<u>ΜΕΜΟΝΩΜΕΝΑ ΑΝΩΜΑΛΑ ΣΗΜΕΙΑ</u>

<u>Ορισμός 1:</u> Έστω $f(z)$ μιγαδική συνάρτηση και $z_0 \in \mathbb{C}$. Το z_0 καλείται **μεμονωμένο ανώμαλο σημείο** της f αν

i) η f δεν ορίζεται στο z_0 ή ορίζεται στο z_0 αλλά δεν είναι διαφορίσιμη στο z_0, και

ii) υπάρχει $r > 0$ τέτοιο ώστε η $f(z)$ να είναι ολόμορφη στο δακτύλιο $\{z \in \mathbb{C} / 0 < |z - z_0| < r\}$. □

Στην πράξη συνήθως έχουμε ότι η f <u>δεν</u> ορίζεται στο z_0. Π.χ. για τη συνάρτηση $f(z) = \dfrac{1}{z}$ το $z_0 = 0$ είναι μεμονωμένο ανώμαλο σημείο αφού η $f(z)$ δεν ορίζεται στο $z_0 = 0$ και η $f(z)$ είναι ολόμορφη (ως ρητή συνάρτηση) στο σύνολο $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$ (και επομένως η $f(z)$ είναι ολόμορφη σε <u>κάθε</u> δακτύλιο $\{z \in \mathbb{C} / 0 < |z| < r\}$).

Έστω τώρα z_0 μεμονωμένο ανώμαλο σημείο της $f(z)$. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει $r > 0$ τέτοιο ώστε η $f(z)$ να είναι ολόμορφη στο δακτύλιο $\Delta = \{z \in \mathbb{C} / 0 < |z - z_0| < r\}$. Άρα η $f(z)$ έχει στο Δ ανάπτυγμα Laurent με κέντρο το z_0:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n (z - z_0)^n = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (z - z_0)^n}_{\text{κανονικό μέρος}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n} (z - z_0)^{-n}}_{\text{κύριο μέρος}}, \ z \in \Delta \qquad (*)$$

<u>Διακρίνουμε τις εξής τρεις κατηγορίες μεμονωμένων ανώμαλων σημείων</u>:

I) Το z_0 καλείται **αιρόμενο** (ή **επουσιώδες**) **ανώμαλο σημείο** της $f(z)$ αν το κύριο μέρος της $(*)$ είναι μηδέν (δηλ. ισοδύναμα $\alpha_{-n} = 0$, $n = 1, 2, 3, \ldots$). Τότε προφανώς έχουμε

$$\boxed{f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (z - z_0)^n \ \text{ για κάθε } z \in \Delta}$$

Επομένως $\lim_{z \to z_0} f(z) = \alpha_0 \in \mathbb{C}$. Αυτό ισχύει και αντίστροφα:

Πρόταση 2: Έστω $z_0 \in \mathbb{C}$ μεμονωμένο ανώμαλο σημείο της $f(z)$. Τότε το z_0 είναι αιρόμενο ανώμαλο σημείο της $f(z)$ αν και μόνο αν υπάρχει στο $\mathbb{C}$ το όριο $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$.

Αν τώρα ορίσουμε

$$\tilde{f}(z) = \begin{cases} f(z), & z \in \Delta \\ \alpha_0, & z = z_0 \end{cases}$$

δηλ.

$$\tilde{f}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (z - z_0)^n \text{ για } z \in \mathbb{C} \text{ με } |z - z_0| < r$$

τότε έχουμε αμέσως ότι η $\tilde{f}(z)$ είναι ολόμορφη στον κυκλικό δίσκο $|z - z_0| < r$ και άρα διαφορίσιμη στο z_0. Επομένως η $f(z)$ μπορεί να επεκταθεί σε συνάρτηση διαφορίσιμη στο z_0. Για το λόγο αυτό το z_0 ονομάζεται <u>αιρόμενο</u> ανώμαλο σημείο.

Από την προηγηθείσα ανάλυση είναι τώρα φανερό ότι στην περίπτωση που το z_0 είναι αιρόμενο ανώμαλα σημείο της $f(z)$ τότε η σειρά Laurent $(*)$ εκφυλίζεται σε σειρά Taylor.

II) Έστω κ θετικός ακέραιος. Το z_0 καλείται **πόλος τάξης κ** της $f(z)$ αν

$$\alpha_{-\kappa} \neq 0 \quad \text{και} \quad \alpha_{-n} = 0 \text{ για κάθε } n > \kappa$$

Τότε προφανώς έχουμε

$$\boxed{f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (z - z_0)^n + \frac{\alpha_{-1}}{z - z_0} + \frac{\alpha_{-2}}{(z - z_0)^2} + \ldots + \frac{\alpha_{-\kappa}}{(z - z_0)^\kappa}, \; z \in \Delta}$$

Ειδικότερα το z_0 καλείται **απλός πόλος** της $f(z)$ αν $\kappa = 1$ - δηλ. αν

$$\alpha_{-1} \neq 0 \text{ και } \alpha_{-2} = \alpha_{-3} = \alpha_{-4} = \ldots = 0$$

Τότε προφανώς έχουμε

$$\boxed{f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n(z-z_0)^n+\frac{\alpha_{-1}}{z-z_0},\ z\in\Delta}$$

Αν τώρα το z_0 είναι **πόλος τάξης κ** της $f(z)$, τότε για κάθε $z\in\Delta$ έχουμε

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n(z-z_0)^n+\frac{\alpha_{-1}}{z-z_0}+\frac{\alpha_{-2}}{(z-z_0)^2}+\ldots+\frac{\alpha_{-\kappa}}{(z-z_0)^{\kappa}}=$$

$$=\frac{(z-z_0)^{\kappa}\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n(z-z_0)^n+\alpha_{-1}(z-z_0)^{\kappa-1}+\alpha_{-2}(z-z_0)^{\kappa-2}+\ldots+\alpha_{-\kappa}}{(z-z_0)^{\kappa}}=$$

$$=\frac{\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n(z-z_0)^{n+\kappa}+\alpha_{-1}(z-z_0)^{\kappa-1}+\alpha_{-2}(z-z_0)^{\kappa-2}+\ldots+\alpha_{-\kappa}}{(z-z_0)^{\kappa}}=$$

$$\underset{\left(\substack{m=n+\kappa\Leftrightarrow\\ \Leftrightarrow n=m-\kappa}\right)}{=}\frac{\sum_{m=\kappa}^{\infty}\alpha_{m-\kappa}(z-z_0)^m+\alpha_{-1}(z-z_0)^{\kappa-1}+\alpha_{-2}(z-z_0)^{\kappa-2}+\ldots+\alpha_{-\kappa}}{(z-z_0)^{\kappa}}=\boxed{\frac{\sum_{m=0}^{\infty}\alpha_{m-\kappa}(z-z_0)^m}{(z-z_0)^{\kappa}}}$$

Αν θέσουμε $g(z)=\sum_{m=0}^{\infty}\alpha_{m-\kappa}(z-z_0)^m$, $z\in\mathbb{C}$ με $|z-z_0|<r$, τότε

- η $g(z)$ είναι ολόμορφη στον κυκλικό δίσκο $\Delta\cup\{z_0\}$.
- $g(z_0)=\alpha_{-\kappa}\neq 0$.
- $f(z)=\dfrac{g(z)}{(z-z_0)^{\kappa}}\Leftrightarrow\boxed{g(z)=(z-z_0)^{\kappa}f(z)}$ για κάθε $z\in\Delta$.

Επομένως

$$\lim_{z\to z_0}\left((z-z_0)^{\kappa}f(z)\right)=\lim_{z\to z_0}g(z)=g(z_0)=\alpha_{-\kappa}\neq 0$$

Αυτό ισχύει και αντίστροφα:

Πρόταση 3: Έστω $z_0 \in \mathbb{C}$ μεμονωμένο ανώμαλο σημείο της $f(z)$ και κ θετικός ακέραιος. Τότε το z_0 είναι πόλος τάξης κ της $f(z)$ αν και μόνο αν το όριο $\lim_{z\to z_0}\left((z-z_0)^{\kappa} f(z)\right)$ είναι μιγαδικός αριθμός <u>διάφορος του μηδενός</u> (δηλ. $\lim_{z\to z_0}\left((z-z_0)^{\kappa} f(z)\right)\in \mathbb{C}^*$)

III) Το z_0 καλείται **ουσιώδες ανώμαλο σημείο** της $f(z)$ αν το κύριο μέρος της $(*)$ έχει άπειρο πλήθος μη μηδενικών συντελεστών (δηλ. το σύνολο $\{n\in\mathbb{N}/\alpha_{-n}\neq 0\}$ είναι άπειρο).

Ορισμός 4: Έστω κ θετικός ακέραιος, $z_0 \in \mathbb{C}$ και $f(z)$ συνάρτηση κ-φορές διαφορίσιμη στο z_0. Το z_0 καλείται ρίζα της $f(z)$ τάξης (ή πολλαπλότητας) κ αν

- $f(z_0)=f'(z_0)=\ldots=f^{(\kappa-1)}(z_0)=0$
- $f^{(\kappa)}(z_0)\neq 0$. □

Το z_0 λέμε ότι είναι ρίζα της $f(z)$ τάξης (ή πολλαπλότητας) 0 αν $f(z_0)\neq 0$.

Παρατήρηση 5: Έστω $z_0 \in \mathbb{C}$, κ μη αρνητικός ακέραιος και $g(z)$ συνάρτηση κ φορές διαφορίσιμη στο z_0 με $g(z_0)\neq 0$. Τότε για τη συνάρτηση $f(z)=(z-z_0)^{\kappa} g(z)$ το z_0 είναι ρίζα κ τάξης (για $\kappa=0$ θεωρούμε ότι $f(z)=g(z)$).

□

Θεώρημα 6: Έστω κ θετικός ακέραιος, $z_0 \in \mathbb{C}$, $r>0$ και $f(z)$ συνάρτηση ολόμορφη στον κυκλικό δίσκο $S(z_0,r)=\{z\in\mathbb{C}/|z-z_0|<r\}$. Έστω ακόμη ότι το z_0 είναι ρίζα της $f(z)$ τάξης κ. Τότε υπάρχει $g(z)$ συνάρτηση ολόμορφη στο $S(z_0,r)$ τέτοια ώστε

i) $f(z)=(z-z_0)^{\kappa} g(z)$ για κάθε $z\in S(z_0,r)$

ii) $g(z_0)=\dfrac{f^{(\kappa)}(z_0)}{\kappa!}$

iii) $g(z_0) \neq 0$

<u>Απόδειξη:</u>

Αφού η $f(z)$ είναι ολόμορφη στο $S(z_0, r)$, τότε ως γνωστόν έχει ανάπτυγμα Taylor στο $S(z_0, r)$. Άρα για κάθε $z \in S(z_0, r)$ έχουμε ότι

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$$

Επειδή το z_0 είναι ρίζα της $f(z)$ τάξης κ, έχουμε ότι

$$f(z_0) = f'(z_0) = \ldots = f^{(\kappa-1)}(z_0) = 0, \quad f^{(\kappa)}(z_0) \neq 0$$

Άρα για κάθε $z \in S(z_0, r)$ έχουμε ότι

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n = \sum_{n=\kappa}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n = (z - z_0)^\kappa \sum_{n=\kappa}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^{n-\kappa} =$$

$$\underset{\substack{(m=n-\kappa \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow n=m+\kappa)}}{=} (z - z_0)^\kappa \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f^{(m+\kappa)}(z_0)}{(m+\kappa)!}(z - z_0)^m$$

Θέτουμε $g(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f^{(m+\kappa)}(z_0)}{(m+\kappa)!}(z - z_0)^m$, $z \in S(z_0, r)$. Τότε έχουμε αμέσως ότι

- η $g(z)$ είναι ολόμορφη στο $S(z_0, r)$
- $f(z) = (z - z_0)^\kappa g(z)$, $z \in S(z_0, r)$
- $g(z_0) = \dfrac{f^{(\kappa)}(z_0)}{\kappa!} \neq 0$ □

Το προηγούμενο Θεώρημα ισχύει και για $\kappa = 0$. Σε αυτήν την περίπτωση έχουμε ότι $g(z) = f(z)$.

Από το προηγούμενο Θεώρημα έχουμε αμέσως το εξής:

<u>Θεώρημα 7:</u> Έστω A ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{C}$, $f, g : A \to \mathbb{C}$ συναρτήσεις ολόμορφες στο A και $z_0 \in A$. Έστω ακόμα κ, m θετικοί ακέραιοι τέτοιοι ώστε το z_0 να είναι

- ρίζα της $f(z)$ τάξης κ, και
- ρίζα της $g(z)$ τάξης m.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(z)=\dfrac{f(z)}{g(z)}$. Τότε το z_0 είναι

i) μεμονωμένο ανώμαλο σημείο της $h(z)$

ii) αιρόμενο ανώμαλο σημείο της $h(z)$ αν $\kappa \geq m$

iii) πόλος τάξης $m-\kappa$ της $h(z)$ αν $m>\kappa$. □

Παρατήρηση 8: Το προηγούμενο Θεώρημα χρησιμοποιείται για το χαρακτηρισμό των μεμονωμένων ανώμαλων σημείων της συνάρτησης $h(z)=\dfrac{f(z)}{g(z)}$ και ισχύει προφανώς και για $\kappa=0$. □

Έστω τώρα $r>0$, $z_0 \in \mathbb{C}$ και $f(z)$ μία συνάρτηση ολόμορφη στο δακτύλιο $\Delta=\{z\in\mathbb{C}/0<|z-z_0|<r\}$. Τότε ως γνωστόν η $f(z)$ παριστάνεται κατά μοναδικό τρόπο στο Δ με μια σειρά Laurent. Ο συντελεστής α_{-1} του $\dfrac{1}{z-z_0}$ αυτής της σειράς καλείται **ολοκληρωτικό υπόλοιπο** της $f(z)$ στο z_0 και συμβολίζεται με $\mathrm{Res}(f,z_0)$ (δηλ. $\mathrm{Res}(f,z_0)=\alpha_{-1}$). Παρατηρήστε ότι αν το z_0 είναι αιρόμενο ανώμαλο σημείο της $f(z)$, τότε προφανώς $\mathrm{Res}(f,z_0)=0$. Επίσης για την εύρεση του ολοκληρωτικού υπολοίπου $\mathrm{Res}(f,z_0)$ πρέπει να βρούμε τη σειρά Laurent της $f(z)$ με κέντρο το z_0 σε ένα δακτύλιο της μορφής $\{z\in\mathbb{C}/0<|z-z_0|<r\}$ (δηλ. σε έναν δακτύλιο της μορφής $\{z\in\mathbb{C}/R_1<|z-z_0|<R_2\}$ με $R_1=0$).

Πρόταση 9: Έστω κ θετικός ακέραιος, $f(z)$ συνάρτηση και $z_0\in\mathbb{C}$ πόλος τάξης κ της $f(z)$. Τότε

$$\mathrm{Res}(f,z_0)=\lim_{z\to z_0}\left(\frac{1}{(\kappa-1)!}\frac{d^{\kappa-1}}{dz^{\kappa-1}}\left[(z-z_0)^{\kappa}f(z)\right]\right)$$

Απόδειξη: Αφού το z_0 είναι πόλος της $f(z)$, τότε είναι μεμονωμένο ανώμαλο σημείο της $f(z)$ και επομένως υπάρχει $r>0$ ώστε η $f(z)$ να αναπτύσσεται στο δακτύλιο $\Delta=\{z\in\mathbb{C}/0<|z-z_0|<r\}$ στη σειρά Laurent ($*$). Τότε, σύμφωνα με την ανάλυση που προηγήθηκε της Πρότασης 3, αν θέσουμε

$$g(z)=\sum_{m=0}^{\infty}\alpha_{m-\kappa}(z-z_0)^m,\ z\in\mathbb{C} \text{ με } |z-z_0|<r$$

έχουμε ότι η $g(z)$ είναι ολόμορφη συνάρτηση στον κυκλικό δίσκο $\Delta\cup\{z_0\}$ και ότι ισχύει

$$g(z)=(z-z_0)^{\kappa}f(z),\ z\in\Delta$$

Είναι φανερό ότι η σειρά $\sum_{m=0}^{\infty}\alpha_{m-\kappa}(z-z_0)^m$ είναι η σειρά Taylor της $g(z)$ στο σημείο z_0. Επομένως ο $\kappa-1$ όρος της προηγούμενης σειράς είναι ίσος με $\dfrac{g^{(\kappa-1)}(z_0)}{(\kappa-1)!}$.

Άρα

$$\alpha_{-1}=\alpha_{(\kappa-1)-\kappa}=\frac{g^{(\kappa-1)}(z_0)}{(\kappa-1)!}$$

Επειδή μία ολόμορφη συνάρτηση σε ανοικτό σύνολο έχει παραγώγους οποιασδήποτε τάξης, τότε οποιασδήποτε τάξης παράγωγος είναι συνεχής συνάρτηση. Συνεπώς

$$\alpha_{-1}=\frac{g^{(\kappa-1)}(z_0)}{(\kappa-1)!}=\frac{1}{(\kappa-1)!}\lim_{z\to z_0}g^{(\kappa-1)}(z)=\lim_{z\to z_0}\left(\frac{1}{(\kappa-1)!}\cdot\frac{d^{\kappa-1}}{dz^{\kappa-1}}\left[(z-z_0)^{\kappa}f(z)\right]\right)\quad\square$$

Παρατήρηση 10: Αν το z_0 είναι απλός πόλος, τότε από την προηγούμενη Πρόταση έχουμε αμέσως ότι

$$\boxed{\operatorname{Res}(f,z_0)=\lim_{z\to z_0}\left((z-z_0)f(z)\right)}\qquad\square$$

Πρόταση 11: Έστω $z_0\in\mathbb{C}$ και $p(z)$, $q(z)$ συναρτήσεις ολόμορφες στο z_0 τέτοιες ώστε:

i) $p(z_0)\neq 0$ (δηλ. το z_0 είναι ρίζα της $p(z)$ τάξης 0)

ii) $q(z_0)=0$, $q'(z_0)\neq 0$ (δηλ. το z_0 είναι ρίζα της $q(z)$ τάξης 1)

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(z)=\dfrac{p(z)}{q(z)}$. Τότε

$$\operatorname{Res}(f,z_0)=\frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$$

Απόδειξη: Από το Θεώρημα 7iii) και την Παρατήρηση 8 έχουμε ότι το z_0 είναι πόλος της $f(z)$ τάξης $1-0=1$ (δηλ. το z_0 είναι απλός πόλος της $f(z)$). Τότε από την Παρατήρηση 10 έχουμε αμέσως

$$\operatorname{Res}(f,z_0)=\lim_{z\to z_0}\left((z-z_0)f(z)\right)=\lim_{z\to z_0}\left((z-z_0)\frac{p(z)}{q(z)}\right)=\lim_{z\to z_0}\left(\frac{p(z)}{\dfrac{q(z)}{(z-z_0)}}\right)=\lim_{z\to z_0}\left(\frac{p(z)}{\dfrac{q(z)-q(z_0)}{(z-z_0)}}\right)=$$

$$=\frac{\lim\limits_{z\to z_0}p(z)}{\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{q(z)-q(z_0)}{(z-z_0)}}=\frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$$

□

Παρατήρηση 12: Με τις υποθέσεις της Πρότασης 11 έχουμε αμέσως ότι αν $h(z)=\dfrac{p(z)}{q'(z)}$, τότε

$$\operatorname{Res}(f,z_0)=h(z_0)=\lim_{z\to z_0}h(z)\ \left(=\lim_{z\to z_0}\frac{p(z)}{q'(z)}\right)$$ □

Παρατήρηση 13: Οι Προτάσεις 9 και 11 χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό ολοκληρωτικών υπολοίπων. Για τον υπολογισμό ολοκληρωτικών υπολοίπων μπορεί να χρησιμοποιηθεί προφανώς και η σειρά Laurent $(*)$ εφόσον βέβαια είναι εύκολη η εύρεσή της. □

Παραδείγματα

1. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(z)=\dfrac{z^{10}}{(z-1)^2(z+1)}$.

Να βρείτε και να χαρακτηρίσετε όλα τα μεμονωμένα ανώμαλα σημεία της $f(z)$ και στη συνέχεια να υπολογίσετε τα ολοκληρωτικά υπόλοιπα της $f(z)$ σε αυτά τα σημεία.

Λύση:

Το πεδίο ορισμού της $f(z)$ είναι προφανώς το $A=\mathbb{C}-\{-1,\ 1\}$ στο οποίο η $f(z)$ είναι ολόμορφη ως ρητή. Άρα τα μεμονωμένα ανώμαλα σημεία της $f(z)$ είναι τα $z_1=-1$ και $z_2=1$. Για κάθε $z\in\mathbb{C}$ ορίζουμε

$$p(z)=z^{10} \text{ και } q(z)=(z-1)^2(z+1)$$

Επομένως $f(z)=\dfrac{p(z)}{q(z)}$, $z\in A$. Οι συναρτήσεις $p(z)$, $q(z)$ είναι προφανώς ακέραιες.

- $\underline{z_1=-1}$
  - $p(z_1)\neq 0$. Άρα το z_1 είναι ρίζα της $p(z)$ τάξης 0.
  - Από την Παρατήρηση 5, έχουμε αμέσως ότι το z_1 είναι ρίζα της $q(z)$ τάξης 1.

  Από το Θεώρημα 7iii) και την Παρατήρηση 8 έχουμε τότε αμέσως ότι το z_1 είναι πόλος της $f(z)$ τάξης $1-0=1$. Συνεπώς από την Παρατήρηση 10 έπεται ότι

$$\operatorname{Res}(f,-1)=\lim_{z\to -1}\left((z+1)f(z)\right)=\lim_{z\to -1}\frac{z^{10}}{(z-1)^2}=\frac{(-1)^{10}}{(-1-1)^2}=\frac{1}{4}$$

  Παρατήρηση: Το $\operatorname{Res}(f,-1)$ μπορεί να υπολογιστεί και ως εξής:

  Επειδή $p(z_1)=1\neq 0$, $q(z_1)=0$ και $q'(z_1)=4\neq 0$ (άμεσο αφού για κάθε $z\in\mathbb{C}$ έχουμε $q'(z)=(z-1)(3z+1)$), τότε από την Πρόταση 11 έχουμε

$$\operatorname{Res}(f,-1)=\frac{p(-1)}{q'(-1)}=\frac{1}{4}$$

- $\underline{z_2=1}$

  Παρατηρούμε ότι

$$\lim_{z\to 1}\left((z-1)^2 f(z)\right)=\lim_{z\to 1}\frac{z^{10}}{z+1}=\frac{1}{2}\neq 0$$

Τότε από την Πρόταση 3 έχουμε αμέσως ότι το z_2 είναι πόλος της $f(z)$ τάξης 2. Συνεπώς από την Πρόταση 9 έπεται ότι

$$\operatorname{Res}(f,1)=\lim_{z\to 1}\left(\frac{1}{(2-1)!}\frac{d^{2-1}}{dz^{2-1}}\left[(z-1)^2 f(z)\right]\right)=\lim_{z\to 1}\left((z-1)^2 f(z)\right)'=\lim_{z\to 1}\left(\frac{z^{10}}{z+1}\right)'=$$

$$=\lim_{z\to 1}\frac{10z^9(z+1)-z^{10}}{(z+1)^2}=\lim_{z\to 1}\frac{9z^{10}+10z^9}{(z+1)^2}=\frac{19}{4}$$

□

2. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(z)=\dfrac{z^2}{1-\cos z}$.

Να βρείτε και να χαρακτηρίσετε όλα τα μεμονωμένα ανώμαλα σημεία της $f(z)$ και στη συνέχεια να υπολογίσετε το ολοκληρωτικό υπόλοιπο $\operatorname{Res}(f,0)$.

Λύση: Επειδή

$$1-\cos z=0\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow z=2\kappa\pi,\ \kappa\in\mathbb{Z}$$

τότε το πεδίο ορισμού της $f(z)$ είναι το $A=\mathbb{C}-\{2\kappa\pi/\kappa\in\mathbb{Z}\}$ στο οποίο η $f(z)$ είναι προφανώς ολόμορφη. Άρα τα μεμονωμένα ανώμαλα σημεία της $f(z)$ είναι τα

$$z_\kappa=2\kappa\pi,\ \kappa\in\mathbb{Z}$$

Για κάθε $z\in\mathbb{C}$ ορίζουμε

$$p(z)=z^2 \text{ και } q(z)=1-\cos z$$

Είναι άμεσο ότι οι συναρτήσεις $p(z)$, $q(z)$ είναι ακέραιες και ότι

$$f(z)=\frac{p(z)}{q(z)},\ z\in A$$

Επίσης για κάθε $z\in\mathbb{C}$ έχουμε

- ❖ $q'(z)=(1-\cos z)'=\sin z$
- ❖ $q''(z)=(\sin z)'=\cos z$

Τότε για κάθε $\kappa\in\mathbb{Z}$ ισχύει

- ➢ $q'(z_\kappa)=\sin z_\kappa=\sin(2\kappa\pi)=0$
- ➢ $q''(z_\kappa)=\cos z_\kappa=\cos(2\kappa\pi)=1\neq 0$

Άρα για κάθε $\kappa \in \mathbb{Z}$ το z_κ είναι ρίζα της $q(z)$ τάξης 2.

Διακρίνουμε τώρα τις περιπτώσεις:

- $\underline{z_0 = 0}$ (δηλ. $\kappa = 0$)

  Από την Παρατήρηση 5, έχουμε ότι το z_0 είναι ρίζα της $p(z)$ τάξης 2. Άρα από το Θεώρημα 7ii) έχουμε αμέσως ότι το z_0 είναι αιρόμενο σημείο της $f(z)$. Συνεπώς $\text{Res}(f,0) = 0$.

  Παρατήρηση: Μπορούμε να δείξουμε ότι το z_0 είναι αιρόμενο σημείο της $f(z)$ και με τη χρήση της Πρότασης 2 αφού

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{z^2}{1-\cos z} \underset{(DLH)}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim_{z\to 0} \frac{2z}{\sin z} \underset{(DLH)}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim_{z\to 0} \frac{2}{\cos z} = 2$$

- $\underline{z_\kappa = 2\kappa\pi}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$ με $\kappa \neq 0$

  Επειδή $p(z_\kappa) \neq 0$, τότε το z_κ είναι ρίζα της $p(z)$ τάξης 0. Άρα Από το Θεώρημα 7iii) και την Παρατήρηση 8 έχουμε τότε αμέσως ότι το z_κ είναι πόλος της $f(z)$ τάξης $2 - 0 = 2$. □

Άσκηση: Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(z) = \dfrac{z}{\sin^2 z}$.

Να βρείτε και να χαρακτηρίσετε όλα τα μεμονωμένα ανώμαλα σημεία της $f(z)$ και στη συνέχεια να υπολογίσετε το ολοκληρωτικό υπόλοιπο $\text{Res}(f,0)$. □