<u>ΜΙΓΑΔΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ</u>

Έστω $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{C}$. Μία απεικόνιση $f : A \to \mathbb{C}$ καλείται **μιγαδική συνάρτηση**. Την εικόνα $f(z)$ συνήθως τη συμβολίζουμε με w (δηλ. $w = f(z)$). Για κάθε $z \in A$ έχουμε

$$f(z) = \mathrm{Re}(f(z)) + \mathrm{Im}(f(z))i$$

Άρα ορίζονται δύο <u>πραγματικές</u> συναρτήσεις μιγαδικής μεταβλητής:

- $\mathrm{Re} f : A \to \mathbb{R}$, $(\mathrm{Re} f)(z) = \mathrm{Re}(f(z))$
- $\mathrm{Im} f : A \to \mathbb{R}$, $(\mathrm{Im} f)(z) = \mathrm{Im}(f(z))$

Επειδή ως γνωστόν το $\mathbb{R}^2$ ταυτίζεται με το $\mathbb{C}$ (μέσω της $(x, y) \leftrightarrow x + yi$), τότε αν θεωρήσουμε το σύνολο

$$A_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x + yi \in A\}$$

μπορούμε να θεωρούμε τις συναρτήσεις $\mathrm{Re} f$, $\mathrm{Im} f$ ως πραγματικές συναρτήσεις δύο (πραγματικών) μεταβλητών με πεδίο ορισμού το A_1:

- $u : A_1 \to \mathbb{R}$, $u(x, y) = (\mathrm{Re} f)(x + yi)$
- $v : A_1 \to \mathbb{R}$, $v(x, y) = (\mathrm{Im} f)(x + yi)$

Άρα για $z = x + yi \in A$, έχουμε:

$$\boxed{w = f(z) = \mathrm{Re}(f(z)) + i\,\mathrm{Im}(f(z)) = u(x, y) + i\,v(x, y)}$$

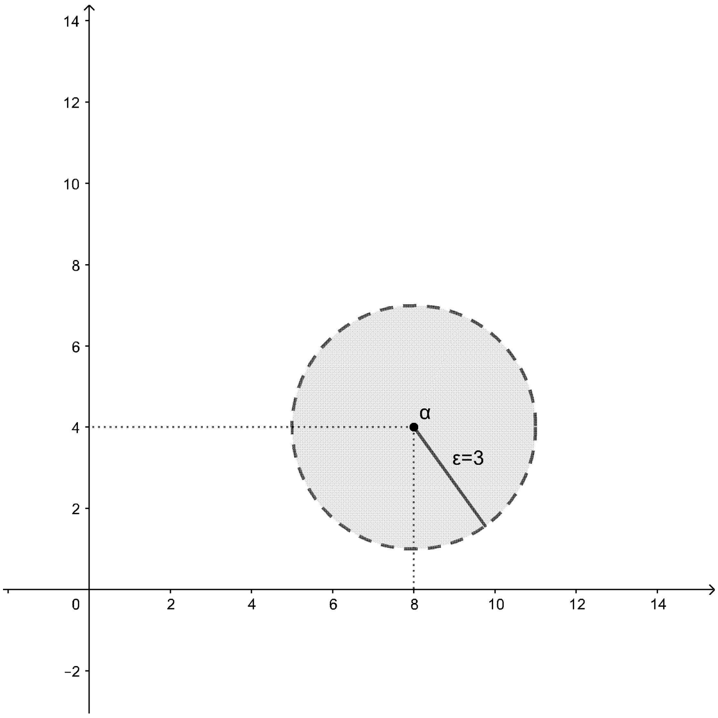
Στα επόμενα θα χρησιμοποιούμε τους προηγούμενους συμβολισμούς χωρίς να γίνεται ιδιαίτερη μνεία.

<u>ΟΡΙΟ ΜΙΓΑΔΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ</u>

- Έστω $\alpha \in \mathbb{C}$ και $\varepsilon > 0$. Το σύνολο

  $$S(\alpha, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} / |z - \alpha| < \varepsilon\}$$

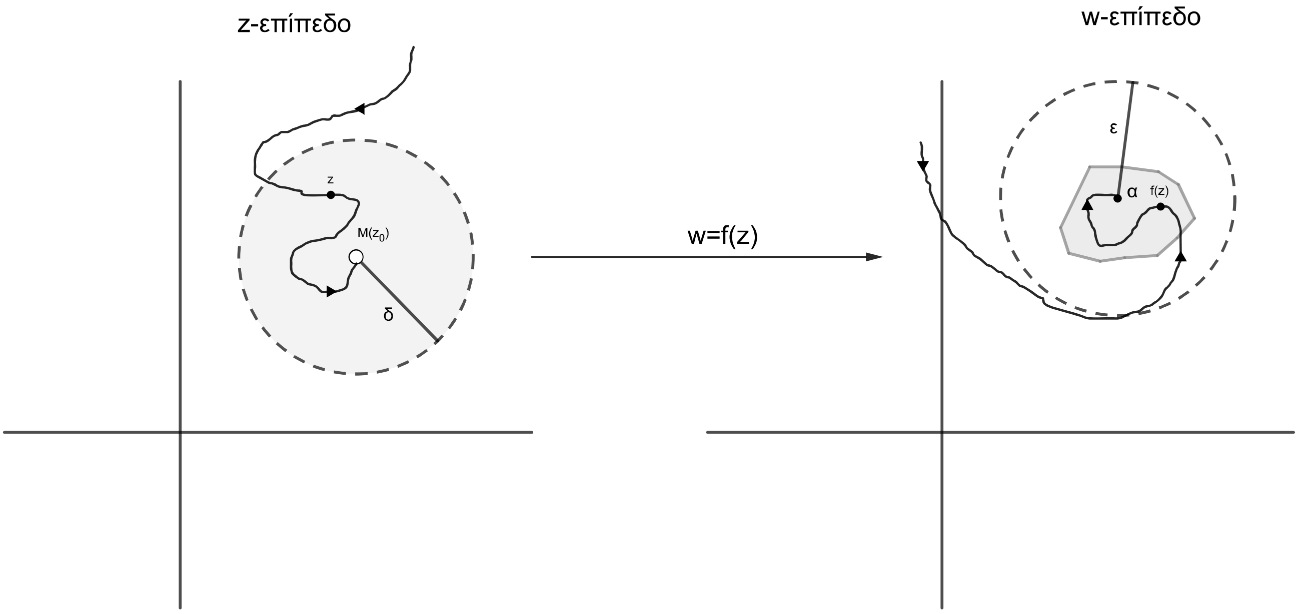
  καλείται (ανοικτή) **ε - περιοχή του α**. Το $S(\alpha, \varepsilon)$ είναι ο κυκλικός δίσκος με κέντρο την εικόνα του α και ακτίνα ε (χωρίς την περιφέρεια του κυκλικού δίσκου). Στο επόμενο σχήμα φαίνεται η 3 - περιοχή του $\alpha = 8 + 4i$:



- Έστω A μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{C}$. Το A καλείται ανοικτό αν για κάθε $\alpha \in A$ υπάρχει $\varepsilon > 0$ (το οποίο γενικά εξαρτάται από το $\alpha \in A$) τέτοιο ώστε $S(\alpha,\varepsilon) \subseteq A$.
- Έστω A μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{C}$ και $\alpha \in \mathbb{C}$. Το α καλείται σημείο συσσώρευσης (σ.σ.) του A αν για κάθε $\varepsilon > 0$ έχουμε ότι $\left(S(\alpha,\varepsilon) - \{\alpha\}\right) \cap A \neq \varnothing$. Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να προσεγγίσουμε (οσοδήποτε κοντά θέλουμε) το α με στοιχεία από το σύνολο A <u>διαφορετικά</u> του α. Το σύνολο των σ.σ. του A συμβολίζεται με A'. Π.χ. $\left(S(\alpha,\varepsilon)\right)' = \{z \in \mathbb{C} / |z-\alpha| \leq \varepsilon\}$ (δηλ. το σύνολο των σ.σ. του A είναι ο <u>κλειστός</u> κυκλικός δίσκος με κέντρο το α και ακτίνα ε).

<u>**Ορισμός 1:**</u> Έστω D μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{C}$, $f : D \to \mathbb{C}$ συνάρτηση, $z_0 \in D'$ και $\alpha \in \mathbb{C}$. Τότε $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \alpha$ αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ (το οποίο γενικά εξαρτάται από το ε και το z_0) τέτοιο ώστε για κάθε $z \in D$ με $0 < |z - z_0| < \delta$ να ισχύει $|f(z) - \alpha| < \varepsilon$. Δηλ. μπορούμε να πλησιάσουμε στο α οσοδήποτε κοντά θέλουμε με τιμές $f(z)$ για z αρκούντως κοντά στο z_0. □

Από τον Ορισμό 1 έχουμε ότι $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\alpha$ αν και μόνο αν κάθε ε - περιοχή του α περιέχει όλες τις τιμές μίας δ - περιοχής του z_0 εκτός (ίσως) από το $f(z_0)$ (δηλ. για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $\delta>0$ τέτοιο ώστε $f\left(S(z_0,\delta)-\{z_0\}\right)\subseteq S(\alpha,\varepsilon)$):



Στη μιγαδική περίπτωση το z συγκλίνει στο z_0 με πολλούς τρόπους (π.χ. κατά μήκος οποιασδήποτε καμπύλης του $\mathbb{C}$ που διέρχεται από το z_0) και όχι μόνο, όπως στην πραγματική περίπτωση, κατά μήκος μίας ευθείας (του άξονα $x'x$). Αυτό σημαίνει ότι αν βρούμε δύο διαφορετικούς τρόπους σύγκλισης του z στο z_0 για τους οποίους τα όρια $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ δεν είναι ίσα, τότε δεν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$. Επίσης αν $z=x+yi$ και $z_0=x_0+y_0 i$, τότε $z\to z_0$ αν και μόνο αν $x\to x_0$ και $y\to y_0$ (δηλ. αν και μόνο αν $\operatorname{Re}(z)\to\operatorname{Re}(z_0)$ και $\operatorname{Im}(z)\to\operatorname{Im}(z_0)$).

Παρατήρηση 2:

i) Το όριο $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ όταν υπάρχει είναι μοναδικό.

ii) $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\alpha \Leftrightarrow \lim\limits_{z\to z_0}\left(f(z)-\alpha\right)=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{z\to z_0}\left|f(z)-\alpha\right|=0$. □

Θεώρημα 3: Έστω D μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{C}$, $f: D \to \mathbb{C}$ συνάρτηση, $z_0 = x_0 + y_0 i \in D'$ και $\alpha = u_0 + v_0 i \in \mathbb{C}$. Τότε:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \alpha \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = u_0 \\ \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = v_0 \end{Bmatrix}$$ □

Επομένως όταν υπάρχει στο $\mathbb{C}$ το $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$, ισχύει:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \left(\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) \right) + i \left(\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) \right) = \lim_{z \to z_0} \left(\mathrm{Re}(f(z)) \right) + i \lim_{z \to z_0} \left(\mathrm{Im}(f(z)) \right)$$

Θεώρημα 4: Έστω D μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{C}$, $f, g: D \to \mathbb{C}$ συναρτήσεις και $z_0 \in D'$. Έστω ακόμη ότι $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \alpha$ και $\lim\limits_{z \to z_0} g(z) = b$. Τότε:

i) $\lim\limits_{z \to z_0} \left(f(z) \pm g(z) \right) = \alpha \pm b$.

ii) $\lim\limits_{z \to z_0} \left(f(z) g(z) \right) = \alpha b$.

iii) $\lim\limits_{z \to z_0} \left(c \cdot f(z) \right) = c \cdot \alpha$ για κάθε $c \in \mathbb{C}$.

iv) για $b \neq 0$ έχουμε $\lim\limits_{z \to z_0} \left(\dfrac{f(z)}{g(z)} \right) = \dfrac{\alpha}{b}$.

v) $\lim\limits_{z \to z_0} |f(z)| = |\alpha|$. □

Για διάφορους λόγους κυρίως τοπολογικής σύγκλισης, προσθέτουμε στο $\mathbb{C}$ το ∞ (άπειρο). Το ∞ μπορούμε να το πλησιάσουμε απομακρυνόμενοι από την αρχή των αξόνων $O(0,0)$ προς οποιαδήποτε κατεύθυνση (π.χ. πάνω σε μία ευθεία ή πάνω σε κύκλους των οποίων η ακτίνα μεγαλώνει οσοδήποτε θέλουμε - δηλ. απειρίζεται). Με άλλα λόγια όταν λέμε ότι το z τείνει στο ∞ σημαίνει (ισοδύναμα) ότι το $|z|$ τείνει στο $+\infty$. Το μιγαδικό επίπεδο με το σημείο ∞ καλείται **επεκτεταμένο μιγαδικό επίπεδο** και γράφουμε $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Στο $\overline{\mathbb{C}}$ ορίζουμε τις ακόλουθες πράξεις:

- $z + \infty = \infty + z = \infty$, $z \in \mathbb{C}$
- $z - \infty = \infty$, $z \in \mathbb{C}$
- $z \cdot \infty = \infty \cdot z = \infty$, $z \in \overline{\mathbb{C}}$ με $z \neq 0$
- $\infty \cdot \infty = \infty$

- $\frac{z}{\infty} = 0$, $z \in \mathbb{C}$
- $\frac{\infty}{z} = \infty$, $z \in \mathbb{C}$
- $\frac{z}{0} = \infty$, $z \in \overline{\mathbb{C}}$ με $z \neq 0$

Ένα γεωμετρικό πρότυπο για το $\overline{\mathbb{C}}$ είναι η μοναδιαία σφαίρα (σφαίρα Riemann). Σε αντίθεση με το $\mathbb{R}$ που έχουμε ορίσει δύο άπειρα: $+\infty$, $-\infty$, στο $\mathbb{C}$ ορίζεται μόνο ένα άπειρο (αφού στο $\mathbb{C}$ δεν υπάρχει διάταξη).

Ορισμός 5: Έστω D μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{C}$, $f : D \to \mathbb{C}$ συνάρτηση και $z_0 \in D'$. Τότε $\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$ αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ (το οποίο εξαρτάται από το ε και το z_0) τέτοιο ώστε για κάθε $z \in D$ με $0 < |z - z_0| < \delta$ να ισχύει $|f(z)| > \varepsilon$. Δηλ. μπορούμε να απομακρυνθούμε από την αρχή των αξόνων $O(0,0)$ οσοδήποτε θέλουμε με τιμές $f(z)$ για z αρκούντως κοντά στο z_0. □

Έστω τώρα D μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{C}$ το οποίο περιέχει μιγαδικούς αριθμούς με μέτρο οσοδήποτε μεγάλο θέλουμε (δηλ. για κάθε $M > 0$ υπάρχει $z \in D$ με $|z| > M$) και $f : D \to \mathbb{C}$ συνάρτηση. Τότε:

- για $\alpha \in \mathbb{C}$ ορίζουμε $\lim_{z \to \infty} f(z) = \alpha$ αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ (το οποίο εξαρτάται από το ε) τέτοιο ώστε για κάθε $z \in D$ με $|z| > \delta$ να ισχύει $|f(z) - \alpha| < \varepsilon$. Δηλ. μπορούμε να πλησιάσουμε στο α οσοδήποτε κοντά θέλουμε με τιμές $f(z)$ για z αρκούντως απομακρυσμένα από την αρχή των αξόνων $O(0,0)$.
- ορίζουμε $\lim_{z \to \infty} f(z) = \infty$ αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ (το οποίο εξαρτάται από το ε) τέτοιο ώστε για κάθε $z \in D$ με $|z| > \delta$ να ισχύει $|f(z)| > \varepsilon$. Δηλ. μπορούμε να απομακρυνθούμε από την αρχή των αξόνων $O(0,0)$ με τιμές $f(z)$ για z αρκούντως απομακρυσμένα από το O.

Για τα όρια στα οποία εμπλέκεται το ∞ ισχύει το Θεώρημα 4 αρκεί να προκύπτουν επιτρεπόμενες πράξεις.

<u>ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ</u>

<u>Ορισμός 6:</u> Έστω D μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{C}$, $f : D \to \mathbb{C}$ συνάρτηση και $z_0 \in D$. Η f καλείται **συνεχής** στο z_0 αν $z_o \notin D'$ (δηλ. $z_o \in D - D'$) ή $z_o \in D'$ και $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$. □

Στα επόμενα θα έχουμε πάντα ότι $z_o \in D'$ (όπως άλλωστε ισχύει συνήθως και στην πράξη). Αν η f είναι συνεχής για κάθε $z \in D$ τότε λέμε ότι η f είναι συνεχής στο D. Π.χ. οι πολυωνυμικές και οι ρητές συναρτήσεις είναι συνεχείς στα πεδία ορισμού τους.

<u>Θεώρημα 7:</u> Έστω D μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{C}$, $f, g : D \to \mathbb{C}$ συναρτήσεις και $z_0 \in D$ τέτοιο ώστε οι f, g να είναι συνεχείς στο z_0. Τότε:

i) οι συναρτήσεις $f \pm g$ είναι συνεχείς στο z_0.

ii) η συνάρτηση $f \cdot g$ είναι συνεχής στο z_0.

iii) η συνάρτηση $c \cdot f$ είναι συνεχής στο z_0 για κάθε $c \in \mathbb{C}$.

iv) αν $g(z_0) \neq 0$, η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ είναι συνεχής στο z_0. □

Επίσης και στις μιγαδικές συναρτήσεις ισχύει το εξής γνωστό αποτέλεσμα των πραγματικών συναρτήσεων πραγματικής μεταβλητής:
Αν η (μιγαδική) συνάρτηση g είναι συνεχής στο z_0 και η (μιγαδική) συνάρτηση f είναι συνεχής στο $g(z_0)$, τότε και η σύνθεση $f \circ g$ είναι συνεχής στο z_0.

Θεώρημα 8: Έστω D μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{C}$, $f: D \to \mathbb{C}$ συνάρτηση και $z_0 = x_0 + y_0 i \in D$. Τότε η f είναι συνεχής στο z_0 αν και μόνο αν οι συναρτήσεις u, v είναι συνεχείς στο (x_0, y_0). □

Παραδείγματα

1. Να υπολογιστεί το όριο $\lim\limits_{z\to -i} \dfrac{z^4-1}{z+i}$.

Λύση:

$$\lim_{z\to -i} \frac{z^4-1}{z+i} = \lim_{z\to -i} \frac{(z^2-1)(z^2+1)}{z+i} = \lim_{z\to -i} \frac{(z^2-1)(z+i)(z-i)}{z+i} = \lim_{z\to -i}\left((z^2-1)(z-i)\right) = \ldots = 4i$$

□

2. Να βρεθεί (αν υπάρχει) το όριο $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{z}{\overline{z}}$.

Λύση: Έστω $z = x + yi \neq 0$. Τότε:

$$\frac{z}{\overline{z}} = \frac{x+yi}{x-yi} = \frac{(x+yi)^2}{x^2+y^2} = \ldots = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + \frac{2xy}{x^2+y^2} i$$

Άρα

- Για $\underline{y=0}$:

  $z = x \in \mathbb{R}$. Άρα

  $$\lim_{\substack{z\to 0\\ z\in\mathbb{R}}} \frac{z}{\overline{z}} = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} \left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + \frac{2xy}{x^2+y^2} i \right) = \lim_{x\to 0} 1 = 1$$

  Συνεπώς αν περιοριστούμε πάνω στην ευθεία $y=0$ (δηλ. στον άξονα $x'x$) έχουμε $\lim\limits_{\substack{z\to 0\\ z\in\mathbb{R}}} \dfrac{z}{\overline{z}} = 1$.

- Για $\underline{x=0}$:

  $z = yi \in \mathbb{I}$. Άρα

  $$\lim_{\substack{z\to 0\\ z\in\mathbb{I}}} \frac{z}{\overline{z}} = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=0}} \left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + \frac{2xy}{x^2+y^2} i \right) = \lim_{y\to 0}(-1) = -1$$

Συνεπώς αν περιοριστούμε πάνω στην ευθεία $x=0$ (δηλ. στον άξονα $y'y$)

έχουμε $\lim\limits_{\substack{z\to 0\\ z\in\mathbb{I}}}\dfrac{z}{\overline{z}}=-1$.

Από τα παραπάνω έπεται αμέσως ότι δεν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{z\to o}\dfrac{z}{\overline{z}}$. □

3. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(z)=\begin{cases}\dfrac{z\operatorname{Re}(z)}{|z|}, & z\neq 0\\ 0, & z=0\end{cases}$$

Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $z_0=0$.

<u>Λύση:</u>

$$\lim_{z\to 0}|f(z)|=\lim_{z\to 0}\left|\frac{z\operatorname{Re}(z)}{|z|}\right|=\lim_{z\to 0}\frac{|z||\operatorname{Re}(z)|}{|z|}=\lim_{z\to 0}|\operatorname{Re}(z)|=0$$

Από την Παρατήρηση 2ii) έπεται τότε αμέσως ότι $\lim\limits_{z\to 0}f(z)=0$. Επομένως, επειδή $f(0)=0$, έχουμε ότι η f είναι συνεχής $z_0=0$. □

<u>Άσκηση:</u> Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(z)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{Re}(z)}{|z|}, & z\neq 0\\ \alpha, & z=0\end{cases}$$

Να εξετάσετε αν υπάρχει τιμή του α ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $\mathbb{C}$. □