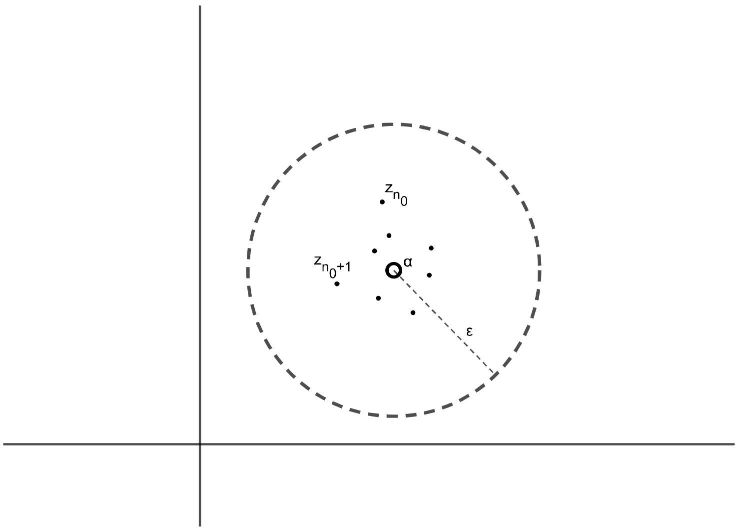
ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ - ΣΕΙΡΕΣ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ - ΔΥΝΑΜΟΣΕΙΡΕΣ - ΣΕΙΡΕΣ TAYLOR

ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Μία απεικόνιση $f:\mathbb{N}\to\mathbb{C}$ καλείται ακολουθία μιγαδικών αριθμών. Οι τιμές $f(n)$ καλούνται **όροι** της ακολουθίας. Συνήθως συμβολίζονται με z_n, w_n, ... και τότε την ακολουθία f τη συμβολίζουμε με (z_n), (w_n), ...

Ορισμός 1: Μία ακολουθία μιγαδικών αριθμών (z_n) θα λέμε ότι συγκλίνει στο μιγαδικό αριθμό α (συμβολισμός: $\lim z_n = \alpha$) αν για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $n_0 \equiv n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $n>n_0$ να ισχύει $|z_n-\alpha|<\varepsilon$. □

Αυτό σημαίνει ότι τελικά (δηλ. από κάποιο δείκτη και μετά) όλοι οι όροι της ακολουθίας βρίσκονται στο εσωτερικό **κάθε** κυκλικού δίσκου $S(\alpha,\varepsilon)=\{z\in\mathbb{C} / |z-\alpha|<\varepsilon\}$:



Επίσης λέμε ότι $\lim z_n = \infty$ αν για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $n_0\equiv n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $n>n_0$ να ισχύει $|z_n|>\varepsilon$. Αυτό σημαίνει ότι τελικά (δηλ. από κάποιο δείκτη και μετά) όλοι οι όροι της ακολουθίας βρίσκονται στο εξωτερικό **κάθε** κυκλικού δίσκου $S(0,\varepsilon)$.

Παρατήρηση 2:

i) Το όριο μίας ακολουθίας, αν υπάρχει, είναι μοναδικό.

ii) Το όριο μίας ακολουθίας δεν επηρεάζεται αν αφαιρέσουμε από την ακολουθία πεπερασμένο πλήθος όρων της.

iii) Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία (z_n) σε ένα μιγαδικό αριθμό είναι φραγμένη (δηλ. υπάρχει $M>0$ τέτοιο ώστε για κάθε $n\in\mathbb{N}$ να ισχύει $|z_n|<M$). □

Πρόταση 3: Έστω (z_n) ακολουθία μιγαδικών αριθμών με $z_n = x_n + iy_n$ και $\alpha = b + id \in \mathbb{C}$. Τότε έχουμε:

$$\lim z_n = \alpha \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \lim x_n = b \\ \lim y_n = d \end{Bmatrix}$$ □

Άρα ο υπολογισμός του ορίου μιας ακολουθίας μιγαδικών αριθμών ανάγεται στον υπολογισμό του ορίου δύο ακολουθιών πραγματικών αριθμών (του πραγματικού και του φανταστικού μέρους της ακολουθίας).

Πρόταση 4: Έστω (z_n), (w_n) ακολουθίες μιγαδικών αριθμών και $\alpha, b\in\mathbb{C}$ με $\lim z_n = \alpha$ και $\lim w_n = b$. Τότε:

i) $\lim(z_n \pm w_n) = \alpha \pm b$

ii) $\lim(z_n \cdot w_n) = \alpha\cdot b$

iii) $\lim(c\cdot z_n) = c\cdot\alpha$ για κάθε $c\in\mathbb{C}$

iv) $\lim\left(\dfrac{z_n}{w_n}\right) = \dfrac{\alpha}{b}$ αν $b\neq 0$ και $w_n\neq 0$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$. □

Για τα όρια στα οποία εμπλέκεται το ∞ ισχύει η Πρόταση 4 αρκεί να προκύπτουν επιτρεπόμενες πράξεις.

<u>ΣΕΙΡΕΣ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ</u>

Έστω (z_n) ακολουθία μιγαδικών αριθμών. Η ακολουθία

$$\boxed{s_n = z_1 + z_2 + ... + z_n,\ n \in \mathbb{N}}$$

καλείται **ακολουθία μερικών αθροισμάτων** της (z_n).

Αν η ακολουθία (s_n) <u>συγκλίνει σε ένα μιγαδικό αριθμό</u> α (δηλ. $\lim s_n = \alpha$), τότε λέμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + ... + z_n + ...$ **συγκλίνει** (ή είναι αθροίσιμη) και γράφουμε $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \alpha$ (το α καλείται άθροισμα της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$). Σε αντίθετη περίπτωση, δηλ. <u>αν η ακολουθία</u> (s_n) <u>δεν συγκλίνει σε μιγαδικό αριθμό</u>, λέμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ **αποκλίνει** (ή ότι δε συγκλίνει). Ιδιαίτερα αν $\lim s_n = \infty$ τότε γράφουμε $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \infty$.

Επίσης λέμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ συγκλίνει **απόλυτα** αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ συγκλίνει σε πραγματικό (μη αρνητικό) αριθμό.

<u>Παρατήρηση 5:</u> Για τη σύγκλιση των σειρών μιγαδικών αριθμών ισχύουν τα γνωστά μας από την πραγματική περίπτωση κριτήρια του λόγου (D' Alembert) και της ρίζας (Cauchy). □

Από την Πρόταση 3 έπεται αμέσως η εξής

<u>Πρόταση 6:</u> Έστω (z_n) ακολουθία μιγαδικών αριθμών με $z_n = x_n + iy_n$ και $\alpha = b + id \in \mathbb{C}$. Τότε έχουμε:

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \alpha \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sum_{n=1}^{\infty} x_n = b \\ \sum_{n=1}^{\infty} y_n = d \end{array} \right\}$$ □

Από την Πρόταση 4 έχουμε αμέσως την εξής:

Πρόταση 7: Έστω (z_n), (w_n) ακολουθίες μιγαδικών αριθμών και $\alpha, b \in \mathbb{C}$ με $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \alpha$ και $\sum_{n=1}^{\infty} w_n = b$. Τότε:

i) $\sum_{n=1}^{\infty} (z_n \pm w_n) = \alpha \pm b$

ii) $\sum_{n=1}^{\infty} (c \cdot z_n) = c \cdot \alpha$ για κάθε $c \in \mathbb{C}$ □

Για τα όρια στα οποία εμπλέκεται το ∞ ισχύει η Πρόταση 7 αρκεί να προκύπτουν επιτρεπόμενες πράξεις.

Πρόταση 8:

i) Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ συγκλίνει, τότε $\lim z_n = 0$.

ii) Αν μία σειρά μιγαδικών αριθμών συγκλίνει απόλυτα, τότε είναι και συγκλίνουσα.

□

Όπως και στην πραγματική περίπτωση δεν ισχύουν τα αντίστροφα της προηγούμενης Πρότασης.

ΔΥΝΑΜΟΣΕΙΡΕΣ

Έστω α_0, α_1, ..., α_n, ... μία ακολουθία μιγαδικών αριθμών και $z_0 \in \mathbb{C}$. Τότε η σειρά (συναρτήσεων)

$$\boxed{\alpha_0 + \alpha_1 (z - z_0) + ... + \alpha_n (z - z_0)^n + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (z - z_0)^n \ , \ z \in \mathbb{C}}$$

καλείται **δυναμοσειρά** με κέντρο το z_0. Οι μιγαδικοί α_n καλούνται **συντελεστές** της δυναμοσειράς. Παρατηρήστε ότι για $z = z_0$ και $n = 0$ ο όρος $\alpha_0 (z - z_0)^0$ θεωρείται ίσος με α_0.

Κάθε δυναμοσειρά έχει μία **ακτίνα σύγκλισης** R με $R \geq 0$ ή $R = +\infty$ για την οποία ισχύουν τα εξής:

- Αν $R = 0$, τότε η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (z - z_0)^n$ συγκλίνει μόνο για $z = z_0$.
- Αν $R > 0$ (δηλ. $R \in (0, +\infty)$), τότε:

  α) η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (z - z_0)^n$ συγκλίνει (απόλυτα) για $z \in \mathbb{C}$ με $|z - z_0| < R$ (δηλ. συγκλίνει απόλυτα στο εσωτερικό του κύκλου $|z - z_o| = R$).

  β) η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (z - z_0)^n$ αποκλίνει για $z \in \mathbb{C}$ με $|z - z_0| > R$ (δηλ. αποκλίνει στο εξωτερικό του κύκλου $|z - z_o| = R$).

  γ) δεν μπορούμε να αποφανθούμε για τη σύγκλιση ή απόκλιση της δυναμοσειράς $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (z - z_0)^n$ για $z \in \mathbb{C}$ με $|z - z_0| = R$ (δηλ. δεν μπορούμε να αποφανθούμε στα σημεία του μιγαδικού επιπέδου που ανήκουν στον κύκλο $|z - z_o| = R$).

- Αν $R = +\infty$, τότε η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (z - z_0)^n$ συγκλίνει (απόλυτα) για κάθε $z \in \mathbb{C}$.

Επομένως το R καθορίζει το δίσκο σύγκλισης της δυναμοσειράς.

Αν $\rho \in [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$ με $\rho = \lim \sqrt[n]{|\alpha_n|}$ ή $\rho = \lim \left| \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \right|$ - σε αυτήν την περίπτωση πρέπει $\alpha_n \neq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε αποδεικνύεται ότι $R = \frac{1}{\rho}$ (για $\rho = +\infty$ έχουμε $R = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{+\infty} = 0$ και για $\rho = 0$ έχουμε $R = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{0} = +\infty$).

<u>Θεώρημα 9:</u> Έστω $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (z - z_0)^n$ δυναμοσειρά με ακτίνα σύγκλισης $R > 0$.

Τότε:

i) η $f(z)$ είναι ολόμορφη στο σύνολο $\{z \in \mathbb{C} / |z - z_0| < R\}$.

ii) για $z \in \mathbb{C}$ με $|z - z_0| < R$ και για κάθε $\kappa \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$f^{(\kappa)}(z) = \sum_{n=\kappa}^{\infty} n(n-1)\dots(n-\kappa+1)\alpha_n (z - z_0)^{n-\kappa} \qquad \square$$

Από το ii) του Θεωρήματος 9 για $z=z_0$, έχουμε αμέσως την εξής:

<u>Πρόταση 10:</u> Έστω $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n(z-z_0)^n$ δυναμοσειρά με ακτίνα σύγκλισης $R>0$.

Τότε:

i) $\alpha_\kappa=\dfrac{f^{(\kappa)}(z_0)}{\kappa!}$ για $\kappa=0,1,2,\ldots$

ii) $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$ για $z\in\mathbb{C}$ με $|z-z_0|<R$. □

<u>Παρατήρηση 11:</u> Το Θεώρημα 9 και η Πρόταση 10 ισχύουν και στην περίπτωση που $R=+\infty$. Τότε τα i) και ii) του Θεωρήματος 7 και το ii) της Πρότασης 8 ισχύουν για κάθε $z\in\mathbb{C}$. □

<u>ΣΕΙΡΕΣ TAYLOR</u>

Έστω $z_0\in\mathbb{C}$ και $f(z)$ συνάρτηση για την οποία υπάρχουν οι παράγωγοι όλων των τάξεων στο z_0. Τότε η σειρά

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n}$$

καλείται **σειρά Taylor** της $f(z)$ στο z_0. Αν $z_0=0$, τότε η σειρά

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n}$$

καλείται **σειρά Maclaurin** της $f(z)$.

<u>Θεώρημα 12:</u> Έστω $R>0$, $z_0\in\mathbb{C}$ και $f(z)$ συνάρτηση η οποία είναι ολόμορφη στον κυκλικό δίσκο $S(z_0,R)=\{z\in\mathbb{C}/|z-z_0|<R\}$. Τότε η $f(z)$ μπορεί να παρασταθεί κατά <u>μοναδικό</u> τρόπο στη μορφή

$$\boxed{f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n(z-z_0)^n \text{ για κάθε } z\in\mathbb{C} \text{ με } |z-z_0|<R}$$

Οι συντελεστές α_n δίνονται από τη σχέση

$$\boxed{\alpha_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \text{ για } n = 0,1,2,...} \qquad \square$$

Επομένως, σύμφωνα με το Θεώρημα 9ii), υπάρχουν οι παράγωγοι κάθε τάξης της $f(z)$ σε κάθε σημείο του $S(z_0,R)$. Επίσης έχουμε αμέσως ότι

$$\boxed{f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n \text{ για κάθε } z \in \mathbb{C} \text{ με } |z-z_0| < R}$$

και άρα, στον κυκλικό δίσκο $S(z_0,R)$, η $f(z)$ και η σειρά Taylor $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$ συμπίπτουν (δηλ. για $z \in S(z_0,R)$, η $f(z)$ **αναπτύσσεται** στη σειρά της Taylor στο z_0 - η ακτίνα σύγκλισης της σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$ είναι μεγαλύτερη ή ίση του R).

Από την ανάλυση που προηγήθηκε έπεται ότι αν η συνάρτηση $f(z)$ είναι ορισμένη σε έναν κυκλικό δίσκο $S(z_0,R)$, τότε η $f(z)$ είναι ολόμορφη στον $S(z_0,R)$ αν και μόνο αν $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$ για κάθε $z \in S(z_0,R)$.

Από το Θεώρημα 12 έχουμε αμέσως την ακόλουθη

<u>Πρόταση 13:</u> Έστω $f(z)$ συνάρτηση η οποία είναι ολόμορφη στο $\mathbb{C}$ (δηλ. η $f(z)$ είναι ακέραια συνάρτηση) και $z_0 \in \mathbb{C}$. Τότε η $f(z)$ μπορεί να παρασταθεί κατά <u>μοναδικό</u> τρόπο στη μορφή

$$\boxed{f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (z-z_0)^n \text{ για κάθε } z \in \mathbb{C}}$$

Οι συντελεστές α_n δίνονται από τη σχέση

$$\boxed{\alpha_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \text{ για } n = 0,1,2,...} \qquad \square$$

Συνεπώς, σύμφωνα με την Παρατήρηση 11, υπάρχουν οι παράγωγοι κάθε τάξης της $f(z)$ σε κάθε σημείο του $\mathbb{C}$. Επίσης έχουμε αμέσως ότι

$$\boxed{f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n \text{ για κάθε } z\in\mathbb{C}}$$

και άρα, στο $\mathbb{C}$, η $f(z)$ και η σειρά Taylor $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$ συμπίπτουν (δηλ. η $f(z)$ **αναπτύσσεται** στη σειρά της Taylor στο z_0 - η ακτίνα σύγκλισης της σειρά $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$ είναι $+\infty$).

Αν στα προηγούμενα έχουμε $z_0=0$, τότε αντί για τη σειρά Taylor της $f(z)$ έχουμε τη σειρά Maclaurin της $f(z)$.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ

Έστω A ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{C}$ και $f(z)$ συνάρτηση ολόμορφη στο A. Τότε για κάθε $z_0\in A$

- υπάρχουν οι παράγωγοι όλων των τάξεων της $f(z)$ στο z_0.
- για κάθε $R>0$ με $S(z_0,R)\subseteq A$ έχουμε ότι

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n \text{ για κάθε } z\in S(z_0,R) \qquad (*)$$

(δηλ. για κάθε $z\in S(z_0,R)$, η $f(z)$ αναπτύσσεται σε σειρά Taylor στο z_0). Η παράσταση $(*)$, η οποία είναι μοναδική στο $S(z_0,R)$ ως έκφραση της $f(z)$ σε δυναμοσειρά με κέντρο το z_0, ισχύει τοπικά γύρω από το z_0 και όχι αναγκαστικά σε όλο το A. □

__Σημαντικές σειρές Maclaurin__

- $$\boxed{\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty} z^n\ ,\ z\in\mathbb{C}\ \text{με}\ |z|<1}$$

  Επομένως

  - $\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+\ldots+z^n+\ldots$ για $z\in\mathbb{C}$ με $|z|<1$.
  - αν θέσουμε $f(z)=\frac{1}{1-z}$, τότε

  $$f^{(n)}(0)=n!\ \text{για κάθε}\ n\in\mathbb{N}$$

  Παρατήρηση: Η δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{\infty} z^n$ έχει ακτίνα σύγκλισης $R=1$ (άρα δεν συγκλίνει στο $\mathbb{C}$ για $z\in\mathbb{C}$ με $|z|>1$).

- $$\boxed{e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\ \text{για κάθε}\ z\in\mathbb{C}}$$

  Επομένως

  - $e^z=1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\ldots+\frac{z^n}{n!}+\ldots$ για κάθε $z\in\mathbb{C}$.
  - αν θέσουμε $g(z)=e^z$, τότε

  $$g^{(n)}(0)=1\ \text{για κάθε}\ n\in\mathbb{N}$$

  - η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$ έχει ακτίνα σύγκλισης $R=+\infty$.

- $$\boxed{\sin z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}\ \text{για κάθε}\ z\in\mathbb{C}}$$

  Επομένως:

  - $\sin z=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\ldots+(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots$ για κάθε $z\in\mathbb{C}$.
  - αν θέσουμε $h(z)=\sin z$, τότε

$$h^{(n)}(0)=\begin{cases} 0, & \text{αν n άρτιος} \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}}, & \text{αν n περιττός} \end{cases}$$

- η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$ έχει ακτίνα σύγκλισης $R=+\infty$.

- $\boxed{\cos z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \text{ για κάθε } z\in\mathbb{C}}$

Επομένως:

- $\cos z=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}+\ldots$ για κάθε $z\in\mathbb{C}$.
- αν θέσουμε $\varphi(z)=\cos z$, τότε

$$\varphi^{(n)}(0)=\begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}}, & \text{αν n άρτιος} \\ 0, & \text{αν n περιττός} \end{cases}$$

- η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$ έχει ακτίνα σύγκλισης $R=+\infty$.

Παραδείγματα

1. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(z)=\frac{1}{z-2}$.

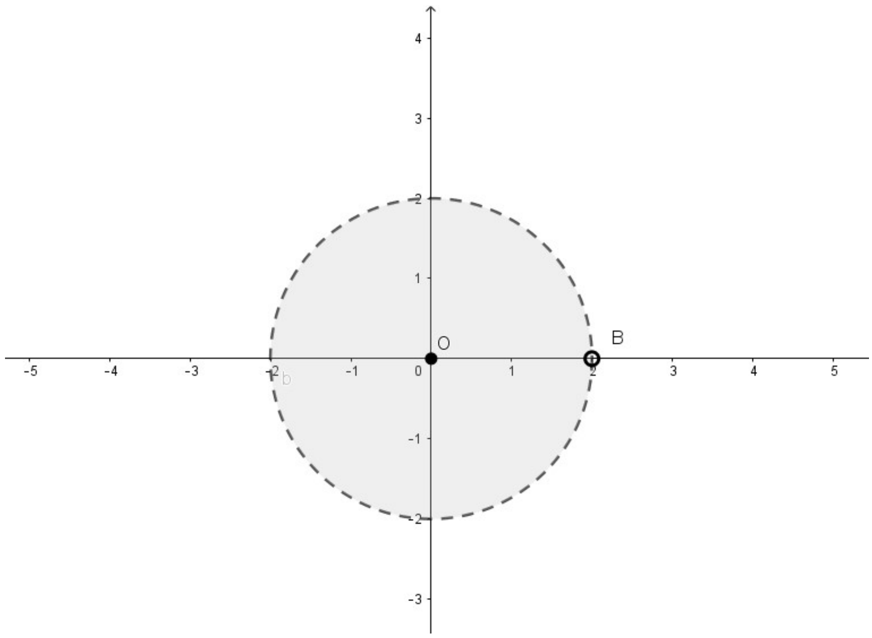
i) Να βρείτε το μεγαλύτερο (ανοικτό) κυκλικό δίσκο με κέντρο το $O(0,0)$ στον οποίο η $f(z)$ αναπτύσσεται σε σειρά Maclaurin καθώς και το ανάπτυγμα Maclaurin της $f(z)$ σε αυτόν τον κυκλικό δίσκο.

ii) Έστω $z_0=2+2i$. Να βρείτε το μεγαλύτερο κυκλικό δίσκο $S(z_0,R)$ στον οποίο η $f(z)$ αναπτύσσεται σε σειρά Taylor στο z_0 καθώς και το ανάπτυγμα Taylor της $f(z)$ στο z_0 σε αυτόν τον κυκλικό δίσκο.

Λύση:

Το πεδίο ορισμού της $f(z)$ είναι το $A=\mathbb{C}-\{2\}$ το οποίο είναι προφανώς ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{C}$. Επίσης η $f(z)$ είναι ολόμορφη στο A (ως ρητή συνάρτηση). Ας συμβολίσουμε με B την εικόνα στο μιγαδικό επίπεδο του 2, δηλ. το σημείο $(2,0)$.

i) Όπως φαίνεται και από το παρακάτω σχήμα



ο μεγαλύτερος κυκλικός δίσκος με κέντρο το $O(0,0)$ ο οποίος περιέχεται στο A είναι ο $S(0,2)$, δηλ. αυτός που έχει ακτίνα 2. Επομένως (βλ. Συμπέρασμα) ο μεγαλύτερος (ανοικτός) κυκλικός δίσκος με κέντρο το O στον οποίο η $f(z)$ αναπτύσσεται σε σειρά Maclaurin είναι ο $S(0,2)$.

Ανάπτυγμα Maclaurin

Έστω τώρα $z\in S(0,2)$. Αυτό σημαίνει ότι $|z|<2$.

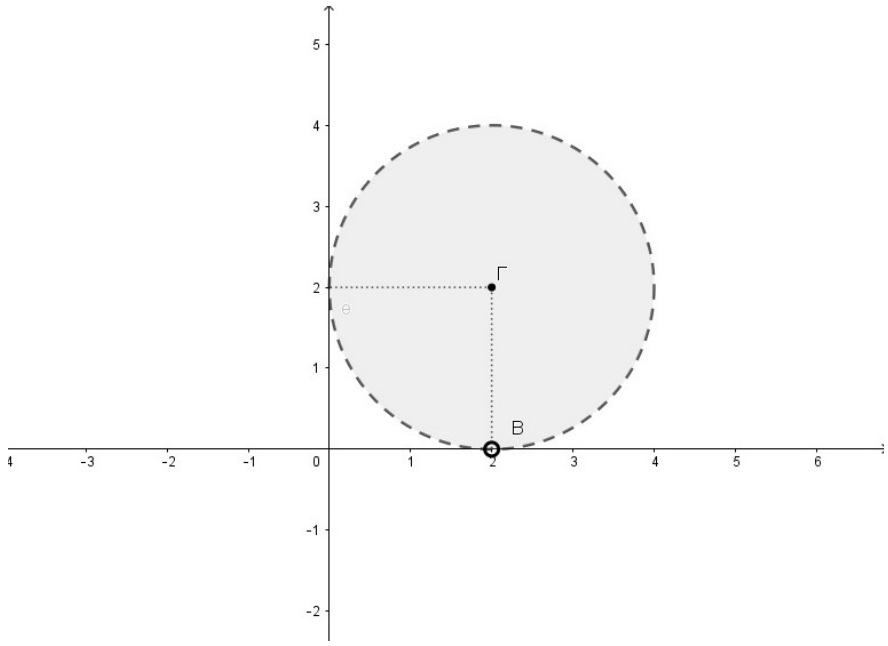
$$f(z)=\frac{1}{z-2}=-\frac{1}{2-z}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}}$$

Επειδή $|z|<2\Leftrightarrow\left|\frac{z}{2}\right|<1$, τότε έχουμε

$$f(z)=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}}=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^{n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2^{n+1}}\right)z^{n}$$

Τότε (βλ. Συμπέρασμα) έχουμε ότι το ανάπτυγμα Maclaurin της $f(z)$ είναι η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2^{n+1}}\right)z^n$ (και άρα $f^{(n)}(0)=n!\left(-\frac{1}{2^{n+1}}\right)$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$).

ii) Έστω Γ η εικόνα στο μιγαδικό επίπεδο του $z_0=2+2i$. Όπως φαίνεται και από το παρακάτω σχήμα



ο μεγαλύτερος κυκλικός δίσκος με κέντρο το Γ ο οποίος περιέχεται στο A είναι ο $S(z_0,2)$, δηλ. αυτός που έχει ακτίνα 2. Επομένως (βλ. Συμπέρασμα) ο μεγαλύτερος κυκλικός δίσκος με κέντρο το Γ στον οποίο η $f(z)$ αναπτύσσεται σε σειρά Taylor στο z_0 είναι ο $S(z_0,2)$.

Ανάπτυγμα Taylor

Έστω τώρα $z\in S(z_0,2)$. Αυτό σημαίνει ότι $|z-z_0|<2$.

$$f(z)=\frac{1}{z-2}=-\frac{1}{2-z}=-\frac{1}{(2-z_0)+(z_0-z)}=-\frac{1}{2-z_0}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{2-z_0}}$$

Επειδή $2-z_0=-2i$, τότε έχουμε

$$f(z)=\frac{1}{2i}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{-2i}}$$

Όμως

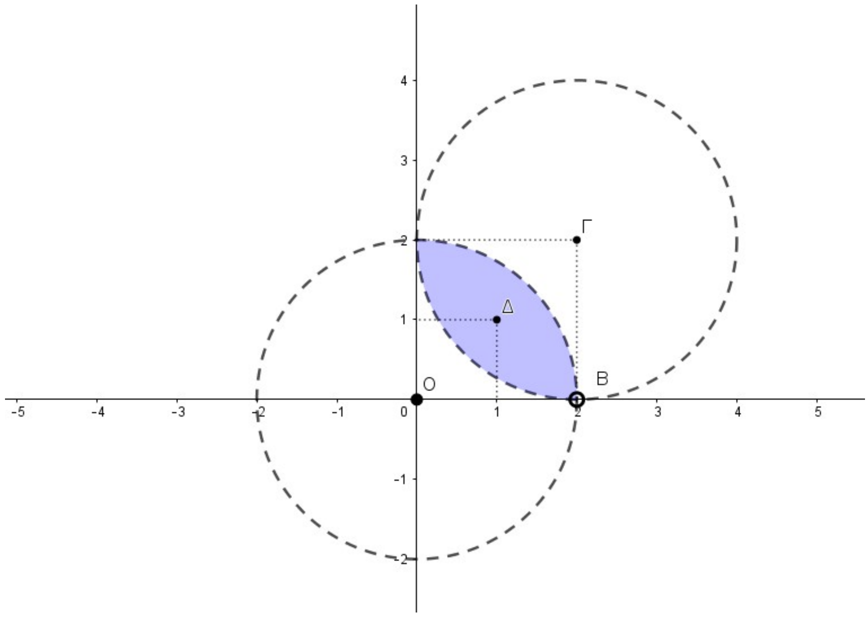
$$\left|\frac{z-z_0}{-2i}\right| = \frac{|z-z_0|}{2} < 1$$

Άρα

$$f(z) = \frac{1}{2i}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{-2i}} = \frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{-2i}\right)^n = \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2i)^{n+1}}(z-z_0)^n$$

Τότε (βλ. Συμπέρασμα) στον κυκλικό δίσκο $S(z_0,2)$ έχουμε ότι το ανάπτυγμα Taylor της $f(z)$ στο z_0 είναι η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2i)^{n+1}}(z-z_0)^n$ (και άρα $f^{(n)}(z_0) = n!\frac{(-1)^n}{(2i)^{n+1}}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$).

Παρατήρηση: Τα σημεία της χρωματισμένης περιοχής του παρακάτω σχήματος



ανήκουν και στους δύο κύκλους $S(0,2)$ και $S(z_0,2)$. Άρα οι εικόνες μέσω της f των σημείων της χρωματισμένης περιοχής εκφράζονται και με τη σειρά Maclaurin της $f(z)$ που βρήκαμε στο i) και με τη σειρά Taylor της $f(z)$ στο z_0 που υπολογίσαμε στο ii). Έτσι λοιπόν για τον μιγαδικό $w = 1+i$ του οποίου η εικόνα ανήκει στη χρωματισμένη περιοχή (είναι το σημείο $\Delta(1,1)$), έχουμε:

- $f(1+i)=\dfrac{1}{1+i-2}=\dfrac{1}{-1+i}=...=-\dfrac{1+i}{2}$
- $f(1+i)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(-\dfrac{1}{2^{n+1}}\right)(1+i)^n$
- $f(1+i)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2i)^{n+1}}(1+i-z_0)^n \underset{(z_0=2+2i)}{=} \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2i)^{n+1}}(-1-i)^n=..=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2i)^{n+1}}(1+i)^n$

Άρα

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2^{n+1}}\right)(1+i)^n=-\frac{1+i}{2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2i)^{n+1}}(1+i)^n$$

(το προηγούμενο αποτέλεσμα δεν έρχεται σε αντίφαση με τη μοναδικότητα που αναφέρεται στο Θεώρημα 12 – γιατί;) □

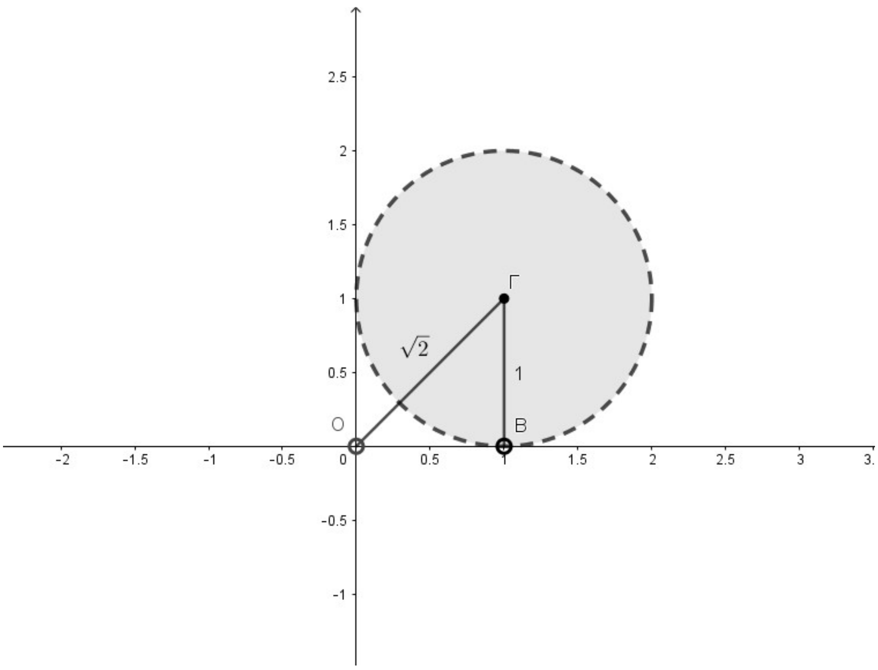
2. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(z)=\dfrac{1}{z(z-1)}$ και το μιγαδικό $z_0=1+i$. Να βρείτε το μεγαλύτερο κυκλικό δίσκο $S(z_0.R)$ στον οποίο η $f(z)$ αναπτύσσεται σε σειρά Taylor στο z_0 καθώς και το ανάπτυγμα Taylor της $f(z)$ στο z_0 σε αυτόν τον κυκλικό δίσκο.

<u>Λύση:</u>

Το πεδίο ορισμού της $f(z)$ είναι το $A=\mathbb{C}-\{0,\ 1\}$ το οποίο είναι προφανώς ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{C}$. Επίσης η $f(z)$ είναι ολόμορφη στο A (ως ρητή συνάρτηση). Έστω $B(1,0)$ και $\Gamma(1,1)$ οι εικόνες στο μιγαδικό επίπεδο των μιγαδικών 1, z_0 αντίστοιχα. Οι αποστάσεις του z_0 από τους μιγαδικούς 0, 1 είναι

$$d(z_0,0)=|z_0-0|=...=\sqrt{2}\,,\ \ d(z_0,1)=|z_0-1|=...=1$$

Επειδή $d(z_0,0)>d(z_0,1)$, τότε, όπως φαίνεται και από το παρακάτω σχήμα:



Σχήμα 1

ο μεγαλύτερος κυκλικός δίσκος με κέντρο το Γ ο οποίος περιέχεται στο Α είναι ο $S(z_0,1)$, δηλ. αυτός που έχει ακτίνα 1. Επομένως (βλ. Συμπέρασμα) ο μεγαλύτερος κυκλικός δίσκος με κέντρο το Γ στον οποίο η $f(z)$ αναπτύσσεται σε σειρά Taylor στο z_0 είναι ο $S(z_0,1)$.

Παρατηρούμε ότι $f(z)=\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z}$. Επομένως για να βρούμε στον κυκλικό δίσκο $S(z_0,1)$ το ανάπτυγμα Taylor της $f(z)$ στο z_0 αρκεί να βρούμε στον $S(z_0,1)$ τα αναπτύγματα Taylor των συναρτήσεων $g(z)=\frac{1}{z-1}$ και $h(z)=\frac{1}{z}$ στο z_0.

- **Ανάπτυγμα Taylor** στον κυκλικό δίσκο $S(z_0,1)$ της $\mathbf{g(z)}$ στο z_0.

  Το πεδίο ορισμού της $g(z)$ είναι το $\mathbb{C}-\{1\}$ το οποίο είναι προφανώς ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{C}$. Επίσης η $g(z)$ είναι ολόμορφη στο Α (ως ρητή συνάρτηση) και $S(z_0,1)\subseteq\mathbb{C}-\{1\}$ (όπως άλλωστε φαίνεται και από το Σχήμα 1). Επομένως (βλ. Συμπέρασμα) η $g(z)$ αναπτύσσεται στον κυκλικό δίσκο $S(z_0,1)$ σε σειρά Taylor στο z_0.

  Έστω τώρα $z\in S(z_0,1)$. Αυτό σημαίνει ότι $|z-z_0|<1$.

$$g(z)=\frac{1}{z-1}=\frac{1}{(z-z_0)+(z_0-1)}=\ldots=\frac{1}{z_0-1}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{1-z_0}}\underset{(z_0=1+i)}{=}\frac{1}{i}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{-i}}=$$

$$=-i\cdot\frac{1}{1-(z-z_0)i}$$

Όμως

$$|(z-z_0)i|=|z-z_0||i|=|z-z_0|<1$$

Άρα

$$g(z)=-i\cdot\frac{1}{1-(z-z_0)i}=-i\sum_{n=0}^{\infty}((z-z_0)i)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-i^{n+1}\right)(z-z_0)^n$$

Τότε (βλ. Συμπέρασμα) στον κυκλικό δίσκο $S(z_0,1)$ έχουμε ότι το ανάπτυγμα Taylor της $g(z)$ στο z_0 είναι η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty}\left(-i^{n+1}\right)(z-z_0)^n$ (και άρα $g^{(n)}(z_0)=\left(-i^{n+1}\right)n!$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$).

- **Ανάπτυγμα Taylor** στον κυκλικό δίσκο $S(z_0,1)$ της $\mathbf{h}(\mathbf{z})$ στο z_0.

Το πεδίο ορισμού της $h(z)$ είναι το $\mathbb{C}-\{0\}$ το οποίο είναι προφανώς ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{C}$. Επίσης η $h(z)$ είναι ολόμορφη στο A (ως ρητή συνάρτηση) και $S(z_0,1)\subseteq\mathbb{C}-\{0\}$ (όπως άλλωστε φαίνεται και από το Σήμα 1). Επομένως (βλ. Συμπέρασμα) η $h(z)$ αναπτύσσεται στον κυκλικό δίσκο $S(z_0,1)$ σε σειρά Taylor στο z_0.

Έστω τώρα $z\in S(z_0,1)$. Αυτό σημαίνει ότι $|z-z_0|<1$.

$$h(z)=\frac{1}{(z-z_0)+z_0}=\ldots=\frac{1}{z_0}\cdot\frac{1}{1+\frac{z-z_0}{z_0}}\underset{(z_0=1+i)}{=}\frac{1}{1+i}\cdot\frac{1}{1+\frac{z-z_0}{1+i}}=\ldots=$$

$$=\frac{1-i}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{(z-z_0)(-1+i)}{2}}$$

Όμως

$$\left|\frac{(z-z_0)(-1+i)}{2}\right|=|z-z_0|\left|\frac{-1+i}{2}\right|=\ldots=\frac{|z-z_0|\sqrt{2}}{2}\underset{(|z-z_0|<1)}{<}\frac{\sqrt{2}}{2}<1\Rightarrow\left|\frac{(z-z_0)(-1+i)}{2}\right|<1$$

Άρα

$$h(z)=\frac{1-i}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{(z-z_0)(-1+i)}{2}}=\frac{1-i}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(z-z_0)(-1+i)}{2}\right)^n=\ldots=$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(1-i)^{n+1}}{2^{n+1}}(z-z_0)^n$$

Τότε (βλ. Συμπέρασμα) στον κυκλικό δίσκο $S(z_0,1)$ έχουμε ότι το ανάπτυγμα Taylor της $h(z)$ στο z_0 είναι η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(1-i)^{n+1}}{2^{n+1}}(z-z_0)^n$ (και άρα $h^{(n)}(z_0)=\frac{(-1)^n(1-i)^{n+1}}{2^{n+1}}n!$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$).

Συνεπώς για κάθε $z\in S(z_0,1)$ έχουμε ότι

$$f(z)=g(z)-h(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-i^{n+1}\right)(z-z_0)^n-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(1-i)^{n+1}}{2^{n+1}}(z-z_0)^n=$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-i^{n+1}-\frac{(-1)^n(1-i)^{n+1}}{2^{n+1}}\right)(z-z_0)^n$$

Τότε (βλ. Συμπέρασμα) στον κυκλικό δίσκο $S(z_0,1)$ έχουμε ότι το ανάπτυγμα Taylor της $f(z)$ στο z_0 είναι η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty}\left(-i^{n+1}-\frac{(-1)^n(1-i)^{n+1}}{2^{n+1}}\right)(z-z_0)^n$ (και άρα $f^{(n)}(z_0)=\left(-i^{n+1}-\frac{(-1)^n(1-i)^{n+1}}{2^{n+1}}\right)n!$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$). □

Άσκηση: Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(z)=\frac{1}{z^2-1}$.

i) Να βρείτε το μεγαλύτερο (ανοικτό) κυκλικό δίσκο με κέντρο το $O(0,0)$ στον οποίο η $f(z)$ αναπτύσσεται σε σειρά Maclaurin καθώς και το ανάπτυγμα Maclaurin της $f(z)$ σε αυτόν τον κυκλικό δίσκο.

ii) Έστω $z_0=2$. Να βρείτε το μεγαλύτερο (ανοικτό) κυκλικό δίσκο $S(z_0,R)$ στον οποίο η $f(z)$ αναπτύσσεται σε σειρά Taylor στο z_0 καθώς και το ανάπτυγμα Taylor της $f(z)$ στο z_0 σε αυτόν τον κυκλικό δίσκο. □