrightarrow{O\Gamma} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{A\Gamma}$. Όμως για το $\overrightarrow{A\Gamma}$ υπάρχει προφανώς $0 \leq t \leq 1$ τέτοιο ώστε $\overrightarrow{A\Gamma} = t\overrightarrow{AB}$. Επειδή τώρα ο μιγαδικός $z_2 - z_1$ αντιστοιχεί στο διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ και

$$\overrightarrow{O\Gamma} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AB}$$

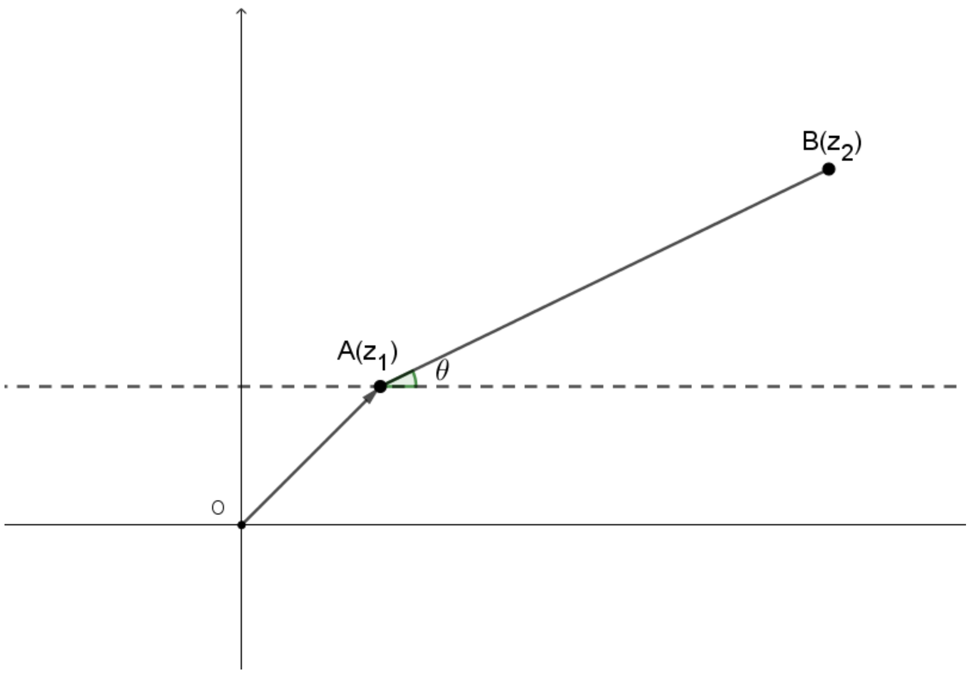
τότε έπεται αμέσως ότι το σημείο Γ αντιστοιχεί στο μιγαδικό $z_1 + t(z_2 - z_1)$.

Μετά από απλές πράξεις η παραμετρική εξίσωση (1) καταλήγει στη μορφή

$$\boxed{z(t) = (1-t)z_1 + tz_2,\ t \in [0,1]}$$

η οποία χρησιμοποιείται πολλές φορές στην πράξη.

Επίσης αν θ είναι η γωνία του της ευθείας ΑΒ με τον άξονα $x'x$:




τότε η εκθετική μορφή του AB

$$z(t) = z_1 + te^{i\theta},\ 0 \le t \le |z_2 - z_1|$$

αποτελεί μία άλλη παραμετρική εξίσωση του ευθύγραμμου τμήματος AB με φορά σχηματισμού από το $z(0) = z_1$ στο $z(1) = z_2$.

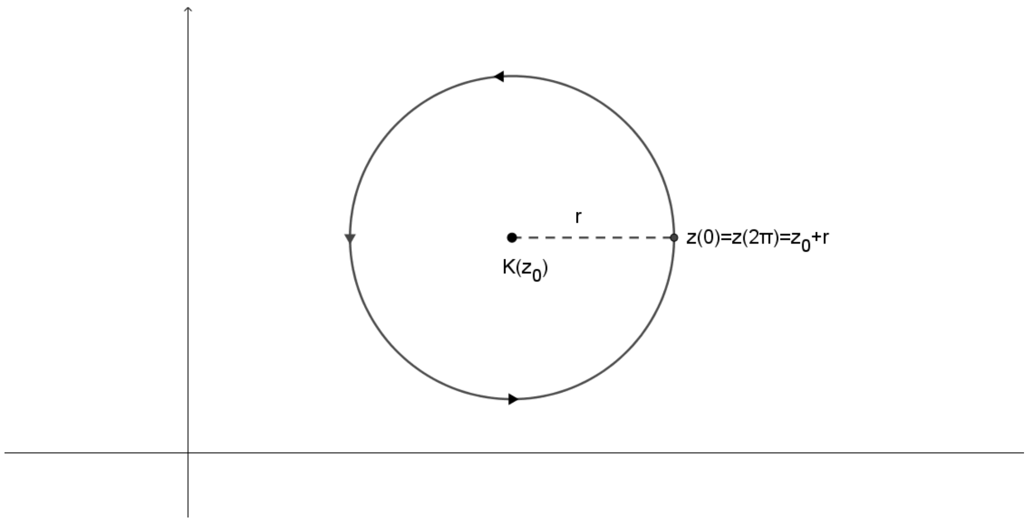
**Παρατήρηση 5:** Αν η συνεχής συνάρτηση $z(t)$ δεν είναι σταθερή και επιπλέον ισχύει $z(t) \in \mathbb{R}$ για κάθε $t \in [\alpha, b]$, τότε το ίχνος της καμπύλης που παριστάνει η $z(t)$ είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα πάνω στον άξονα $x'x$.

## 2. Κύκλος

Έστω $z_0 \in \mathbb{C}$ και $r > 0$. Ο κύκλος του μιγαδικού επιπέδου με κέντρο την εικόνα του $z_0$ στο μιγαδικό επίπεδο και ακτίνα r έχει παραμετρική εξίσωση

$$\boxed{z(t) = z_0 + re^{it},\ t \in [0, 2\pi]} \qquad (2)$$

με φορά σχηματισμού από το $z(0) = z_0 + r$ στο $z(2\pi) = z_0 + r$ κινούμενοι κατά τη θετική φορά και είναι προφανώς μία απλή και κλειστή καμπύλη (δηλ. είναι καμπύλη Jordan) όπως φαίνεται και από το παρακάτω σχήμα:



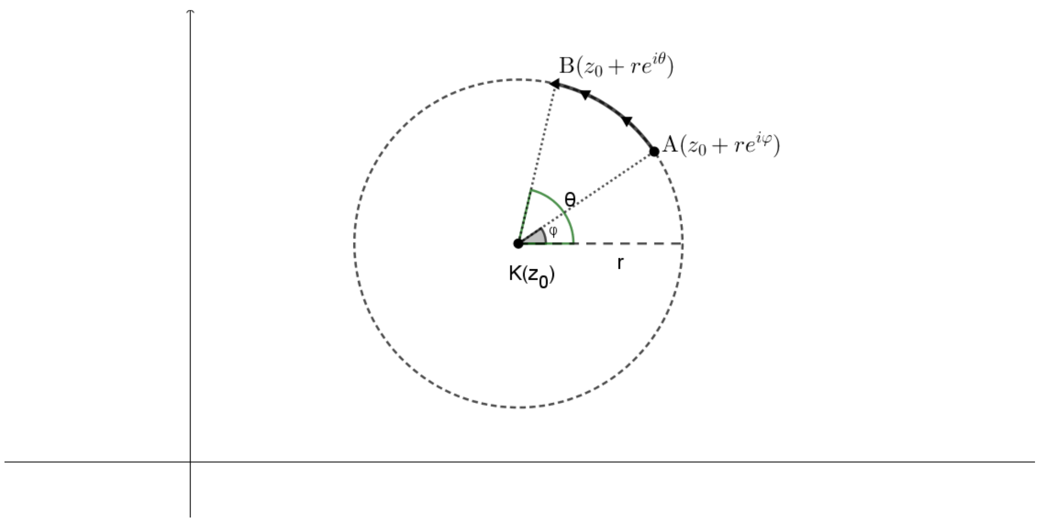

Η εξίσωση (2) είναι ως γνωστόν η εκθετική μορφή του κύκλου $(K, r)$.

### 3. Κυκλικό τόξο

Έστω $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$ και $0 \leq \varphi < \theta \leq 2\pi$. Θεωρούμε τον κύκλο C του μιγαδικού επιπέδου με κέντρο την εικόνα του $z_0$ στο μιγαδικό επίπεδο και ακτίνα r. Η παραμετρική εξίσωση

$$\boxed{z(t) = z_0 + re^{it},\ t \in [\varphi, \theta]} \qquad (3)$$

παριστάνει στο μιγαδικό επίπεδο το τόξο $\overset{\frown}{AB}$ του κύκλου C με φορά σχηματισμού από το A στο B κινούμενοι κατά τη θετική φορά το οποίο φαίνεται στο επόμενο σχήμα (η ευθεία της ακτίνας r είναι παράλληλη με τον άξονα $x'x$):




Η εξίσωση (3) είναι ως γνωστόν η εκθετική μορφή του τόξου $\overset{\frown}{AB}$.

## **Παράδειγμα**

Να σχεδιάσετε την καμπύλη C με παραμετρική εξίσωση

$$z(t)=\begin{cases} e^{it}, & -\dfrac{\pi}{2}\le t\le \pi \\ \dfrac{4t}{\pi}-5, & \pi<t\le 2\pi \end{cases}$$

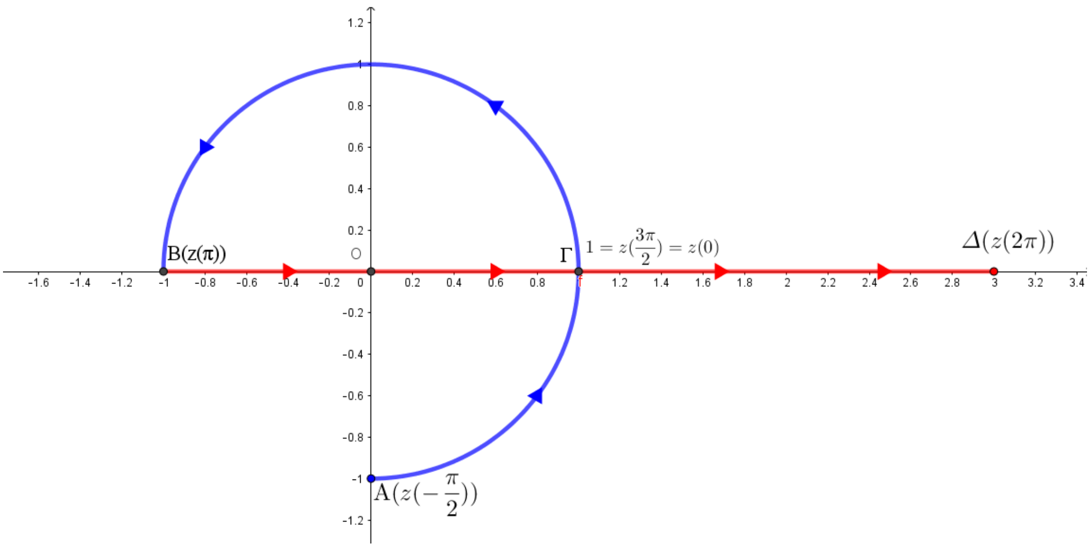
και στη συνέχεια να εξετάσετε αν είναι απλή και κλειστή. Επίσης να υπολογίσετε το μήκος της καμπύλης C και να γράψετε την παραμετρική εξίσωση της αντίθετης καμπύλης $C^{-}$ την οποία και να σχεδιάσετε.

**Λύση:**

Είναι φανερό ότι η $z(t)$ είναι συνεχής συνάρτηση.

- Η $z(t)=e^{it}$, $-\dfrac{\pi}{2}\le t\le \pi$ παριστάνει τόξο $270^{o}$ του κύκλου με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα 1. Η αρχή του τόξου είναι η εικόνα του μιγαδικού $z\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=e^{-i\frac{\pi}{2}}=-i$ και το πέρας του τόξου είναι η εικόνα του μιγαδικού $z(\pi)=e^{i\pi}=-1$.
- Λόγω συνέχειας της $z(t)$ στο $t=\pi$ έχουμε αμέσως ότι $z(t)=\dfrac{4t}{\pi}-5$, $\pi\le t\le 2\pi$ οπότε η $z(t)$ στο διάστημα $[\pi,2\pi]$ παριστάνει (σύμφωνα με την Παρατήρηση 5) ευθύγραμμο τμήμα πάνω στον άξονα $x'x$. Η αρχή του ευθύγραμμου τμήματος είναι η εικόνα του μιγαδικού $z(\pi)=-1$ και το πέρας του ευθύγραμμου τμήματος είναι η εικόνα του μιγαδικού $z(2\pi)=...=3$.

Η καμπύλη C που παριστάνει η $z(t)$ μαζί με τον προσανατολισμό της δίνεται στο παρακάτω σχήμα (αρχή της καμπύλης C είναι το Α και πέρας της καμπύλης C είναι το Δ):




Από το σχήμα παρατηρούμε ότι η καμπύλη C

- δεν είναι απλή αφού $z(0) = z\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 1$, και
- δεν είναι κλειστή αφού $z(0) = -i \neq 3 = z(2\pi)$.

Από τη Γεωμετρία έχουμε ότι το μήκος του τόξου $\widehat{AB}$ είναι $\ell_{\widehat{AB}} = \frac{3\pi}{2}$. Το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΒΔ είναι

$$B\Delta = z(2\pi) - z(\pi) = 3 - (-1) = 4$$

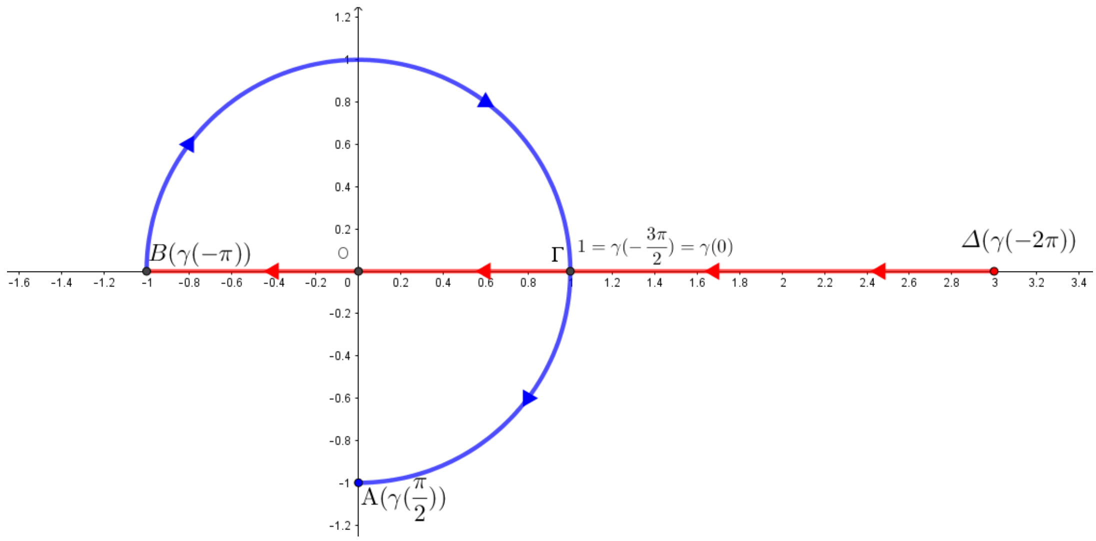
Άρα το μήκος L της καμπύλης C είναι

$$L = \ell_{\widehat{AB}} + B\Delta = \frac{3\pi}{2} + 4$$

Η παραμετρική εξίσωση της $C^-$ είναι η

$$\gamma(t) = z(-t) = \begin{cases} -\frac{4t}{\pi} - 5, & -2\pi \leq t < -\pi \\ e^{-it}, & -\pi \leq t \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Η καμπύλη $C^-$ που παριστάνει η $\gamma(t)$ μαζί με τον προσανατολισμό της δίνεται στο παρακάτω σχήμα (αρχή της καμπύλης $C^-$ είναι το Δ και πέρας της καμπύλης $C^-$ είναι το Α):




□

## <u>ΑΣΚΗΣΕΙΣ</u>

**1.** Να σχεδιάσετε την καμπύλη C που δίνεται από την παραμετρική εξίσωση

$$z(t)=\begin{cases} e^{it}, & -\pi \le t \le 0 \\ 1-2t(1+i), & 0<t\le 1 \end{cases}$$

και στη συνέχεια να εξετάσετε αν είναι απλή και κλειστή. Επίσης να υπολογίσετε το μήκος της παραπάνω καμπύλης και να γράψετε την παραμετρική εξίσωση της αντίθετης καμπύλης $C^-$ την οποία και να σχεδιάσετε.

**2.** Να σχεδιάσετε την καμπύλη C που δίνεται από την παραμετρική εξίσωση

$$z(t)=\cos t\,,\ -\pi \le t \le \pi$$

και στη συνέχεια να εξετάσετε αν είναι απλή και κλειστή. Επίσης να υπολογίσετε το μήκος της παραπάνω καμπύλης και να γράψετε μία παραμετρική εξίσωση της αντίθετης καμπύλης $C^-$. Τι παρατηρείται για τη φορά σχηματισμού της $C^-$ σε σχέση με τη φορά σχηματισμού της C; □